Seminarvortrag:

Elemente der Gruppentheorie

von Burghard Grüter

Inhalt des Vortrages:

- Einige für die Physik wichtige Definitionen und Sätze aus der Gruppentheorie (ohne Beweis)

- Beispiele, die den Inhalt der abstrakten mathematischen Definition verdeutlichen und Bezüge zur Physik herstellen.

Motivation:

Die Symmetrie spielt eine wichtige Rolle in Natur, Physik, Kristallografie und anderen Disziplinen. Eng verknüpft hiermit ist der Begriff der Gruppe. Für Symmetrien ist diese Gruppenstruktur schon viel früher erkannt worden, als für andere algebraische Strukturen, wie z. B. Zahlen.

Die Symmetriegruppe des gleichseitigen Dreiecks C_{3v}:

Es gibt 6 Symmetrieoperationen (siehe Folie), die sich aus einer dreizähligen Drehung und drei Spiegelungen an den Mittelsenkrechten zusammensetzen. Die Erkenntnis, dass man Symmetrien durch Operationen ausdrücken kann, die ein Objekt wieder in sich selbst überführt war grundlegend für das Erkennen der Gruppenstruktur dieser Operationen.

1 Gruppe

Definition:
Eine Menge G mit einer Verknüpfung σ, genannt Multiplikation, heisst Gruppe, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) Die Multiplikation muß abgeschlossen sein, d.h. jedem Paar $A,B \in G$ wird durch diese Multiplikation eindeutig ein Element C von G zugeordnet.

b) Die Multiplikation muß assoziativ sein: $A\sigma(B\sigma C) = (A\sigma B)\sigma C$

c) Es existiert ein Gruppenelement E mit folgender Eigenschaft:

$$R\sigma E = E\sigma R = R$$

für alle Elemente R aus G.
Dies ist das eindeutig bestimmte Einselement oder die „Identität„.

d) Zu jedem Element $R \in G$ existiert das „inverse„ oder „reziproke„ Element $R^{-1} \in G$, so dass

$$R\sigma R^{-1} = R^{-1}\sigma R = E$$

Ist zusätzlich das Kommutativgesetz erfüllt, heisst die Gruppe „abelsch„, solche haben sehr einfache gruppentheoretische Struktur.

In der weiteren Darstellung wird das Verknüpfungszeichen weggelassen, da bei der Verknüpfungsoperation von einer Multiplikation ausgegangen wird.

Für endliche Gruppen sind Gruppentafeln sehr praktisch:

Beispiele:

(a) endliche Gruppe mit drei Elementen:

Gruppe G	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Kommutativität erkennt man an der Spiegelsymmetrie der Gruppentafel bezüglich der Diagonalen.
In jeder Spalte und in jeder Zeile muß bei endlichen Gruppen jedes Gruppenelement genau einmal auftreten.

(b) GL(n), die allgemeine lineare Gruppe:
Die Menge aller invertierbaren n×n-Matrizen bildet eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation (nicht kommutativ). Die Anzahl der wesentlichen Parameter ist n^2
SL(n) ist die spezielle lineare Gruppe, für die det = 1 ist. Daher ist die Anzahl der wesentlichen Parameter n^2-1.

(c) U(n) und SU(n), alle unitären n×n-Matrizen (det U = exp(iα)) bilden mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe. (n^2-Parameter).
SU(n) ist die spezielle unitäre Gruppe, alle Matrizen, bei denen α=0 ist. Die Anzahl der Parameter beträgt n^2-1.
SU(n) ist wichtig für die theoretische Physik. Zum Beispiel die Gruppe SU(2) hängt mit dem Spin zusammen. Diese Gruppe ist gleichzeitig ein Vektorraum. Die Pauli-Spinmatrizen bilden eine Basis dieses Vektorraumes, während SU(3) bei Klassifizierung der Elementarteilchen eine wichtige Rolle spielt.

(d) O(n) und SO(n), alle orthogonalen n×n-Matrizen (reelle Matrizen mit det= ±1)
(Parameter: ½ n(n-1)+1)
SO(n) ist die spezielle orthogonale Gruppe mit det=1. Sie hat dadurch einen Parameter weniger. O(3) und SO(3) hängen mit der Drehung im reellen drei-dimensionalen euklidischen Raum zusammen (Drehmatrizen).

2 Ordnung der Gruppe

Definition:
Die Zahl der Elemente von G (einschliesslich E) heisst Ordnung g der Gruppe

g endlich: „endliche Gruppen„ (z.B. diskrete Punktgruppen, obiges Beispiel)
g abzählbar unendlich: „unendliche Gruppen„ (z.B. diskrete Raumgruppen)
g nicht abzählbar unendlich: „kontinuierliche Gruppen„ (z.B. Rotationsgruppe R, Lie'sche Gruppen, nicht-diskrete Raumgruppen (Kontinuum)).

3 Untergruppe

Definition:
Eine Teilmenge H von G heisst Untergruppe, wenn diese mit derselben Multiplikation eine Gruppe bildet. Dazu muß es nur das neutrale Element enthalten und bezüglich der zugehörigen Operation abgeschlossen sein.

Beispiele:

a) C_{3v} besitzt folgende Untergruppen: $\{E,C_3,C_3^2\}$, $\{E,\sigma_v^{(1)}\}$, $\{E,\sigma_v^{(2)}\}$, $\{E,\sigma_v^{(3)}\}$

b) Die Gruppen SO(n) bzw. SU(n) sind Untergruppen der Gruppen O(n) bzw. U(n) und O(n) ist Untergruppe von U(n), wie die reellen Zahlen eine Untergruppe der komplexen Zahlen bezüglich der Addition oder der Multiplikation sind.

Lagrange-Theorem

Die Ordnung h der Untergruppe $H \subseteq G$ ist Divisor der Ordnung g der Originalgruppe G:

$$\frac{g}{h} \in \mathbb{N}$$

Wenn g eine Primzahl ist, gibt es nur triviale Untergruppen.

4 Klassen

Definition: Konjugierte Elemente

Ein Element A aus G heisst „konjugiert„ zu einem anderen Element B aus G, wenn es ein Element X aus G gibt, so dass

$$A = XBX^{-1}$$

Folgendes gilt:

a) wenn A zu B konjugiert ist, dann auch B zu A

b) Ist A zu B und B zu C konjugiert, dann auch A zu C (Transitivität)

Definition: Klasse

Eine Klasse der Gruppe G ist eine Menge von zueinander konjugierten Elementen aus G

Eine Klasse kann ausgehend von jedem Element A aus G konstruiert werden, indem man die Menge der Produkte XAX^{-1} für beliebiges X aus G bildet. Die Klasse enthält A selbst: $A = EAE^{-1}$.

Folgendes gilt:

a) Jedes Element aus G gehört zu einer Klasse von G

b) Kein Element aus G gehört zu zwei verschiedenen Klassen von G

c) Die Identität ist immer eine Klasse für sich. Zusammen mit a) und b) bedeutet dies, dass eine Gruppe immer vollständig und eindeutig in Klassen zerlegt werden kann.

d) Die Zahl g_i der Elemente einer Klasse K_i ist ein Teiler der Anzahl g der Gruppenelemente. Wenn g Primzahl ist, folgt, dass jedes Element eine Klasse für sich bildet.

e) Wenn G abelsch ist, dann ist jedes Element aus G eine Klasse für sich:
$$XAX^{-1} = XX^{-1}A = EA = A$$

Beispiel:

Die Gruppe C_{3v} hat folgende Klassen:
1. Klasse: $\{E\}$, $g_1 = 1$
2. Klasse: $\{C_3, C_3^2\}$, $g_2 = 2$
3. Klasse: $\{\sigma_v^{(1)}, \sigma_v^{(2)}, \sigma_v^{(3)}\}$, $g_3 = 3$

5 Nebenklassen, Normalteiler, Faktorgruppe

Definition: Linksnebenklassen

Sei H eine Untergruppe von G. Eine Linksnebenklasse von H in G ist ein Teilmenge von G der Form:
$$aH := \{ah;\ h \in H\} \text{ mit } a \in G$$
Folgendes gilt:

Je zwei Linksnebenklassen von H in G sind gleichmächtig (d.h. es gibt eine bijektive Abbildung zwischen diesen beiden). Verschiedene Linksnebenklassen von H in G sind disjunkt. G ist disjunkte Vereinigung der Linksnebenklassen von H. Für Rechtsnebenklassen (Ha) gilt alles in analoger Weise.

Definition: Normalteiler (oder invariante Untergruppe)

Eine Untergruppe $H \subset G$ heisst Normalteiler oder invariante Untergruppe von G, wenn $aH = Ha$ für alle $a \in G$ gilt. Äquivalent ist die Schreibweise: $H = aHa^{-1}$, die deutlicher macht, dass für jedes Element auch dessen ganze Klasse zur Untergruppe gehört. Ein Normalteiler enthält also nur vollständige Klassen.

Ist H ein Normalteiler und sind aH und bH zwei ihrer Linksnebenklassen, so ist das Produkt eines Elements aus aH mit einem Element aus bH ein Element aus der Linksnebenklasse abH:

$$(aH)(bH)=(abH)$$

Mit dem so definierten Produkt bildet die aus dem Normalteiler H und seinen Linksnebenklassen bestehende Menge eine Gruppe, in dem H das Einselement ist: die Faktorgruppe G/H.

Beispiel:

Die Untergruppe $\{E,C_3,C_3^2\}$ von C_{3v} ist invariante Untergruppe, weil sie nur vollständige Klassen enthält; für die anderen Untergruppen gilt dies nicht. Sie hat folgende Nebenklasse (Restklasse): $\{\sigma_v^{(1)},\sigma_v^{(2)},\sigma_v^{(3)}\}$.
Gegenbeispiel ist die Untergruppe $\{E, \sigma_v^{(1)}\}$: Ihre Linksnebenklassen sind folgende $\{C_3, \sigma_v^{(3)}\}$, $\{C_3^2, \sigma_v^{(2)}\}$. Das Produkt dieser beiden Linksnebenklassen ist:

$$\{C_3, \sigma_v^{(3)}\}\ \{C_3^2, \sigma_v^{(2)}\} = \{E, \sigma_v^{(1)}, \sigma_v^{(2)}, C_3^2\}$$

6 Direktes Produkt, Semi-direktes Produkt

Definition: Direktes Produkt

Seien G_1 und G_2 zwei Gruppen mit E_1 und E_2 deren jeweiligen Einselemente. Auf der Menge der Paare (A_1,A_2) mit $A_1 \in G_1$ und $A_2 \in G_2$ definiert man folgendes Produkt: $(A_1,A_2)\ (A_1',A_2') = (A_1A_1',A_2A_2')$.

Dann gilt:
Die Menge der obigen Paare bildet mit der obigen Multiplikation eine Gruppe. Diese Gruppe schreibt man als $G_1 \otimes G_2$ und wird das direkte Produkt von G_1 mit G_2 genannt. Gruppen, die zu so konstruierten Gruppen isomorph sind, werden direkte Produktgruppen genannt.

Satz:

Wenn eine Gruppe G zwei Untergruppen G_1 und G_2 hat, so dass

a) Die Elemente von G_1 vertauschen mit denen von G_2
b) G_1 und G_2 haben nur das Einselement gemeinsam
c) Jedes Element von G kann als Produkt eines Elementes von G_1 mit einem aus G_2 geschrieben werden

dann ist G eine direkte Produktgruppe.

Beispiel:

Die Gruppe O(3) kann dargestellt werden als direktes Produkt aus SO(3) und I(3), der Inversionsgruppe mit den Elementen $\mathbf{1}_3$ und $-\mathbf{1}_3$.

Definition: Semi-direktes Produkt

Eine Gruppe wird semi-direktes Produkt genannt, wenn sie zwei Untergruppen G_1, G_2 enthält, so dass

a) G_1 ist eine invariante Untergruppe von G
b) G_1 und G_2 haben nur das Einselement gemeinsam
c) Jedes Element von G kann als Produkt eines Elementes von G_1 mit einem aus G_2 geschrieben werden

G kann dann isomorph zum $\mathbf{S}$emi-direkten Produkt von G_1 mit G_2 genannt werden

Beispiel

Die euklidische Gruppe im $\mathbb{R}^3$ ist definiert als die Gruppe aller linearen Koordinatentransformationen T. Sei G_1 die Untergruppe aller reinen Translationen und G_2 diejenige aller reinen Rotationen und die Gruppenmultiplikation ist gegeben durch:

$$\{R(T_1T_2)|t(T_1T_2)\} = \{R(T_1)R(T_2)|R(T_1)t(T_2)+t(T_1)\}$$

Die reinen Translationen bilden eine invariante Untergruppe von G:

$$\{R(T)|t(T)\}\{\mathbf{1}|t(T_1)\}\{R(T)|t(T)\}^{-1} = \{\mathbf{1}|R(T)t(T_1)\}$$

c) wird erfüllt, weil eine euklidische Bewegung immer getrennt aus Rotation und Translation zusammengesetzt werden kann. b) ist offensichtlich. So ist die euklidische Gruppe eine semi-direkte Produktgruppe.

Zusammenfassung:

Die hier genannten Begriffe sind elementar wichtig für eine weitere Untersuchung und das Aufdecken von Symmetrien zur Vereinfachung oder sogar zur Ermöglichung der Lösung physikalischer Probleme. Dazu sind aber noch weitere eher mathematische Vorbereitungen nötig.

Literatur:

[1] Max Wagner, **Gruppentheoretische Methoden in der Physik**, 1998, Vieweg & Sohn

[2] J.F. Cornwell, **Group Theory in Physics Vol. 1**, 1984, Academic Press

[3] Siegfried Bosch, **Algebra**, 1996, Springer Verlag

[4] Albert Messiah, **Quantenmechanik**, 1991, Walter de Gruyter