WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER
Institut für theoretische Physik

Seminarvortrag über

„Gruppe SU(3) und Quarkmodell“

von
Babak Alikhani

am
15.12.04

Inhaltverzeichnis

1. Die Gruppen U(n) und SU(n)

U eine unitäre quadratische n×n-Matrix, d.h.

$$U^+ U = I,\ U^{-1} = U^+,\ |\det U|^2 = 1 \qquad (1)$$

Die Matrix U lässt sich durch eine invertierbare Matrix S diagonalisieren, also $U' = SUS^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.
(U,·) bilden eine Gruppe bzgl. Matrizenmultiplikation; diese Gruppe wird mit U(n) bezeichnet, was unitäre Gruppe in n Dimensionen andeuten soll.
H eine hermitische quadratische n×n-Matrix, d.h. $H^+ = H$; die diagonale Eigenwerte sind reell:

$$H_{ii} = H_{ii}^* \qquad \Rightarrow \qquad \text{Spur(H) reell.} \qquad (2)$$

Die Matrix U kann so geschrieben werden:

$$U = e^{iH} \qquad (3)$$

Wenn U diagonal ist, muss auch H diagonal sein. Daher gilt:

$$e^{iH} = \det\exp\begin{pmatrix} H'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H'_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H'_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} e^{H'_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{H'_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{H'_{nn}} \end{pmatrix} = e^{i(H'_{11}+H'_{11}+\cdots+H'_{11})} = e^{i(\text{Spur}H')} =$$

$$e^{i(\text{Spur}SHS^{-1})} = e^{i(\text{Spur}SS^{-1}H)} = e^{i(\text{Spur}H)} \equiv e^{i\alpha} \qquad (4)$$

$$\det U = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 0 \text{ oder } 2m\pi \qquad (5)$$

Diese einschränkten Matrizen bilden eine Gruppe, die so genannte Spezielle unitäre Gruppe in n Dimensionen SU(n). Sie hat n^2-1 Parameter und ist eine Untergruppe von U(n).

2. Die Generatoren der U(n) und SU(n)

Die Gruppe U(n) hat n^2 Parameter ϕ_j und daher auch n^2 Generatoren λ_i. Da H hermitisch sein muss kann man im Fall der U(n) n^2 unabhängige n×n-Matrizen als Generator nehmen. Es gilt also:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = i c_{ijk} \lambda_k \qquad (6)$$

Analog könne Generatoren der SU(n) irgendwelche (n^2-1) linear unabhängige hermitischen n×n-Matrizen mit Spur Null genommen werden. Letzteres ist notwendig, damit det U =1 erfüllt ist.

2.1. Generatoren der SU(2)

In diesem Fall ist n = 2, also SU(2) hat $2^2 - 1 = 3$ Generatoren, die Paulischen Spinmatrizen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

die linear unabhängigen hermitischen 2×2-Matrizen sind, die mit Einheitsmatrix den 2×2-Matrizenraum vollständig aufspannen. Die Vertauschungsbeziehungen der σ_i lauten:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2\, i\, \varepsilon_{ijk} \sigma_k \qquad (8)$$

Üblicherweise nimmt man $S_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ als Generatoren der SU(2). Die S_i beschreiben die Spins. Die Operatoren der SU(2) können mit (3) durch $U = e^{-i\phi_j S_j}$ dargestellt werden.

2.2. Generatoren der SU(3)

SU(3) hat 8 Generatoren.
Da SU(2) Untergruppe von SU(3) $\Rightarrow$ Generatoren von SU(3) aus der SU(2)-Generatoren durch Erweiterung

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_8 = \sqrt{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Vertauschungsbeziehungen

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k \tag{10}$$

fijk:: Strukturkonstante, antisymmetrisch gegen Austausch zweier benachbarter Indizes, d.h.:

$$\text{fijk} = -\text{fjik} = -\text{fikj} \qquad \text{usw.} \tag{11}$$

ijk	123	147	156	246	257	345	367	458	673
f_{ijk}	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Üblicherweise:

$$F_i = \frac{1}{2}\lambda_i \qquad \Rightarrow \qquad [F_i, F_j] = if_{ijk}F_k \tag{12}$$

Nach Gell-Mann Fi : F-Spin

Wir führen die sphärische Darstellung ein:

$$T_\pm = F_1 \pm i\,F_2, \qquad V_\pm = F_4 \pm i\,F_5, \qquad U_\pm = F6 \pm i\,F_7$$

$$T_3 = F_3, \qquad Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8 \tag{13}$$

Einige Vertauschungsbeziehungen:

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm \qquad [T_3, U_\pm] = \mp\frac{1}{2}U_\pm \qquad [T_3, V_\pm] = \pm\frac{1}{2}V_\pm$$

$$[Y, T_\pm] = 0 \qquad [Y, U_\pm] = \pm U_\pm \qquad [Y, V_\pm] = \pm V_\pm$$

$$[T_3, Y] = 0 \tag{14}$$

Y und T_3 kommutieren $\Rightarrow$ gemeinsame Eigenzustände von Y und T_3: $|T_3 Y\rangle$

$$\hat{T}_3|T_3Y\rangle = T_3|T_3Y\rangle \qquad , \qquad \hat{Y}|T_3Y\rangle = Y|T_3Y\rangle \tag{15}$$

Was passier, wenn man die Operatoren $T_\pm$, $U_\pm$ und $V_\pm$ auf den Zustand $|T_3Y\rangle$ anwendet?

$$[\hat{T}_3, \hat{V}_\pm] = \pm\frac{1}{2}\hat{V}_\pm \Rightarrow \quad (\hat{T}_3\hat{V}_\pm - \hat{V}_\pm\hat{T}_3)\,|T_3Y\rangle = \pm\frac{1}{2}\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle \Rightarrow$$

$$\hat{T}_3\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle - \hat{V}_\pm\hat{T}_3|T_3Y\rangle = \pm\frac{1}{2}\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle \Rightarrow \hat{T}_3(\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle) = \left(T_3 \pm \frac{1}{2}\right)(\hat{V}_\pm|T_3Y\rangle) \tag{16}$$

Also, analog gilt:

$\hat{V}_\pm$ erhöht bzw. erniedrigt die Quantenzahl T_3 um ½ .

$\hat{V}_\pm$ erhöht bzw. erniedrigt die Quantenzahl Y um 1.

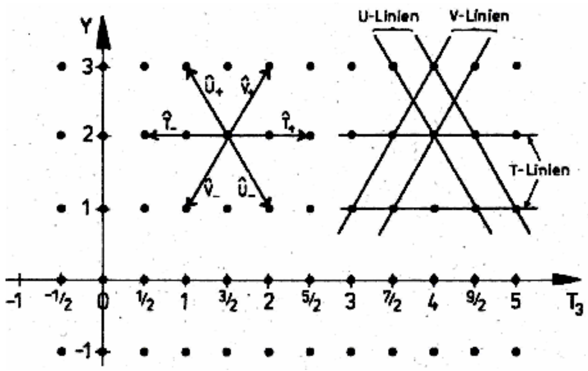
$\hat{U}_\pm$ erniedrigt bzw. erhöht die Quantenzahl T_3 um ½ .

$\hat{U}_\pm$ erhöht bzw. erniedrigt die Quantenzahl Y um 1.

$\hat{T}_\pm$ erhöht bzw. erniedrigt die Quantenzahl T_3 um 1.

$\hat{T}_\pm$ erhöht bzw. erniedrigt die Quantenzahl Y nicht.

Die ganzzahligen Einheiten der Y-Achse gegenüber der T3-Achse um den Faktor $\frac{\sqrt{3}}{2}$ gestaucht.



3. T-, U-, V- Multiplett

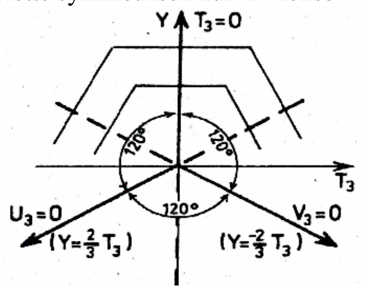
Es gilt:

$$\left[\hat{T}_+,\hat{T}_-\right]=\hat{T}_3 \quad ,$$
$$\left[\hat{U}_+,\hat{U}_-\right]=\frac{3}{2}\hat{Y}-\hat{T}_3\equiv 2\hat{U}_3 \qquad ,\left[\hat{V}_+,\hat{V}_-\right]=\frac{3}{2}\hat{Y}+\hat{T}_3\equiv 2\hat{V}_3 \tag{17}$$

Die Operatoren $\{\hat{T}_+,\hat{T}_-,\hat{T}_3\}\{\hat{U}_+,\hat{U}_-,\hat{U}_3\}\{\hat{V}_+,\hat{V}_-,\hat{V}_3\}$ erfüllen die Lie-Algebra der SU(2).
T-Spin-Algebra, U-Spin-Algebra, V-Spin-Algebra sind in sich geschlossen.
SU(3)-Multipletts setzen sich aus T-, U-, V-Multipletts zusammen. Aus SU(2)-Algebra (Drehimpuls- bzw. Isospinalgebra) folgt:

$$-T_{3,max} < T_3 < +T_{3,max} \qquad \Rightarrow \qquad \text{SU(3)-Multipletts symmetrisch zur Y-Achse}$$

T-, U-, V-Algebren gleichberechtigte Unteralgebra der SU(3) $\Rightarrow$ SU(3)-Multipletts symmetrisch auch zur $U_3 = 0$ und $V_3 = 0$ Achsen.
Die drei Symmetrieachsen schneiden sich unter 120°.
Daher der Nullpunkt ($T_3 = 0$, $Y = 0$)ist Mittelpunkt eines jeden SU(3)-Multipletts.



4. Konstruktion der SU(3)-Multipletts

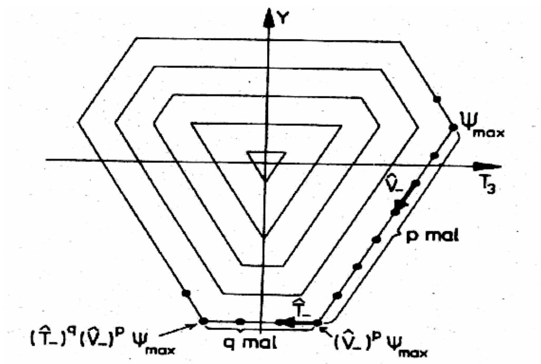
$\exists$ Zustand mit dem größten T_3-Wert $\qquad\Rightarrow\qquad \Psi_{max} = |T_{3,max}\,Y\rangle$

$$\hat{T}_+\Psi_{max} = \hat{U}_-\Psi_{max} = \hat{V}_+\Psi_{max} = 0 \tag{18}$$

Die Grenze der Multipletts durch wiederholte Anwendung von $\hat{V}_-$ auf Ψ_{max}. Das geht p mal gut und das $(p+1)$ - te Mal gibt es $\quad \left(\hat{V}_-\right)^{p+1}\Psi_{max} = 0 \quad \Rightarrow$

Zustand $\left(\hat{V}_-\right)^{p+1}\Psi_{max}$ erreicht.

$\hat{T}_-$ anwenden. $\quad\Rightarrow\quad$ Das geht q mal gut und das $(q+1)$ - te Mal gibt es $\quad \left(\hat{T}_-\right)^{q+1}\left(\hat{V}_-\right)^{p+1}\Psi_{max} = 0$



Frage : Warum im unteren Eckpunkt nach links und nicht nach rechts abbiegen?

1. Aus allg. Symm. $\left\{\begin{array}{l}\alpha)\text{ SU(3) - Multipletts Sechsech -}\\ \text{Struktur mit 120° - Symmetrie}\\ \beta)\text{ Nullpunkt } Y = T = 0\\ \text{als Mittelpunt enthalten}\end{array}\right.$

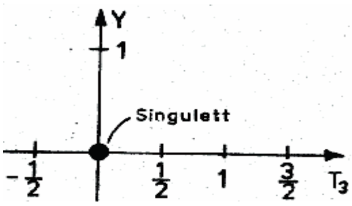
2. Grenze des Multipletts immer KONVEX

5. Das Quark-Modell

SU(3) − Symmetrien liefern Multiplettstrukturen. ⇒ SU(3) ≡ gesuchte neue Symmetrien in der Ordnung der Elementarteilchen

5.1. Das kleinste triviale Multiplett

Das kleinste Darstellung der F-Spin-Algebra ist die Singulett-Darstellung mit $T_3 = 0$, $Y = 0$, also das kleinste triviale Multiplett.



5.2. Das kleinste nichttriviale Multiplett

In SU(2) : die kleinste nichttriviale Darstellung ⇒

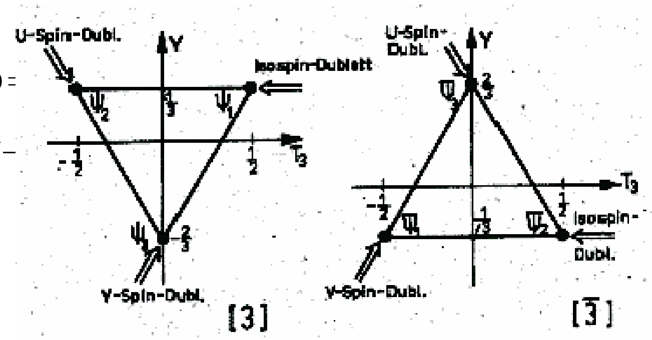
das Isospindublett mit $T = \frac{1}{2}$. Da SU(2) Unteralgebra von SU(3) =

das kleinste SU(3) enthält mindestens ein $T = \frac{1}{2}$ - Dublett. U−, V−

T − Algebra gleichberechtigt ⇒ SU(3) − Multiplett

muss sowohl ein T - als auch ein V - und U - Dublett enthalten.

Es ergibt sich nebenstehende Figuren :



Beide Darstellungen enthalten ein Isodublett $T = \frac{1}{2}$ und ein Isosingulett $T = 0$.

$$\psi_1 = \left|\frac{1}{2} Y\right\rangle; \quad \psi_2 = \left|-\frac{1}{2} Y\right\rangle; \quad \psi_3 = \left|0Y'\right\rangle$$

also $$\hat{T}_3\psi_1 = +\frac{1}{2}\psi_1 \quad , \hat{T}_3\psi_2 = -\frac{1}{2}\psi_2 \quad , \hat{T}_3\psi_3 = 0\,\psi_3$$

nächste Aufgabe : Bestimmung der Y - Werte

ψ_1 ein U - Spin - Singulet ⇒ $\hat{U}_3\psi_1 = 0$. Es gilt auch :

$$\hat{U}_3 = \frac{1}{4}(3\hat{Y} - 2\hat{T}_3) \Rightarrow \hat{Y} = \frac{1}{3}(4\hat{U}_3 + 2\hat{T}_3)$$

$$\hat{Y}\psi_1 = \frac{1}{3}(4\hat{U}_3 + 2\hat{T}_3)\psi_1 = \frac{4}{3}\hat{U}_3\psi_1 + \frac{2}{3}\hat{T}_3\psi_1 = 0 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\psi_1 = \frac{1}{3}\psi_1$$

ψ_1 und ψ_2 haben dieselbe Hyperladung ⇒ $\hat{Y}\psi_2 = \frac{1}{3}\psi_2$

und jetzt Bestimmung von $\hat{U}_3$ von ψ_2 :

$$\hat{U}_3\psi_2 = \frac{1}{4}(3\hat{Y} - 2\hat{T}_3)\psi_2 = \frac{3}{4}\hat{Y}\psi_2 - \frac{1}{2}\hat{T}_3\psi_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\psi_2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\psi_2 = \frac{1}{2}\psi_2$$

Da ψ_2 und ψ_3 aus einem V - Spin - Dublett ⇒ $\hat{U}_3\psi_3 = -\frac{1}{2}\psi_3$

also $$\hat{Y}\psi_3 = \frac{1}{3}(4\hat{U}_3 + 2\hat{T}_3)\psi_3 = \frac{4}{3}\hat{U}_3\psi_3 + \frac{2}{3}\hat{T}_3\psi_3 = \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\psi_3 + \frac{2}{3}\cdot 0\,\psi_3 = -\frac{2}{3}\psi_3$$

Insgesamt gilt : $$\Psi_1 = \left|\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\rangle \quad ; \Psi_2 = \left|-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right\rangle \quad , \Psi_3 = \left|0,-\frac{2}{3}\right\rangle$$

5.3. Konstruktion aller SU(3)-Multipletts aus den elementaren Darstellungen

Eine enge Analogie zur Situation bei der SU(2) - Drehimpulsalgebra

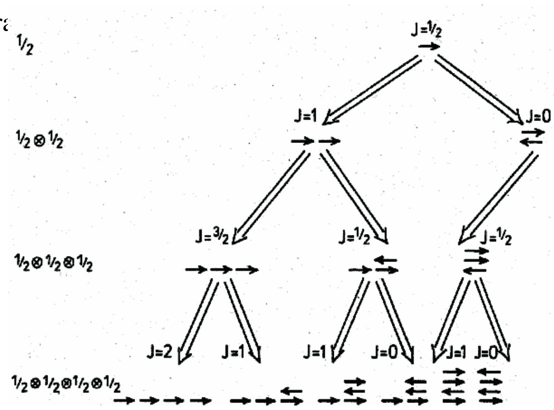
zu jedem Wert $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ gibt es ein Multiplett

der Dimension $(2j+1)$ mit den Zuständen $|\,jm\rangle$,

$m = -j, \ldots, 0, \ldots + j$.

Zweiter Weg zur Konstruktion der SU(2) - Multipletts ist die Kopplung des fundamentalen Dubletts :

$$j = \frac{1}{2},\ m = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$



Jetzt zur SU(3) :

Aufbau aus den fundamentalen Quarks $[3]$ bzw. Antiquarks $[\bar{3}]$: 2 Möglichkeiten

a)

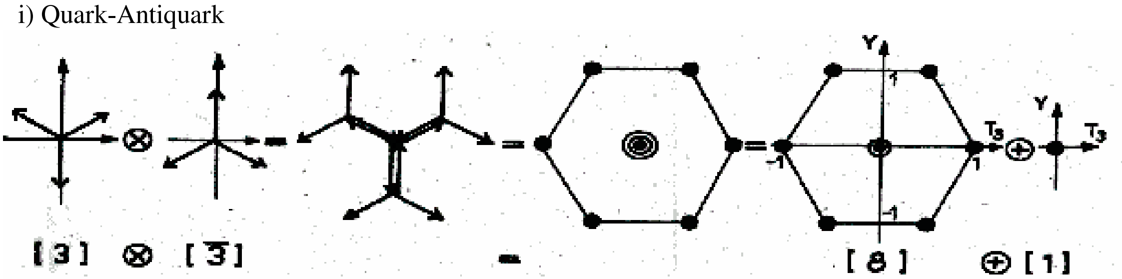
Def.: Zustand mit max. Gewicht : (T_3, Y) hat größeres Gewicht als (T_3', Y'), wenn gilt

$$T_3 > T_3' \text{ oder } T_3 = T_3' \text{ und } Y > Y'$$

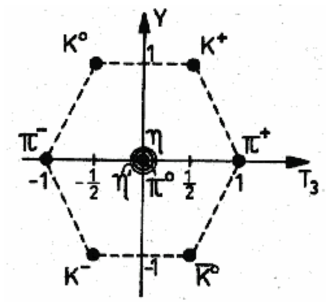
Wenn Zustand mit max. Gewicht bekannt $\Rightarrow$ Konstruktion des Multipletts durch Schieboperatoren $\hat{T}_\pm, \hat{U}_\pm, \hat{V}_\pm$

b) Regeln für die Reduzierung direkter Produkte aus SU(3)- Multipletts

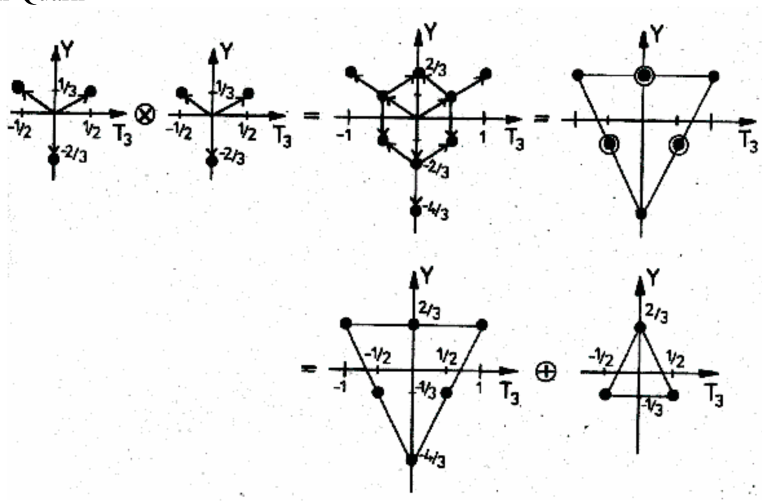
i) Quark-Antiquark

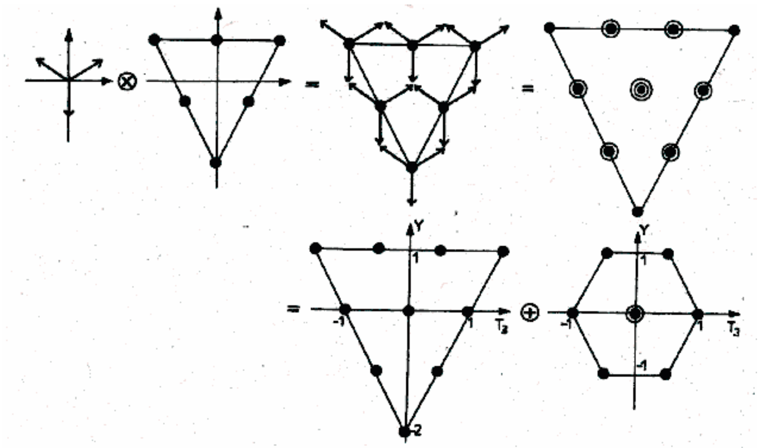


Beispiel : Pseudoskalare Mesonen

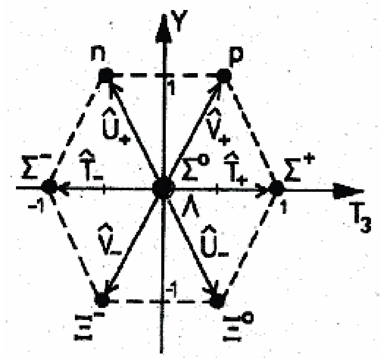


ii) Quark-Quark-Quark





Beispiel : Baryonenoktett



Beispiel : Dekuplett der Baryonenresonanzen