LORENTZ- UND POINCARÉ-GRUPPE

Seminar

Teilchen- und Kerntheorie

12.01.2000

M. Stingl

Westfälische Wilhelms-Universität

Institut für Theoretische Physik I

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[1] S. Gasiorowicz, Elementary Particle Physics, New York u.a. 1966, Verlag John Wiley & Sons (Chapter 4)

[2] L. H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge (UK) 1985, Cambridge University Press (Chapter 2)

[3] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Vol. I, Cambridge (UK) 1995, Cambridge University Press (Chapter 2)

[4] R. Sexl und H. Urbantke, Relativität-Gruppen-Teilchen, Wien 1976, Springer Verlag

1 Die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe

Motivation: Als zentrales Postulat der Speziellen Relativitätstheorie (Einstein 1905) kann gelten, dass die Naturgesetze in allen Inertialsystemen die gleiche Form annehmen („relativistische Kovarianz") und dass die Übergänge zwischen zwei Inertialsystemen durch die Gruppe der homogenen bzw. (bei Hinzunahme von Translationen) inhomogenen Lorentz-Transformationen beschrieben werden kann. Es ist daher wesentlich, Struktur und mögliche Darstellungen dieser Gruppen zu kennen.

Relativistische Notation

Raum-Zeit-Punkt („Ereignis") beschrieben durch kontravariante Koordinaten

$$\{x^\mu \,|\, \mu = 0, 1, 2, 3\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{x^0, \vec{x}\} \tag{1.1}$$

mit $x^0 = c\,t = t$ (Einheiten mit $c = 1$). Metrischer Tensor:

$$(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\,(+1, -1, -1, -1) = (\eta_{\nu\mu}) \qquad \text{(symmetrisch)}\ . \tag{1.2}$$

Inverser metrischer Tensor:

$$(\eta^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}\,(+1, -1, -1, -1) = (\eta^{\nu\mu}) \tag{1.3}$$

mit

$$\eta^{\mu\rho}\,\eta_{\rho\nu} = \delta^\mu{}_\nu \qquad \text{(Summationskonvention!)}\ . \tag{1.4}$$

Kovariante Koordinaten („Herunterziehen von Indizes"):

$$\{x_\mu\} := \{\eta_{\mu\nu}\,x^\nu\} = \{x^0, -\vec{x}\} \tag{1.5}$$

Heraufziehen:

$$\eta^{\mu\nu}\,x_\nu = x^\mu \tag{1.6}$$

Minkowski-Skalarprodukt:

$$\boxed{x \cdot y := \eta_{\mu\nu}\,x^\mu\,y^\nu = \left\{ \begin{array}{c} x^\mu\,y_\mu \\ x_\nu\,y^\nu \end{array} \right\} = y \cdot x} \tag{1.7}$$

$$= x^0\,y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y} \tag{1.8}$$

„Indefinite Metrik" im Sinne von

$$x^2 := x \cdot x = (x^0)^2 - \vec{x}^{\,2} \gtreqless 0 \tag{1.9}$$

$$x = \{x^\mu\} = \begin{cases} \text{„zeitartig"} & \text{für} \quad x^2 > 0 \\ \text{„lichtartig"} & \text{für} \quad x^2 = 0 \\ \text{„raumartig"} & \text{für} \quad x^2 < 0 \end{cases} \qquad \text{(bzgl. des Ursprungs)}$$

Menge der vierdimensionalen Raum-Zeit-Punkte (1.1/5) mit indefiniter Metrik (1.7/9) = „Minkowski-Raum" $\mathbb{R}^{3,1}$ oder $\mathcal{M}^4$.

Homogene Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$

Menge der linearen homogenen Transformationen des $\mathcal{M}^4$,

$$\Lambda : \qquad x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu \ , \tag{1.10}$$

beschrieben durch relle 4×4-Matrix $(\Lambda^\mu{}_\nu)$ (oder $(\Lambda_{\mu\nu} = \eta_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\nu)$ usw.), welche Minkowski-Skalarprodukt invariant lassen:

$$x' \cdot y' \equiv (\Lambda\, x) \cdot (\Lambda\, y) = x \cdot y \tag{1.11}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \boxed{\eta_{\rho\sigma}\, \Lambda^\rho{}_\mu\, \Lambda^\sigma{}_\nu = \eta_{\mu\nu}} \tag{1.12}$$

oder mit Definition transponierter Matrizen

$$(\Lambda^T)_\mu{}^\rho := \Lambda^\rho{}_\mu \tag{1.13}$$

kurz

$$\Lambda^T \eta\, \Lambda = \eta \qquad \text{(Pseudo-Orthogonalität)} \ . \tag{1.14}$$

Bilden *Gruppe* $\mathcal{L}$: bei Nacheinanderausführung zweier Transformationen Λ_1, Λ_2:

$$(\Lambda_2\, \Lambda_1)^T\, \eta\, (\Lambda_2\, \Lambda_1) = \Lambda_1{}^T\, (\Lambda_2{}^T\, \eta\, \Lambda_2)\, \Lambda_1 = \Lambda_1{}^T\, \eta\, \Lambda_1 = \eta \ . \tag{1.15}$$

Einselement (Identität):

$$(\mathbb{1})^\mu{}_\nu = \eta^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \ , \quad \mathbb{1}\, \Lambda = \Lambda\, \mathbb{1} = \Lambda \ . \tag{1.16}$$

Inverses Element zu Λ: nach (1.14)

$$\eta^{-1}\,\Lambda^T\eta\,\Lambda \,=\, \eta^{-1}\,\eta \,=\, \mathbb{1} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Lambda^{-1} \,=\, \eta^{-1}\,\Lambda^T\,\eta}\;. \tag{1.17}$$

Aus (1.14) durch Determinantenbildung:

$$(\det\Lambda)^2 \,=\, 1 \quad\Rightarrow\quad \det\Lambda \,=\, +1 \quad \text{oder} \quad -1\,. \tag{1.18}$$

Weiter aus (1.12) für $\mu \,=\, \nu \,=\, 0$:

$$({\Lambda^0}_0)^2 \,=\, 1 + \sum_{n=1}^{3} ({\Lambda^n}_0)^2 \quad\Rightarrow\quad {\Lambda^0}_0 \geq +1 \quad \text{oder} \quad \leq -1 \tag{1.19}$$

Daher Einteilung von $\mathcal{L}$ in vier disjunkte Stücke:

$\operatorname{sgn}{\Lambda^0}_0$	$\det\Lambda$	Struktur
+1	+1	Untergr. v. $\mathcal{L}_+^\uparrow \subset \mathcal{L}$ („eigentlich-orthochrone LG“)
+1	-1	Nebenkl. v. ${(\Lambda_P)^\mu}_\nu$ = diag (+1, -1, -1, -1) (Paritätsop.)
-1	-1	Nebenkl. v. ${(\Lambda_T)^\mu}_\nu$ = diag (-1, +1, +1, +1) (Zeitumk.)
-1	+1	Nebenkl. v. ${(\Lambda_T\,\Lambda_P)^\mu}_\nu$ = diag (-1, -1, -1, -1)

(1.20)

Parametrisierung von $\mathcal{L}_+^\uparrow$:

16 Matrixelemente mit 10 Nebenbedingungen (1.12) $\Rightarrow$ 6 Parameter. Zweckmäßige Parametrisierung mit Bezug auf die 2 wesentlichen Teilwirkungen des allgemeinen $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$:

• Raumdrehung R (nur Raumkoordinaten $\vec{x}$ unter sich orthogonal transformiert): parametrisierbar durch

$$\text{„Drehvektor“}\;\; \vec{\varphi} \,=\, \underbrace{\varphi}_{\text{Drehwinkel}} \cdot \underbrace{\hat{\varphi}}_{\text{Drehachse}}\;, \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi \tag{1.21}$$

• Schubtransformation („Boost“) B, d. h. Transformation zwischen relativ zueinander gleichförmig mit Geschwindigkeit $\vec{v}$, $|\vec{v}\,| \,<\, c$, bewegten Bezugssystemen, parametrisierbar durch $0 \,\leq\, |\vec{v}\,|\,/\,c \,<\, 1$ oder zweckmäßiger durch

$$\text{„Rapiditätsvektor“}\;\; \vec{\lambda} \,=\, \lambda\cdot\hat{v} \quad \text{mit} \quad \lambda \,=\, \operatorname{artanh}\left(\frac{|\vec{v}\,|}{c}\right)\;, \quad 0 \leq \lambda < \infty \tag{1.22}$$

Beachte: Parameterbereich für Boosts – und damit für $\mathcal{L}$ – *nichtkompakt* (für Untergruppe $SO\,(3)$ der reinen Raumdrehungen kompakt).

Zusammenfassung der Komponenten φ^k, λ^k ($k = 1, 2, 3$) zu *antisymmetrischem Parametertensor* $\omega = -\eta^{-1}\,\omega^T\,\eta$:

$$\omega_{\mu\nu} := \sum_{k=1}^{3} (\varepsilon_{0\mu\nu}{}^k)\varphi^k + \sum_{k=1}^{3} (\eta_{\mu 0}\,\eta_\nu{}^k - \eta_{\nu 0}\,\eta_\mu{}^k)\,\lambda^k = -\omega_{\nu\mu} \tag{1.23}$$

mit nichtverschwindenden Elementen

$$\omega_{mn} = \varepsilon_{mn}{}^k\,\varphi^k\,, \quad \omega_{0m} = -\omega_{m0} = \lambda^m \quad (m,\, n = 1,\, 2,\, 3) \tag{1.24}$$

Damit Exponentialdarstellung für $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$:

$$\boxed{\Lambda = e^{-\omega} = \Lambda\,(\omega)}\;; \qquad \Lambda = 1\!\!1 \Leftrightarrow \omega = 0\,. \tag{1.25}$$

Beachte: $\Lambda =$ *Raumdrehung* $R \Leftrightarrow \Lambda^0{}_0 = 1$ (da dann $\Lambda^n{}_0 = 0$ nach (1.19)).

Tensoren der Stufe n bezüglich $\mathcal{L}$: def. durch Transformationsverhalten

$$T'_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n} = T_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n}\,\Lambda^{\nu_1}{}_{\mu_1}\,\Lambda^{\nu_2}{}_{\mu_2}\,\ldots\,\Lambda^{\nu_n}{}_{\mu_n} \tag{1.26}$$

($n = 1$: Vierervektor)

Nur 2 invariante (in allen Bezugssystemen gleiche) Tensoren:

– metrischer Tensor $\eta_{\mu\nu}$ (Siehe Gl. (1.12)) unter $\mathcal{L}$;

– vollständig antisymmetrischer Tensor 4. Stufe (ε-Tensor)

$$\varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} = \begin{cases} +1\,, & \text{wenn } (\kappa,\,\lambda,\,\mu,\,\nu) \text{ gerade Permutation von } (0,\,1,\,2,\,3)\,, \\ -1\,, & \text{wenn } (\kappa,\,\lambda,\,\mu,\,\nu) \text{ ungerade Permutation von } (0,\,1,\,2,\,3)\,, \\ \;\;0\,, & \text{sonst (d. h. wenn 2 oder mehr Indizes gleich)} \end{cases} \tag{1.27}$$

Letzterer transformiert sich mit Faktor $\det\Lambda$, ist also invariant unter $\mathcal{L}_+$ („Pseudotensor“).

(Beachte:

$$\begin{array}{c} \varepsilon_{0123} = -\varepsilon^{0123} = -1\,; \quad \varepsilon^{0klm} = \varepsilon^{klm} = \\ \text{dreidimensionaler } \varepsilon\text{-Tensor mit } \varepsilon^{123} = +1) \end{array} \tag{1.28}$$

Poincaré-Gruppe (inhomogene Lorentz-Gruppe) $\mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{P}_+^\uparrow$

Gruppe der inhomogenen linearen Transformationen auf $\mathcal{M}^4$:

$$x \to x' = \Lambda\, x + a \; ; \qquad x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,(\omega)\, x^{\nu} + a^{\mu} \tag{1.29}$$

$$\Lambda = \Lambda\,(\omega) \in \mathcal{L} \quad \text{bzw.} \quad \in \mathcal{L}_+^\uparrow \; ; \qquad -\infty < a^{\mu} < +\infty \quad \text{(Translationsvektor)} \tag{1.30}$$

Schreibweise für Gesamttransformation: $(\Lambda,\, a)$ oder $(\Lambda\,(\omega),\, a) \in \mathcal{P}$.

Gruppenmultiplikation:

$$x'' = \Lambda_2\, x' + a_2 = \Lambda_2\,(\Lambda_1\, x + a_1) + a_2 = (\Lambda_2\, \Lambda_1)\, x + (\Lambda_2\, a_1 + a_2) \tag{1.31}$$

$$\left.\begin{aligned} (\Lambda_2,\, a_2) \circ (\Lambda_1,\, a_1) &= (\Lambda_2\, \Lambda_1,\, \Lambda_2\, a_1 + a_2) \\ (\Lambda,\, a) &= (1\!\!1,\, a) \circ (\Lambda,\, 0) \quad {}^{*)} \end{aligned}\right\} \text{„Semidirektes Produkt“} \tag{1.32}$$

Für $\Lambda_2 = \Lambda_1 = 1\!\!1$: Kommutativität der Translationen

$$(1\!\!1,\, a_2) \circ (1\!\!1,\, a_1) = (1\!\!1,\, a_1 + a_2) \tag{1.33}$$

Einsetzen der Zerlegung in Multiplikationsgesetz:

$$\begin{aligned} (1\!\!1,\, a_2) \circ (\Lambda_2,\, 0) \circ (1\!\!1,\, a_1) \circ (\Lambda_1,\, 0) &= \underbrace{(1\!\!1,\, \Lambda_2\, a_1 + a_2)}_{=\,(1\!\!1,\, a_2)\,\circ\,(1\!\!1,\, \Lambda_2\, a_1)} \circ \underbrace{(\Lambda_2\, \Lambda_1,\, 0)}_{=\,(\Lambda_2,\, 0)\,\circ\,(\Lambda_1,\, 0)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad (\Lambda_2,\, 0) \circ (1\!\!1,\, a_1) = (1\!\!1,\, \Lambda_2\, a_1) \circ (\Lambda_2,\, 0)$$

oder

$$\boxed{(\Lambda,\, 0) \circ (1\!\!1,\, a) \circ (\Lambda^{-1},\, 0) = (1\!\!1,\, \Lambda\, a)}\,. \tag{1.34}$$

Darstellungen und Generatoren von $\mathcal{P}_+^\uparrow$

*) Zerlegung nach Links-Nebenklassen von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ in $\mathcal{P}_+^\uparrow$, mit a als Repräsentanten.

Eindeutige und multiplikationstreue Abbildung (Homomorphismus)

$$(\Lambda,\, a) \in \mathcal{P}_+^\uparrow \longrightarrow \text{Lineare Transformation } T\,(\Lambda,\, a) \tag{1.35}$$

auf d-dimensionalem Vektorraum ($d \times d$-Matrix), wobei

$$(\mathbb{1},\, 0) \longrightarrow T\,(\mathbb{1},\, 0) = \mathbb{1}_{d \times d} \tag{1.36}$$

und

$$\boxed{T\,(\Lambda_2,\, a_2)\, T\,(\Lambda_1,\, a_1) = T\,(\Lambda_2\, \Lambda_1,\, \Lambda_2\, a_1 + a_2)} \tag{1.37}$$

Daraus folgen wie oben:

$$T\,(\Lambda,\, a) = T\,(\mathbb{1},\, a)\, T\,(\Lambda,\, 0)\ ; \tag{1.38}$$

$$T\,(\mathbb{1},\, a_2)\, T\,(\mathbb{1},\, a_1) = T\,(\mathbb{1},\, a_1 + a_2) \tag{1.39}$$

$$T\,(\Lambda,\, 0)\, T\,(\mathbb{1},\, a)\, (T\,(\Lambda,\, 0))^{-1} = T\,(\mathbb{1},\, \Lambda\, a) \tag{1.40}$$

Inverses einer Poincaré-Transformation dargestellt durch

$$(T\,(\Lambda,\, a))^{-1} = T\,(\Lambda^{-1},\, -\Lambda^{-1}\, a)\ . \tag{1.41}$$

Daraus Beziehung, die Nichtkommutativität der Gruppenmultiplikation charakterisiert:

$$\begin{aligned} &T\,(\Lambda_2,\, a_2)\, T(\Lambda_1,\, a_1)\, (T\,(\Lambda_2,\, a_2))^{-1} \\ &= T\,(\Lambda_2\, \Lambda_1\, \Lambda_2^{-1},\, \Lambda_2\, a_1 + (\mathbb{1} - \Lambda_2\, \Lambda_1\, \Lambda_2^{-1})\, a_2) \end{aligned} \tag{1.42}$$

Infinitesimale Form in Nähe der Identität $(\mathbb{1},\, 0)$*:* $\delta\,\omega$, $\delta\,a$ *klein*; definiert *Generatoren* $M^{\mu\nu}$ der homogenen Lorentz-Gruppe und P^μ der Translationsgruppe (Drehimpuls-, Boost- bzw. Impulsoperatoren) in der betrachteten Darstellung

$$T\,(\Lambda\,(\delta\,\omega) = \mathbb{1} - \delta\,\omega,\, 0) = \mathbb{1}_d - \frac{i}{2}\,\delta\,\omega_{\mu\nu}\, M^{\mu\nu} \tag{1.43}$$

$$(M_{\nu\mu} = -M_{\mu\nu}) \tag{1.44}$$

$$T\,(\mathbb{1},\,\delta a) \;=\; \mathbb{1}_d \;-\; i\,\delta\,a_\mu\,P^\mu \tag{1.45}$$

$\{M^{\mu\nu},\, P^\mu\}$ = Basis der Lie-Algebra (d. h. des Tangentialraums bei Id.) von $\mathcal{P}_+^\uparrow$ (10-dimensional, entsprechend 10 Parametern).

Für Dimension d endlich: T nichtunitär, $M^{\mu\nu}$ und P^μ nichthermitisch (Folge der Nichtkompaktheit). Siehe Abschnitt 3!

Für Dimension $d = \infty$ (z. B. quantentheoretischer Hilbertraum): unitäre Darstellung. ($T^\dagger = T^{-1}$) möglich (und für Quantentheorie allein interessierend, da Operator zu Symmetrietransformation Messwahrscheinlichkeiten erhalten muss). Schreibweise dann $U\,(\Lambda,\,a)$ statt T. Generatoren in solchen Darstellungen hermitisch:

$$M_{\kappa\lambda}{}^\dagger \;=\; M_{\kappa\lambda}\;, \quad P_\mu{}^\dagger \;=\; P_\mu \qquad (d\,=\,\infty) \tag{1.46}$$

Parametrisierung endlicher $T\,(\Lambda,\,a)$ aus (1.43/45) durch Exponentiation und Anwendung von (1.38):

$$\boxed{T\,(\Lambda\,(\omega),\,a) \;=\; \underbrace{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a_\mu\,P^\mu}}_{T\,(\mathbb{1},\,a)}\;\underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,M^{\mu\nu}}}_{T\,(\Lambda\,(\omega),0)}} \tag{1.47}$$

Zugleich: Darstellung von T als Element einer Nebenklasse mit Repräsentant $T\,(\mathbb{1},\,a)$ bezüglich der $\mathcal{L}_+^\uparrow$-homomorphen Untergruppe der $T\,(\Lambda,\,0)$.

Beachte: alternative Darstellung mittels eines einzigen Exponentialoperators,

$$T\,(\Lambda\,(\omega),\,a) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,[A_\mu\,P^\mu \,+\, \frac{1}{2}\,\Omega_{\mu\nu}\,M^{\mu\nu}]}\;, \tag{1.48}$$

hat *andere* Parameter, die jedoch, da $\mathcal{P}_+^\uparrow$ Lie-Gruppe, glatte Funktionen der $a,\,\omega$ (und umgekehrt):

$$A_\mu \;=\; A_\mu\,(\omega,\,a) \quad \text{mit} \quad A_\mu\,(0,\,a) \;=\; a_\mu \tag{1.49 a}$$

$$\Omega_{\mu\nu} \;=\; \Omega_{\mu\nu}\,(\omega,\,a) \quad \text{mit} \quad \Omega_{\mu\nu}\,(\omega,\,0) \;=\; \omega_{\mu\nu} \quad {}^{*)} \tag{1.49 b}$$

*) Voller Zusammenhang aus Kommutatoren (1.54) nach Baker-Campbell-Hausdorff-Formeln zu berechnen; gibt $\Omega = \omega$ für *alle* a, aber $A_\mu = a_\mu + \left(\frac{1}{2}\,\omega + \frac{1}{12}\,\omega^2 + \ldots\right)_{\mu\nu} a^\nu$.

Vertauschungsrelationen der Generatoren (Lie-Algebra von $\mathcal{P}_+^\uparrow$)

Aus der Kommutativität der Translationen (1.39) mit (1.47) sofort

$$\boxed{[P^\mu,\, P^\nu] \,=\, 0} \tag{1.50}$$

Aus (1.40) durch Linearisierung in a (verwende $(\Lambda\, a)\,\cdot\, P \,=\, a\,\cdot\,(\Lambda^{-1}\, P)$):

$$T\,(\Lambda,\, 0)\; P^\mu\, (T\,(\Lambda,\, 0))^{-1} \,=\, (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\, P^\nu \tag{1.51}$$

D. h. Viererimpuls P^μ transformiert als Vierervektor. Linearisierung in ω:

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \,=\, \delta^\mu{}_\nu \,+\, \omega^\mu{}_\nu \,+\, 0\,(\omega^2)\ , \tag{1.52}$$

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\, P^\nu \,=\, P^\mu \,+\, \frac{1}{2}\,\omega_{\rho\sigma}\,(\eta^{\mu\rho}\, P^\sigma \,-\, \eta^{\mu\sigma}\, P^\rho)\ , \tag{1.53}$$

ergibt

$$\boxed{[M^{\rho\sigma},\, P^\mu] \,=\, i\,(\eta^{\rho\mu}\, P^\sigma \,-\, \eta^{\sigma\mu}\, P^\rho)}\,. \tag{1.54}$$

Aufteilung der $M^{\mu\nu}$ in

$$\boxed{J^k \,=\, -\frac{1}{2}\,\varepsilon^k{}_{mn}\, M^{mn}\ ; \qquad k \,=\, 1,\, 2,\, 3 \quad \text{(Drehimpulsoperatoren)}} \tag{1.55}$$

$$\boxed{K^n \,=\, M^{n0} \,=\, -M^{0n}\ ; \qquad n \,=\, 1,\, 2,\, 3 \quad \text{(Boost-Generatoren)}} \tag{1.56}$$

(wobei $\varepsilon^{kmn} \,=\, \varepsilon^{0kmn}$, $\varepsilon^{0123} \,=\, +1$) gibt

$$[J^k,\, P^0] \,=\, 0\ , \quad [J^k, P^l] \,=\, i\,\varepsilon^{klm}\, P^m \tag{1.57}$$

$$[K^n,\, P^0] \,=\, -i\, P^n\ , \quad [K^n,\, P^l] \,=\, i\, \underbrace{\eta^{nl}}_{-\delta^{nl}}\, P^0 \tag{1.58}$$

Für Lorentz-Generatoren $M^{\mu\nu}$ ausgehen von Multiplikations-Gesetz mit a´s $= 0$ in der Form

$$T(\Lambda_2,\,0)\,T(\Lambda_1,\,0)\,(T(\Lambda_2,\,0))^{-1} \;=\; T(\Lambda_2\,\Lambda_1\,\Lambda_2^{-1}) \tag{1.59}$$

Linearisierung von Λ_1 und $T(\Lambda_1,\,0)$:

$$T(\Lambda,\,0)\,M^{\rho\sigma}\,(T(\Lambda,\,0))^{-1} \;=\; \frac{1}{2}\,M^{\kappa\lambda}\,[\Lambda_\kappa{}^\rho\,\Lambda_\lambda{}^\sigma \;-\; \Lambda_\kappa{}^\sigma\,\Lambda_\lambda{}^\rho] \tag{1.60}$$

(M transformiert unter $\mathcal{L}_+^\uparrow$ als antisymmetrischer Tensor 2. Stufe). Weitere Linearisierung von Λ und $T(\Lambda,\,0)$ gibt dann

$$\boxed{[M^{\mu\nu},\,M^{\rho\sigma}] \;=\; i\,(\eta^{\mu\rho}\,M^{\nu\sigma} \;+\; \eta^{\nu\sigma}\,M^{\mu\rho} \;-\; \eta^{\mu\sigma}\,M^{\nu\rho} \;-\; \eta^{\nu\rho}\,M^{\mu\sigma})} \tag{1.61}$$

(Lie-Algebra von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ist Unteralgebra der Lie-Algebra von $\mathcal{P}_+^\uparrow$; Strukturkonstanten werden von $\eta^{\alpha\beta}$-Kombinationen gebildet).

Aufteilung nach J´s und K´s:

$$\boxed{[J^k,\,J^l] \;=\; i\,\varepsilon^{klm}\,J^m} \qquad (\vec{J}\text{ transf. bei Drehungen als Dreiervektor}) \tag{1.62}$$

$$\boxed{[J^k,\,K^n] \;=\; i\,\varepsilon^{knm}\,K^m} \qquad (\vec{K}\text{ transf. als Dreiervektor}) \tag{1.63}$$

$$\boxed{[K^m,\,K^n] \;=\; -i\,\varepsilon^{mnk}\,J^k} \tag{1.64}$$

(Boosts in derselben Richtung kommutierend, in verschiedenen Richtungen Vertauschungseffekt = Drehung)

2 Casimir-Operatoren; Pauli-Lubanski-Vektor

Operator des Viererimpulsquadrats

$$P^2 := P_\mu P^\mu = \eta_{\mu\nu} P^\mu P^\nu \tag{2.1}$$

kommutiert trivialerweise mit den P^ρ und (wie alle Minkowski-Skalare) auch mit den $M^{\rho\sigma}$:

$$\begin{aligned}[P_\mu P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= P_\mu [P^\mu, M^{\rho\sigma}] + [P^\mu, M^{\rho\sigma}] P_\mu \\ &= i P_\mu (\eta^{\mu\sigma} P^\rho - \eta^{\mu\rho} P^\sigma) + i (\eta^{\mu\sigma} P^\rho - \eta^{\mu\rho} P^\sigma) P_\mu \\ &= i ([P^\sigma, P^\rho] + [P^\rho, P^\sigma]) = 0 .\end{aligned} \tag{2.2}$$

$\Rightarrow$ *P^2 Casimir-Operator von $\mathcal{P}_+^\uparrow$; Eigenwert m^2 ($\gtreqless 0$) von P^2 charakterisiert einen irreduziblen Darstellungsraum als Ganzes.* (Physikalisch nur $m^2 > 0$ oder $m^2 = 0$).

Für weiteren Casimir-Operator: definiere Pauli-Lubanski-Vektor (relativistischer Spinoperator)

$$\boxed{W^\mu := \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\kappa\lambda\nu} M_{\kappa\lambda} P_\nu} . \tag{2.3}$$

(bilinear in Generatoren!)

Eigenschaften folgen aus Poincaré-VR und Definition:

$$\boxed{W^\mu P_\mu = 0 \qquad (W^0 P_0 = \vec{W} \cdot \vec{P})} ; \tag{2.4}$$

$$\boxed{[W^\mu, P^\nu] = 0 \qquad (\text{alle } \mu, \nu)} ; \tag{2.5}$$

($\Rightarrow$ alle Komponenten von P^ν plus 1 Komponente von W^μ gleichzeitig diagonalisierbar!)

$$\boxed{[M^{\kappa\lambda}, W^\mu] = i (\eta^{\kappa\mu} W^\lambda - \eta^{\lambda\mu} W^\kappa} ; \quad (W \text{ Vierervektor}) \tag{2.6}$$

$$\boxed{[W^\mu, W^\nu] = i \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} W_\rho P_\sigma} . \tag{2.7}$$

Folgerung: Operator

$$\boxed{W^2 := W_\mu W^\mu = \eta_{\mu\nu} W^\mu W^\nu} \tag{2.8}$$

kommutiert mit den P^μ (nach (2.5)) und mit allen $M^{\mu\nu}$ (als Skalar). $\Rightarrow$ W^2 *weiterer Casimir-Operator von* $\mathcal{P}_+^\uparrow$.

(Dies sind im wesentlichen *alle* Casimir-Operatoren, da alle anderen aus P^μ und $M^{\kappa\lambda}$ konstruierten Skalare entweder nicht mit P´s kommutieren, was insbesondere auf die Bildungen

$$N_\mu N^\mu \text{ mit } N^\mu = M^{\mu\nu} P_\nu\,, \quad (M^2)^\mu{}_\mu = -M^{\mu\nu} M_{\mu\nu} = 2\,(\vec{K}^2 - \vec{J}^2)\,, \quad (M^n)^\mu{}_\mu\,, (n > 2)$$

zutrifft, oder sich auf Funktionen von W^2 und P^2 reduzieren).

Bedeutung von W^μ: da mit allen P^ν kommutierend, betrachte Wirkung von W^μ auf *Unterraum zu festen Eigenwerten* $p = \{p^\mu\}$ *der Viererimpulse* P^μ:

$$P^\mu\,|p, \ldots\rangle = p^\mu\,|p, \ldots\rangle\,; \qquad (\mu = 1, 2, 3) \tag{2.9}$$

(... $\widehat{=}$ weitere, noch zu spezifizierende Quantenzahlen) und darauf Wirkung derjenigen $\Lambda = \overline{\Lambda}$, die p invariant lassen:

$$\overline{\Lambda} \in \mathcal{L}_+^\uparrow\ : \qquad \overline{\Lambda}^\mu{}_\nu\, p^\nu = p^\mu \tag{2.10}$$

Bilden die sog. *kleine Gruppe von* p, Untergruppe von $\mathcal{L}_+^\uparrow$. Infinitesimal:

$$\overline{\Lambda}^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu - \overline{\omega}^\mu{}_\nu + 0\,(\omega^2)\,, \qquad \overline{\omega}_{\nu\mu} = -\overline{\omega}_{\mu\nu} \tag{2.11}$$

$$\Rightarrow \qquad \overline{\omega}^\mu{}_\nu\, p^\nu = 0$$

Allgemeine in (μ, ν) antisymmetrische Lösung

$$\overline{\omega}_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, n^\rho\, p^\sigma \tag{2.12}$$

$$n^\rho := \text{ beliebiger Vierervektor mit Massendimsion } [n^\rho] = -1 \tag{2.13}$$

Damit Darstellung T der infinitesimalen $\overline{\Lambda}$:

$$T\,(\overline{\Lambda}, 0) = 1\!\!1_d - \frac{i}{2}\,\overline{\omega}_{\mu\nu}\, M^{\mu\nu} = 1\!\!1_d - i\, n_\rho \left[\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\rho\mu\nu\sigma}\, M_{\mu\nu}\, P_\sigma\right]_{P\to p}\,, \tag{2.14}$$

d. h. W^μ = *Generatoren der kleinen Gruppe*:

$$\boxed{T\,(\overline{\Lambda},\,0)\,|p,\,\ldots\rangle \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n_\mu\,W^\mu}\,|p,\,\ldots\rangle}\;. \tag{2.15}$$

(4 Parameter n_μ reduzieren sich effektiv auf 3, da in (2.12) nur der zu p transversale Anteil, ${n_\perp}^\rho \;=\; (\eta^\rho{}_\sigma - \frac{p^\rho\,p_\sigma}{p^2})\,n^\sigma$, beiträgt. Alternative Betrachtung: nach (2.4) $p_\mu\,W^\mu \;=\; 0$ bei Wirkung auf p-Unterraum, d. h. 3 von den W^μ linear unabhängig).

Genaue Struktur der kleinen Gruppen verschieden für Fälle $p^2 \;>\; 0$ (Abschnitt 4) und $p^2 \;=\; 0$ (Abschnitt 5). Für ersteren Fall:

Eigenwerte von W^2 *bei* $p^2 \;>\; 0$: sei

$$\boxed{P^2\,|p,\,\ldots\rangle \;=\; m^2\,|p,\,\ldots\rangle\;, \quad m^2 \;\equiv\; p^\mu\,p_\mu \;>\; 0,\, m \;>\; 0}\;. \tag{2.16}$$

Da W^2 Casimir-Operator, können seine Eigenwerte durch Anwendung auf besonders einfache Zustands-Prototypen ermittelt werden; gelten dann für einen ganzen irreduziblen Darstellungsraum.

Für $m^2 \;>\; 0$ Prototyp *„Ruhesystem"-Zustand* mit

$$\vec{p} \;=\; \vec{0}\;, \quad \text{d. h.} \quad \{p^\mu\} \;=\; \{p_\nu\} \;=\; \{m,\,0,\,0,\,0\} \tag{2.17}$$

Jedes $|p,\,\ldots\rangle$ im Unterraum (2.16) kann durch geeigneten Boost $(L_{\vec{p}})^{-1}$ aus $\mathcal{L}_+^\uparrow$ (genaue Gestalt von $L_{\vec{p}}$ siehe (4.8) unten) auf diese Form transformiert werden. Dort nach (1.55)

$$W^\mu \;\rightarrow\; \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\kappa\lambda 0}\,M_{\kappa\lambda}\,m \;=\; \begin{cases} 0 & (\mu \;=\; 0) \\ \\ m\,J^n & (\mu \;=\; n \;=\; 1,\,2,\,3) \end{cases} \;; \tag{2.18}$$

$$T\,(\overline{\Lambda},\,0) \;\rightarrow\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\vec{\alpha}\cdot\vec{S}} \quad \text{mit} \quad \vec{\alpha} \;=\; -m\vec{n} \tag{2.19}$$

und

$$\vec{S} \;=\; \frac{1}{m}\,\vec{W}\,|_{\vec{p}=0} \;=\; \vec{J}\,|_{\vec{p}=0}\;; \tag{2.20}$$

$$W^2 \;=\; (W^0)^2 \,-\, \vec{W}^2 \;\rightarrow\; -m^2\,\vec{S}^{\,2}\;. \tag{2.21}$$

Drehimpuls im Ruhesystem $\vec{S}$ = „Spin". Da S^n drehimpulsartige VR erfüllen, sind Eigenwerte von $\vec{S}^2$ bekannt; damit

$$\boxed{W^2\,|p,\,\ldots\rangle \,=\, -m^2\,s\,(s\,+\,1)\;; \qquad s\,=\,0,\,\frac{1}{2},\,1,\,\frac{3}{2},\,2,\,\ldots} \tag{2.22}$$

$\Rightarrow$ Irreduz. $\mathcal{P}_+^\uparrow$-Darstellungsraum charakterisiert durch Eigenwertpaar

$$\{m^2,\,s\,(s\,+\,1)\} \tag{2.23}$$

von Massen- und Spinquadrat (sowie, genau genommen, durch sgn p^0 = sgn m, wobei physikalisch nur sgn $m > 0$ auftretend!).

Beachte: Masse und Spin in nichtrelativist. Hamiltonoperator nur als Parameter auftretend, in relativist. Theorie jedoch als Eigenwerte selbstadj. Operatoren zu geeigneten Observablen definierbar.

3 Darstellungen der homogenen Lorentz-Gruppe

Umrechnung der $\mathcal{L}_+^\uparrow$-Lie-Algebra (1.62 - 1.64) auf Operatoren

$$\vec{A} := \frac{1}{2}(\vec{J} + i\vec{K}), \qquad \vec{B} := \frac{1}{2}(\vec{J} - i\vec{K}) \tag{3.1}$$

(Nichthermitisch in ($d = \infty$)-Darstellungen, wo $\vec{J}$ und $\vec{K}$ hermitisch):

$$[A^k, A^l] = i\,\varepsilon^{klm} A^m, \qquad [B^k, B^l] = i\,\varepsilon^{klm} B^m, \tag{3.2}$$

$$\boxed{[A^k, B^l] = 0}\,. \tag{3.3}$$

$\Rightarrow$ Lie-Algebra von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ = direkte Summe zweier $SU(2)$-Lie-Algebren. $\Rightarrow$ $\mathcal{L}_+^\uparrow$ lokal isomorph zu einem direkten Produkt $SU(2) \otimes SU(2)$, jedoch fortgesetzt zu komplexen und unbeschränkten Drehparametern:

$$\frac{1}{2}\omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = (\vec{\varphi} - i\vec{\lambda}) \cdot \vec{A} + (\vec{\varphi} + i\vec{\lambda}) \cdot \vec{B}\,. \tag{3.4}$$

Endlichdimensionale irreduzible Darstellungen: zu erhalten als direkte Produkte zweier irreduzibler $SU(2)$-Darstellungen $D^{(j)}$ (siehe Quantenmechanik):

$$\boxed{D^{(j_1,j_2)}_{(m_1,m_2),(n_1,n_2)}(\omega) = D^{(j_1)}_{m_1 n_1}(\vec{\varphi} - i\vec{\lambda})\, D^{(j_2)}_{m_2 n_2}(\vec{\varphi} + i\vec{\lambda})}\,. \tag{3.5}$$

Dimension:

$$d(j_1, j_2) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \tag{3.6}$$

Nichtunitär, da $\vec{A}$, $\vec{B}$ nun durch *hermitische* $SU(2)$-Generatoren dargestellt, aber Drehvektoren komplex!

(Unter reinen Raumdrehungen ($\vec{\lambda} = 0$) ist diese Darstellung, wie beim Studium der Drehgruppe gezeigt, reduzible Produktdarstellung, ausreduzierbar in $D^{j_1+j_2}(\vec{\varphi}) \oplus \ldots \oplus D^{|j_1-j_2|}(\vec{\varphi})$. Für $\vec{\lambda} \neq 0$ irreduzibel).

2 verschiedene Fundamentaldarstellungen:

$(j_1,\, j_2) \,=\, (\frac{1}{2},\, 0)$ und $(0,\, \frac{1}{2})$ mit $D^{(0)} \,=\, 1$ und

$$\begin{aligned} D^{(1/2)}(\vec{\zeta}) &= \mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\vec{\zeta}\cdot\vec{\sigma}} \;, \quad \vec{\zeta} \in \mathcal{C}^3 \;, \quad \vec{\sigma} \,=\, \text{Pauli-Matrizen} \\ &= \text{allgemeinste komplexe } 2 \times 2\text{-Matrix} \\ &\quad\ \text{mit } \det \,=\, 1 \,(\text{da } \operatorname{tr}\vec{\sigma} \,=\, 0) \\ &= \text{Element der Gruppe } SL\,(2,\, C) \end{aligned} \tag{3.7}$$

a) Darstellung $(j_1,\, j_2) \,=\, (\frac{1}{2},\, 0)$*: linkshändige Weyl-Spinor-Darstellung*:

$$\begin{aligned} &\vec{A} \,=\, \frac{1}{2}\,\vec{\sigma} \;, \qquad \vec{B} \,=\, 0 \;, \text{ d. h.} \\ &\vec{J} \,=\, \frac{1}{2}\,\vec{\sigma} \;, \qquad \vec{K} \,=\, -\frac{i}{2}\,\vec{\sigma} \qquad (\text{beachte Nichthermitizität!}) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Darstellungsraum = Raum der komplexen Zweierspalten (Weyl-Spinoren 1. Art oder linkshändige Weyl-Spinoren)

$$\chi \,=\, \chi_\alpha \,=\, \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

mit *Transformations-Matrix* $\in\, SL\,(2,\, C)$ *(2-dimensional komplex mit* $\det \,=\, +1$):

$$\begin{aligned} \chi'_\alpha \,=\, (S_1\,(\omega))_\alpha^{\ \beta}\,\chi_\beta \;, \quad (S_1\,(\omega))_\alpha^{\ \beta} &\,\widehat{=}\, D^{(1/2)}\,(\vec{\varphi} \,-\, i\,\vec{\lambda}) \\ &= \mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\,\vec{\varphi}\,-\,\vec{\lambda})\,\cdot\,(1/2)\vec{\sigma}} \,\in\, SL\,(2,\, C) \end{aligned} \tag{3.10}$$

Einziger invarianter Tensor, der eine Metrik definiert, ist

$$\varepsilon \,=\, (\varepsilon_{\alpha\beta}) \,=\, \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (=\, i\,\sigma^2) \tag{3.11}$$

$$\varepsilon^{-1} \,=\, (\varepsilon^{\alpha\beta}) \,=\, -\varepsilon \;, \qquad \varepsilon^{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\beta\gamma} \,=\, \delta^\alpha_{\ \gamma} \tag{3.12}$$

Metrik:

$$(\psi,\, \chi) \,:=\, \psi^\alpha\,\chi_\alpha \,=\, \varepsilon^{\alpha\beta}\,\psi_\beta\,\chi_\alpha \,=\, \psi_1\,\chi_2 \,-\, \psi_2\,\chi_1 \tag{3.13}$$

$(=\, -\psi_\alpha\,\chi^\alpha!)$

b) Darstellung $(j_1,\, j_2) = (0,\, 1/2)$*: rechtshändige Weyl-Spinor-Darstellung*:

$$\vec{A} = 0\ , \qquad \vec{B} = \frac{1}{2}\,\vec{\sigma}\ , \quad \text{d. h.}$$
$$\vec{J} = \frac{1}{2}\,\vec{\sigma}\ , \qquad \vec{K} = +\frac{i}{2}\,\vec{\sigma} = \left(-\frac{i}{2}\,\vec{\sigma}\right)^{\dagger} \tag{3.14}$$

Darstellungsraum = Raum der rechtshändigen oder Weyl-Spinoren 2. Art

$$\overline{\eta} = (\overline{\eta}^{\dot{\alpha}}) = \begin{pmatrix} \overline{\eta}^{\dot{1}} \\ \overline{\eta}^{\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad \text{(„gepunktete“ Indizes bzw. Spinoren)} \tag{3.15}$$

mit Transformations-Matrix (ebenfalls $SL\,(2,\,C)$-Element):

$$\overline{\eta}'^{\dot{\alpha}} = (S_2\,(\omega))^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\,\overline{\eta}^{\dot{\beta}}\ , \qquad (S_2\,(\omega))^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \mathrel{\widehat{=}} D^{(1/2)}\,(\vec{\varphi} + i\,\vec{\lambda})$$
$$= \mathrm{e}^{(-\mathrm{i}\,\vec{\varphi} + \vec{\lambda})\,\cdot\,(1/2)\,\vec{\sigma}} \tag{3.16}$$

Einziger Metrik definierender invarianter Tensor ist

$$\overline{\varepsilon} = (\overline{\varepsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (= -\mathrm{i}\,\sigma^2) \tag{3.17}$$

$$\overline{\varepsilon}^{-1} = (\overline{\varepsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = -\overline{\varepsilon}\ , \qquad \overline{\varepsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,\overline{\varepsilon}^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} \tag{3.18}$$

Metrik:

$$(\overline{\vartheta},\, \overline{\eta}\,) = \overline{\vartheta}_{\dot{\alpha}}\,\overline{\eta}^{\dot{\alpha}} = \overline{\varepsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,\overline{\vartheta}^{\dot{\beta}}\,\overline{\eta}^{\dot{\alpha}} = -\overline{\vartheta}^{\dot{1}}\,\overline{\eta}^{\dot{2}} + \overline{\vartheta}^{\dot{2}}\,\overline{\eta}^{\dot{1}}$$
$$(\,= -\overline{\vartheta}^{\dot{\alpha}}\,\overline{\eta}_{\dot{\alpha}}\ !) \tag{3.19}$$

Wegen

$$\overline{\varepsilon}^{-1}\,\vec{\sigma}\,\overline{\varepsilon} = -\vec{\sigma}^{\,*} \tag{3.20}$$

ist

$$\overline{\varepsilon}^{-1}\,S_2\,(\omega)\,\overline{\varepsilon} = (S_1\,(\omega))^* \tag{3.21}$$

d. h. $(\chi_\alpha)^*$ transformiert sich ebenso wie $(\overline{\varepsilon}^{-1}\,\overline{\eta})_{\dot{\alpha}} = \overline{\varepsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,\overline{\eta}^{\dot{\beta}}$, nämlich mit der Matrix $(S_1\,(\omega))^*$. Daher Beziehung zwischen ungepunkteten und gepunkteten Komponenten desselben Spinors zu definieren als

$$\boxed{(\chi_\alpha)^* = \chi_{\dot{\alpha}}}\ . \tag{3.22}$$

Da Komplexkonjugation nicht durch Ähnlichkeitstransformation erreichbar (außer bei unitären S, d. h. der Untergruppe $SU(2)$ mit $\vec{\lambda} = 0$), sind beide *Fundamentaldarstellungen inäquivalent.*

Darstellung der Paritätsoperation (d. h. von $\mathcal{L}^{\uparrow}$)

Unter Raumspiegelung $P \to T(P)$ $\vec{K}$ Vektor, aber $\vec{J}$ Pseudovektor:

$$T(P)\,\vec{J}\,T(P)^{-1} = \vec{J}\,, \qquad T(P)\,\vec{K}\,T(P)^{-1} = -\vec{K} \tag{3.23}$$

Daher

$$T(P) \left\{ \begin{array}{c} \vec{A} \\ \vec{B} \end{array} \right\} T(P)^{-1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{B} \\ \vec{A} \end{array} \right\} \tag{3.24}$$

$$\boxed{T(P)\,D^{(j_1,j_2)}(\vec{\varphi},\,\vec{\lambda})\,T(P)^{-1} = D^{(j_2,j_1)}(\vec{\varphi},\,-\vec{\lambda})} \tag{3.25}$$

D. h. $D^{(j_1,j_2)}$ im allgemeinen keine Darstellung der Paritätsoperation!

2 Möglichkeiten, um P darzustellen:

(i) Wahl einer Darstellung mit $j_1 = j_2 = j$, $\dim = (2j+1)^2$. Beispiel: Darstellung $D^{(1/2),(1/2)}$ auf Spinoren der Stufe (1, 1) mit 1 ungepunkteten und 1 gepunkteten Index, $\chi_{\alpha\dot{\beta}}$, also 4 Komponenten; diese äquivalent zur Vektordarstellung $(\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$, d. h. zur klassischen $SO(3,1)$, gemäß $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,x^{\nu}$; dort P dargestellt durch $\mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1)$.

(ii) Verdopplung der Komponentenzahl und Übergang zu der (unter $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$ reduziblen) *direkten Summe* $D^{(j_1,j_2)} \oplus D^{(j_2,j_1)}$ mit $\dim = 2 \times (2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$. Dort $T(P)$ dargestellt durch die Matrix mit 2 außerdiagonalen Einheitsblöcken.

Wichtigstes Beispiel: Darstellung $D^{\mathrm{Dirac}} = D^{(1/2,0)} \otimes D^{(0,1/2)}$ auf vierdimensionalem Raum der *Dirac- oder Viererspinoren*

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \overline{\eta}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{c} \alpha = 1,\,2 \\ \dot{\alpha} = \dot{1},\,\dot{2} \end{array}; \qquad P \to \begin{pmatrix} 0 & 1\!\!1_2 \\ 1\!\!1_2 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Grassmannwertige Spinoren

Skalarprodukte $(\psi,\,\chi)$ und $(\overline{\vartheta},\,\overline{\eta})$ in beiden Weyl-Darstellungen antisymmetrisch gegen Faktorenvertauschung, d. h. $(\chi,\,\chi) = 0$ und $(\overline{\eta},\,\overline{\eta}) = 0$, wenn Spinorkomponenten gewöhnlich reelle oder komplexe Zahlen.

$\Rightarrow$ *Lorentzinvariante Dichten* $\not\equiv 0$ *für Weyl-Spinoren nur definierbar, wenn Spinorkomponenten „antikommutierende Zahlen"*, genauer:

$$\psi_\beta\,\chi_\alpha \;=\; -\chi_\alpha\,\psi_\beta\;; \qquad \overline{\vartheta}^{\dot\beta}\,\overline{\eta}^{\dot\alpha} \;=\; -\overline{\eta}^{\dot\alpha}\,\overline{\vartheta}^{\dot\beta} \tag{3.28}$$

Dann und nur dann

$$(\psi,\,\chi) \;=\; (\chi,\,\psi)\;; \qquad (\overline{\vartheta},\,\overline{\eta}) \;=\; (\overline{\eta},\,\overline{\vartheta}) \tag{3.29}$$

$$(\chi,\,\chi) \;=\; 2\,\chi_1\,\chi_2 \;\not\equiv\; 0\;; \qquad (\overline{\eta},\,\overline{\eta}) \;=\; 2\,\overline{\eta}^{\dot 2}\,\overline{\eta}^{\dot 1} \;\not\equiv\; 0 \tag{3.30}$$

Tieferer Grund für *Notwendigkeit antikommutierender Operatoren für Fermionenfelder* in der Quantenfeldtheorie.

4 Darstellungen von $\mathcal{P}$: Fall $m > 0$

„Kanonische Basis“ von Zustandsvektoren: gemeinsame Eigenzustände von P^2, W^2, P^μ, W^3 mit

$$P^2\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle \;=\; m^2\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle\;; \qquad m \text{ reell } > 0\;; \tag{4.1}$$

$$W^2\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle \;=\; -m^2\,s\,(s+1)\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle\;; \tag{4.2}$$

$$\vec{P}\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle \;=\; \vec{p}\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle\;; \tag{4.3}$$

$$W'^3\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle \;=\; m\,s_3\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle\;; \qquad s_3 \;=\; -s\,\ldots\,+s \tag{4.4}$$

und als Folgerung

$$P^0\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle \;=\; p^0\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle\;; \qquad p^0 \;=\; \varepsilon_p \;=\; \sqrt{m^2+\vec{p}^{\,2}} \;>\; 0 \tag{4.5}$$

(Beschränkung auf $m > 0$ reell entspricht zusätzlicher Angabe von sgn $p^0 = +$).

(Normierung der kanonischen Basis auf Deltafunktion: konventionell

$$\langle m,\,s;\,\vec{p},\,s_3'|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle \;=\; 2\,\varepsilon_p\,\delta^3\,(\vec{p}^{\,\prime} - \vec{p})\,\delta_{s_3'\,s_3})\;. \tag{4.6}$$

Zur W'^3-Eigenwertgleichung: bisher gezeigt

$$S^3\,|m,\,s;\,\vec{p}=\vec{0},\,s_3\rangle \;=\; s_3\,|m,\,s;\,\vec{p}=\vec{0},\,s_3\rangle\;, \qquad S^3 \;=\; \frac{1}{m}\,W^3|_{\vec{p}=0} \tag{4.7}$$

Es sei

$$\begin{aligned} L_p \;&:=\; \text{Lorentz-Transformation } \Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow \text{ (Boost)}\;, \\ &\text{die } \{m,\,0,\,0,\,0\} \to \{\varepsilon_p,\,\vec{p}\} \;=\; \{p^\mu\}_{p^2=m^2} \text{ abbildet}\;. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Explizite Form:

$$(L_p)^\kappa{}_\lambda \;=\; \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon_p\,/\,m & p_l\,/\,m \\ \hline -\dfrac{p^k}{m} & \delta^k{}_l \;-\; \dfrac{p^k\,p_l}{m\,(m+\varepsilon_p)} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{|l} \mu \;=\; 0 \\ \hline \mu \;=\; \left\{\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right. \end{array} \tag{4.9}$$

(beachte $p_l = -p^l$).

Umgekehrt bildet $(L_p)^{-1} = L_{\{\varepsilon_p, -\vec{p}\}}$ ab:

$$\{\varepsilon_p, \vec{p}\} \to \{m, \vec{0}\} . \tag{4.10}$$

Dementsprechend in Darstellung $T(\Lambda, a = 0) = T(\Lambda)$:

$$|m, s; \vec{p}, \ldots\rangle = T(L_{\vec{p}})\,|m, s; \vec{0}, \ldots\rangle \tag{4.11}$$

$$W'^3\,|m, s; \vec{p}, s_3\rangle := \underbrace{[T(L_{\vec{p}})\,W^3\,T(L_p^{-1})]}_{W'^3}\,|m, s; \vec{p}, s_3\rangle \tag{4.12}$$

$$= T(L_{\vec{p}})\,(m\,s_3 \cdot |m, s; \vec{0}, s_3\rangle) = m\,s_3 \cdot |m, s; \vec{p}, s_3\rangle \tag{4.13}$$

(D. h. $m\,S^3$-Eigenwert im Ruhesystem = W^3-Eigenwert im mit $\vec{p}/m$ bewegten System). Transformiertes W'^μ berechnet sich zu

$$W'^\mu := T(L_p)\,W^\mu\,T(L_p^{-1}) = (L_p^{-1})^\mu{}_\nu\,W^\nu \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} W'^0 &= \frac{1}{m}\,(W^0\,\varepsilon_p - \vec{W} \cdot \vec{p}) && (4.15)\\ &= \frac{1}{m}\,(W^\mu\,P_\mu) \text{ in Anwendung auf Unterraum } |m; \vec{p}\rangle \\ &= 0 \text{ nach (2.4)} \\ W'^k &= -W^0\,\frac{1}{m}\,p^k + W^k + \frac{(W^n\,p^n)}{m + \varepsilon_p}\,\frac{1}{m}\,p^k && (4.16)\\ &= \text{(mit vorigem) } W^k - W^0\,\frac{p^k}{m + \varepsilon_p} \text{ auf Unterraum } |m; \vec{p}\rangle . \end{aligned}$$

Hiermit Vertauschungsrelationen verifizierbar: auf Unterraum $|m; \vec{p}\rangle$

$$\left[\frac{1}{m}\,W'^k, \frac{1}{m}\,W'^l\right] = i\,\varepsilon^{kln}\left(\frac{1}{m}\,W'^n\right) . \tag{4.17}$$

Transformation der kanonischen Basis ($\mathcal{P}$-Darstellung)

Translationen (trivial, da P^μ diagonal):

$$T\,(\mathbb{1},\,a)\,|m;\,\vec{p}\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a_\mu P^\mu}\,|m;\,\vec{p}\rangle \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a_\mu p^\mu}\,|m;\,\vec{p}\rangle \\ = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(a_0\,\varepsilon_p\,-\,\vec{a}\cdot\vec{p}}|m;\,\vec{p}\rangle \tag{4.18}$$

Beispiel dafür, dass Darstellungen einer abelschen Gruppe in lauter eindimensionale (hier: Multiplikation mit Phasenfaktoren, da T unitär) zerfallen.

Homogene Lorentz-Transformation Λ:

$$\begin{aligned} T\,(\Lambda)\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle &= T\,(\Lambda)\;T\,(L_p)\,|m,\,s;\vec{0},\,s_3\rangle \\ &= T\,(L_{\Lambda p})\;T\,(L^{-1}_{\Lambda p})\,T\,(\Lambda\,L_p)\,|m,\,s;\,\vec{0},\,s_3\rangle \\ &= T\,(L_{\Lambda p})\,T\,(L^{-1}_{\Lambda p}\,\cdot\,\Lambda\,\cdot\,L_p)\,|m,\,s;\,\vec{0},\,s_3\rangle \end{aligned} \tag{4.19}$$

Lorentz-Transformation

$$\boxed{R\,(\Lambda\,p,\,p)\;:=\;L^{-1}_{\Lambda p}\,\Lambda\,L_p} \tag{4.20}$$

wirkt auf Ruhesystem-Impulsvektor gemäß

$$\{m,\,\vec{0}\}\;\to\;\{p^\mu\}_{p^2=m^2}\;\to\;\{(\Lambda\,p)^\mu\}_{(\Lambda p)^2=m^2}\;\to\;\{m,\,0\}\;,$$

d. h. $R^0{}_0\;=\;1$, d. h. $R\;=$ reine Raumdrehung:

$$\boxed{R\,(\Lambda\,p,\,p)\;\in\;SO\,(3)\;:\;\text{„Wigner-Drehung“}} \tag{4.21}$$

Damit

$$T\,(R\,(\Lambda\,p,\,p))\,|m,\,s;\,\vec{0},\,s_3\rangle\;=\;\sum_{s_3'\,=\,-s}^{+s} D^{(s)}_{s_3' s_3}\;(R\,(\Lambda\,p,\,p))\,|m,\,s;\,\vec{0},\,s_3'\rangle \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned} D^{(s)}\,(R) &= (2\,s\,+\,1)\text{-dimen. irreduzible Matrixdarstellung der Drehung } R \\ &= \langle s,\,s_3'\,|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\vec{\varphi}\,\cdot\,\vec{J}}|s,\,s_3\rangle \qquad \text{für} \qquad R\;=\;R\,(\vec{\varphi}\,) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Endresultat:

$$\boxed{T\,(\Lambda)\,|m,\,s;\,\vec{p},\,s_3\rangle\;=\;\sum_{s_3'} D^{(s)}_{s_3' s_3}\;(R\,(\Lambda\,p,\,p))\,|m,\,s;\,(\vec{\Lambda p}),\,s_3'\rangle} \tag{4.24}$$

Wirkung der homogenen Lorentz-Transformation Λ also nicht nur auf $\vec{p}$ bzw. p^μ, sondern darüber hinaus *Spindrehung* umfassend!

Wigner-Drehung im allgemeinen kompliziert. Für $\Lambda = L$ (Boost) Grenzfälle:

– nichtrelativistischer Limes: $|\vec{p}|$ und $|(\vec{\Lambda p})| \ll m$

$$\Rightarrow \qquad R \approx 1\!\!1_{3\times 3} \qquad \text{(keine Spindrehung)} \tag{4.25}$$

– hochrelativistischer Limes: $|\vec{p}|$ und $|(\vec{\Lambda p})| \gg m$

$$\Rightarrow \qquad R^k{}_l \, \frac{p^l}{\varepsilon_p} \approx \frac{p'^k}{\varepsilon_{p'}} \, , \tag{4.26}$$

d. h. Spindrehung = Drehung des Geschwindigkeitsvektors (in diesem Grenzfall Spin parallel Impuls ausgerichtet).

5 Darstellungen von $\mathcal{P}$: Fall $m = 0$

Für masseloses System: $\vec{p}^{\,2} = 0$, d. h. Viererimpuls $\overline{p}$ „lichtartig"; dann o. B. d. A.

$$\{\overline{p}^{\sigma}\} = \{p,\, 0,\, 0,\, p\} \;; \quad \{\overline{p}_{\sigma}\} = \{p,\, 0,\, 0,\, -p\} \tag{5.1}$$

$$W^{\mu}|_{\overline{p}} \quad \rightarrow \quad \frac{p}{2}\,[\varepsilon^{\mu\kappa\lambda 0} - \varepsilon^{\mu\kappa\lambda 3}]\, M_{\kappa\lambda} \tag{5.2}$$

$$W^{0}|_{\overline{p}} \quad \rightarrow \quad -p\, M_{12} = -p\, M^{12} = +p\, J^{3} \tag{5.3}$$

$$W^{1}|_{\overline{p}} \quad \rightarrow \quad p\,(\underbrace{M_{20}}_{+K^2}\, \underbrace{-\, M_{23}}_{+J^1})\,, \quad W^{2}|_{\overline{p}} \quad \rightarrow \quad p\,(\underbrace{-M_{01}}_{-K^1}\, \underbrace{-\, M_{31}}_{+J^2}) \tag{5.4}$$

$$W^{3}|_{\overline{p}} \quad \rightarrow \quad -p\, M_{12} = +p\, J^{3} \tag{5.5}$$

Man prüft nach:

$$W^{\mu}\, P_{\mu}|_{\overline{p}} = p\,(W^0 - W^3)|_{\overline{p}} = p^2\,(J^3 - J^3) = 0\;.$$

Insgesamt:

$$\begin{aligned} n_{\mu}\, W^{\mu}|_{\overline{p}} &= (pn^0)\, J^3 - (pn^1)\,(J^1 + K^2) - (pn^2)\,(J^2 - K^1) - (pn^3)\, J^3 \\ &= (pn^0\, \vec{e}_3) \cdot \vec{J} - (p\vec{n}\,) \cdot (\vec{J} - \vec{e}_3 \times \vec{K}) \\ &= [p\,(n^0\, \vec{e}_3 - \vec{n}\,)] \cdot \vec{J} + [p\,(\vec{n} \times \vec{e}_3)] \cdot \vec{K} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Als Vertauschungsrelation der W^{μ} auf $\overline{p}$-Unterraum berechnet man

$$\begin{aligned} [W^1,\, W^2]|_{\overline{p}} &= p^2\,[J^1 + K^2\,,\, J^2 - K^1] \\ &= p^2\,([\underbrace{J^1,\, J^2}_{i\,J^3}] + [\underbrace{K^1,\, K^2}_{-i\,J^3}]) = 0\,, \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$[W^2,\, W^3]|_{\overline{p}} = p^2\,[J^2 - K^1,\, J^3] = i\,p^2\,(J^1 + K^2) = i\,p\,W^1|_{\overline{p}} \tag{5.8 a}$$

$$[W^3,\, W^1]|_{\overline{p}} \,=\, p^2\,[J^3,\, J^1 \,+\, K^2] \,=\, i\,p^2\,(J^2 \,-\, K^1) \,=\, i\,p\,W^2|_{\overline{p}} \tag{5.8 b}$$

D. h.: *auf masselosem ($\overline{p}^2 \,=\, 0$) Darstellungsraum sind VR von W^μ* (wobei $W^0 \,=\, W^3$) *die der zweidimensionalen euklidischen Gruppe $E\,(2)$*, mit W^1, W^2 als kommutierenden „Translationsgeneratoren" und $W^3 \,\propto\, J^3$ als Generator der Drehungen, in Ebene senkrecht zu $\vec{p}$.

Derselbe Schluss auch direkt aus allgemeinen VR registriert auf $\vec{p}$:

$$[W^\mu,\, W^\nu]|_{\overline{p}=\{p,0,0,p\}} \,=\, i\,p\,(\varepsilon^{\mu\nu\rho 0} \,-\, \varepsilon^{\mu\nu\rho 3})\,W_\rho \;,$$

z. B.:

$$[W^1,\, W^2]|_{\ldots} \,=\, -i\,p\,\varepsilon^{0123}\,(W_0 \,+\, \underbrace{W_3}_{=-W^3}\,) \,=\, 0 \;, \tag{5.9}$$

usw. Konsequenz: $(W^1)^2 \,+\, (W^2)^2|_{\overline{p}}$ kann (wie $(P^1)^2 \,+\, (P^2)^2$ in der $E\,(2)$) beliebige positive Eigenwerte haben

$$\vec{W}^{\,2}|_{\overline{p}} \text{ ist „nicht quantisiert" (kein diskretes Spektrum)} \tag{5.10}$$

Da Zustände mit kontinuierlicher Spinbetragsquantenzahl in der Natur nicht beobachtet, *Beschränkung der physikalischen Zustände auf Nullraum von $W^{1,2}$*:

$$W^1\,|\overline{p},\,\ldots\rangle \,=\, 0 \;,\quad W^2\,|\overline{p},\,\ldots\rangle \,=\, 0 \;,\quad \text{wenn} \quad \overline{p} \,=\, \{p,\,0,\,0,\,p\} \tag{5.11}$$

(Allgemeiner: $(\hat{\vec{p}} \,\times\, \vec{W})\,|\overline{p},\,\ldots\rangle \,=\, 0$, wenn $\overline{p} \,=\, \{|\vec{p}\,|,\, |\vec{p}\,| \,\cdot\, \hat{\vec{p}}\}$).

Dann insgesamt

$$W^\mu\,|\overline{p},\,\ldots\rangle \,=\, \begin{pmatrix} p\,J^3 \\ 0 \\ 0 \\ p\,J^3 \end{pmatrix} |\overline{p},\,\ldots\rangle \,=\, J^3 \,\cdot\, \overline{p}^{\,\mu}\,|\overline{p},\,\ldots\rangle \tag{5.12}$$

$$= \left(\frac{\vec{p} \,\cdot\, \vec{J}}{|\vec{p}\,|}\right) P^\mu\,|\overline{p},\,\ldots\rangle \tag{5.13}$$

für $\overline{p}^{\,\mu} \,=\, \{p,\,0,\,0,\,p\}$, $\overline{p}^{\,2} \,=\, 0$.

„Helizitätsoperator“ (Spinkomponente in Impulsrichtung)

$$h := \hat{p} \cdot \vec{J} \tag{5.14}$$

Damit allgemein $W^\mu \, |\overline{p}, \ldots\rangle_{\overline{p}^2=0} = \overline{p}^\mu \, h \, |\overline{p}, \ldots\rangle_{\overline{p}^2=0}$; wählt man Zustand zusätzlich als Eigenzustand dieser Spinkomponente,

$$h \, |\overline{p}, \lambda\rangle_{\overline{p}^2=0} = \lambda \, |\overline{p}, \lambda\rangle_{\overline{p}^2=0} \; , \tag{5.15}$$

dann für physikalische Zustände

$$\boxed{W^\mu \, |\overline{p}, \lambda\rangle = \lambda \, \overline{p}^\mu \, |\overline{p}, \lambda\rangle \; , \quad \text{wenn} \quad \overline{p}^2 = 0} \tag{5.16}$$

Da alle 4 W^μ diagonal, gibt es keine Verschiebeoperatoren mehr, die λ ändern, ohne den Eigenraum zu $\vec{p}$ zu verlassen, d. h. *irreduzible Darstellung hat einen einzigen Helizitätswert* λ. *)

Darstellung der Parität bei $P^2 = 0$:

Da h Pseudoskalar, $T\,(P)\, h\, T\,(P)^{-1} = -h$, ist

$$T\,(P)\, |\overline{p}, \lambda\rangle_{\overline{p}^2=0} \propto |\overline{p}, -\lambda\rangle_{\overline{p}^2=0} \; , \tag{5.17}$$

eine *andere* irreduzible Darstellung. Existiert sie als physikalischer Zustand, dann auf direkter Summe $(\lambda) \oplus (-\lambda)$ Parität darstellbar, wenn nicht, ist ein Drehsinn in der Natur ausgezeichnet („die Parität gebrochen“).

*) Da beide Seiten von (5.16) wie Vierervektor transformieren, ist h und damit λ nicht nur Drehungs-, sondern auch Lorentzinvariante.