Darstellungstheorie der SO(3) und SU(2)

Powtschinik Alexander.

Definition „Darstellung“

Eine Darstellung einer Gruppe G ist homomorphe Abbildung von dieser Gruppe auf eine Gruppe nichtsingulärer linearer Operatoren auf einem Vektorraum L.
Ist diese Abbildung isomorph, so spricht man von einer „treuen“ oder „getreuen“ Darstellung. Die Dimension der Darstellungen ist die Dimension des Vektorraums L.
Zwei Darstellungen sind Äquivalent ($D(\varphi,L) \Leftrightarrow D(\varphi',L')$), wenn eine Basiswechsel-Matrix M existiert, so dass gilt $\forall g \in G: \varphi'(g) = M^{-1}\varphi(g)M$

Was bedeutet "SO(3) und SU(2) ?

$$SO(3) = \left\{A \in GL(3,\mathbb{R}) \middle| A^T A=1 \wedge \det(A)=1\right\}$$

$$SU(2) = \left\{A \in GL(2,\mathbb{C}) \middle| A^T A=1 \wedge \det(A)=1\right\}.$$

Also spezielle orthogonale $3\times3-$*Matrizen*

bzw. spezielle unitäre $2\times2-$*Matrizen.*

Warum sind SO(3) und SU(2) interessant ?

Drehgruppe "SO(3),SU(2)"
(kompakt, halbeinfach)

$\downarrow$ $\leftarrow$ Lorentztransformation

Lorentz-Gruppe
(nicht kompakt)

$\downarrow$ $\leftarrow$ Translationen

Poincare-Gruppe
(nicht halbeinfach)

Durch komplexe Rechnung

$$D_\alpha \vec{x} = (y_1, y_2) = (y_1 + iy_2) = e^{i\alpha}(x_1 + ix_2) = (x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha) + i(x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)$$

Unter der Drehgruppe verstehen wir dieGruppe der homogenen linearen Transformationen

$$x' = Rx$$

eines euklidischen dreidimensionalen Raumes in sich, welche Längen invariant lassen und Orientirungen nicht ändern.

Es gibt drei Transformationen (abstrakte aktive passive)

a) Abstrakte Transformation:

$x \in X$, läßt invariant $(x,x) = x^2 > 0 \;\Rightarrow\; x^2 = (Rx)^2$.

b) Matrixgleichung für aktive Transformation bzgl fester ON Basis: $x'^{\mu} = R^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$, mit det(R)=1.

c) Matrixgleichung für die passive Transformation

$x^{\mu'} = R^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$

bei der nur die Basisvektoren verdreht werden

Bsp. Parametrisierung in Drehwinkel $\alpha = |\vec{\alpha}|$

$$x'^{\mu} = x^{\mu}\cos\alpha + \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\alpha^2} x^{\mu}\cos\alpha + \frac{\alpha_\nu x^\nu}{\alpha^2}\alpha^{\mu}(1-\cos\alpha) + \frac{\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\alpha^{\lambda}x^{\nu}}{\alpha}\sin\alpha$$

Mit Matrix von:

$$R^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}\cos\alpha + \frac{\alpha_\nu}{\alpha^2}\alpha^{\mu}(1-\cos\alpha) + \frac{\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\alpha^{\lambda}}{\alpha}\sin\alpha$$

Bsp: Eulersche Winkel

sei $\{e_\mu\}$ ON Rechtsystem von Basisvektoren

$\{e'_\mu\}$ verdrehtes System, dann $e'_\mu = R(\alpha,\beta,\gamma)e_\mu$

Formal:

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=R(\alpha,\beta,\gamma)}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix zu $R(\alpha,\beta,\gamma)$ ist

$R^{-1}(\alpha,\beta,\gamma) = R(\pi-\gamma,\beta,\pi-\alpha)$

Betrachten erst für kleine Drehung $R=1+\Omega$ mit $RR^T = 1, \quad \Omega + \Omega^T = 0$

Ω ist eine antisymmetrische Matrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{\alpha}\vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$ ist ein Triplet von Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau_1, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tau_2, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tau_3$$

Sie sind die Generatoren von infinitesimalen Drehungen um die drei Achsen.
Diese Generatoren und deren Vertauschungsrelation (die sogenannte Lie-Algebra) legen die Gruppe vollständig fest.

Es muss auch gelten $(\tau^i)^{jk} = -\varepsilon^{ijk}$

Den Zusammenhang zwischen infinitesimalen und endlichen Drehung können wir so herstellen:Die endliche Drehung $R(\vec{\alpha})$ schreiben wir als

$$R(\vec{\alpha}) = R(\frac{\vec{\alpha}}{2})R(\frac{\vec{\alpha}}{2}) = \ldots = \left[R(\frac{\vec{\alpha}}{N}) \right]^N \;;$$

Beim grossen N wird $\frac{\vec{\alpha}}{N}$ hinreichend klein, wir können wie oben $R(\vec{\alpha}) \approx 1 + \frac{\vec{\alpha}\vec{\tau}}{N}$ setzen, und $N \to \infty$ ergibt $R(\vec{\alpha}) = \exp(\vec{\alpha}\vec{\tau}) = \exp(\frac{\vec{\alpha}\vec{\tau}}{N})^N$ so kann jede Drehung aus „infinitesimalen Drehungen" erzeugt werden.

Diese Generatoren gehören zu einer Lie-Gruppe.

Eine Lie-Gruppe ist eine Gruppe, die sich in der Nähe des neutralen Elements durch reelle Parameter beschreiben läßt so dass das Gruppenprodukt in diesen Parameter differenzierbar ist.

Lie-Gruppen sind charakterisiert duch die fundamentale Forderung:
$\{\gamma_k\}$ der Operation $R(\gamma)=R(\beta)R(\alpha)$. Dann soll $\{\gamma_k\}$ analytische Funktionen der Parameter $\{\alpha_i\},\{\beta_i\}$ der beiden Faktoren sein:

$$\gamma_k \equiv \phi_k(\alpha_m;\beta_n)$$

D.h., alle Ableitungen, $\{\beta_n\}\{\alpha_m\}$, auch die höheren, existieren. mit $\left[\tau^i,\tau^j\right] = \varepsilon^{ijk}\tau^k$.

Die Generatoren sind also durch die Strukturkonstruktion festgelegt. Solche Darstellung nennt man"adjungierte Darstellung".

Wie sieht also die Lie-Algebra des SO(3) aus?

Wähllen wir die Generatoren hermitisch d.h.: $J^i = i\tau^i$ und $R(\vec{\alpha}) = \exp(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{J})$
Dann erhalten wir die Lie-Algebra SO(3) $\left[J^i, J^J\right] = i\varepsilon^{ijk}J^k$

(Der Algebra der quantenmechanischen Drehimpulsoperatoren).
Die Grundaufgabe der Darstellungstheorie ist es die
irreduziblen Darstellungen der Gruppe zu finden.

Irreduzible Darstellung der Gruppe?

Orthogonale Transformation des $\mathbb{R}^3$ als spzielle Darstellung $g \to R_g$ der Lie-Gruppe SO(3) ist Irreduzibel. Es gibt im Darstellungsraum $\mathbb{R}^3$ keine invarianten Unterräume.Da keine Richtung und damit auch keine Ebene durch alle Drehungen in sich ubergeführt wird.

Irreduzible Darstellung von SO(3)
Sei $g \in SO(3)$,:$g \to T_g$ eine Darstellung imVR-V einer einparametrigen Untergruppe $g(\tau)$ ist ein einparametrige Transformations-oder Matrixgruppe $T_{g(\tau)}$ in VR-V zugeordnet.
Für $\tau \ll 1$ gilt:

$$T_{g(\tau)} \approx id_v + \tau t\ ,\ t = \frac{\partial}{\partial \tau} T_{g(\tau)}\Big|_{\tau=0}$$

t erzeugende der $g(\tau)$. Die Erzeugenden aller eindimensionalen Untergruppen bilden einen VR. In diesem VR kann eine Basis aus drei Erzeugenden t_μ gewählt werden, die eine Drehung um μ erzeugen und $\left[t_\mu, t_\nu\right] = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} t_\lambda$ genügen.

t_μ bilden auch Lie-Algebra deren struktur isomorph zur Lie-Algebra ist.
Betrachten aktive Drehung sei e_μ- ONB durch die Matrix $R(\vec{\alpha})$ geg.
Und $\bar{e}_\mu = S_{\mu\nu} e_\nu$ ist eine neue Basis, die durch Drehung $SR\left(\vec{\alpha}\right)S^{-1}$gegeben. Da $\vec{\alpha}$ in der neue Basis $\vec{\alpha} = S\vec{\alpha}$ wird, muss $S(R(\vec{\alpha}))S^{-1} = R(S\vec{\alpha})$
gelten.
D.h. zu beliebiger Darstellung $g \to T_g$ in VR muss Bsp. $T_h T_{g(\vec{\alpha})} T_{h^{-1}} = T_{g(S_h\vec{\alpha})}$ sein
für $\tau \ll 1$ $\vec{\alpha} \to \tau\vec{\alpha}$ gilt: $T_{g(\tau\vec{\alpha})} = id_v + \tau t$, $t = \frac{\partial}{\partial \tau} T_g(\tau\vec{\alpha})\Big|_{\tau=0}$
$t = \alpha_\mu t_\mu = \vec{\alpha}t$, t_μ die Erzeugende von Drehung um die Koordinatenachse
$\Rightarrow t_\mu$ bilden VR.

Ersetzen wir $T_h = id_v + \tau\vec{\beta}t$, $T_{h^{-1}} = id_v - \tau\vec{\beta}t$, $S_h\vec{\alpha} = \vec{\alpha} + \alpha\tau\vec{\beta}\times\vec{\alpha}$

erhalten $\left[\vec{\beta}t, \vec{\alpha}t\right] = \left(\vec{\beta}\times\vec{\alpha}\right)t$

oder $\left[t_\mu, t_\nu\right] = \varepsilon_{\mu\nu\lambda}t_\lambda$, $\vec{\lambda} =$ beliebig. q.e.d.

Satz:
Die irreduziblen Darstellungen einer halbeinfach Lie-Algebra werden durch die Eigenewerte der Casimir-Operatoren klassifiziert.
Definition: "Casimir-Operator"
Casimir-Operatoren sind Funktionen der Generatoren,
die mit allen Generatoren vertauschen.
Bsp. so(3) $\vec{J} = J_1J_1 + J_2J_2 + J_3J_3$, $\left[\vec{j}^2, J_i\right] = 0$; $i = 1,2,3$
Für die Berechnung der Eigenwerte der Casimir-Operatoren verweise ich auf die Vorlesung der "Quantentheorie I"
Wenn man die Bezeichnung $|J,m\rangle$ für einen normieerten Eigenvektor von $\vec{j}^2$ und j_3 wählt

so dass
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{j}^2\,|J,m\rangle &= J\,(+J+1)|J,m\rangle\\ j_3\,|J,m\rangle &= m|J,m\rangle\end{aligned}}$$

dann kann $j \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$, $m \in \{-j, -j+1, \ldots. j\}$
Die Eiegenwert j des Casimir- Operators, also den größten vorkommenden Wert für m, bezeichnet man als

"höhstes Gewicht".

Die Darstellung der Lie-Algebra sind also die Eigenräume des Casimir-Operators (der höhsten Gewichte) aufzählen lassen Ihre Dimension ist 2j+1.
Bsp1. j=0(eindimensional), triveale Darstellung.
$\vec{j}^2 = 0$, $R(\vec{\alpha}) = \exp(-i\vec{\alpha}\cdot\vec{j}) = 1$.

Bsp2. j=1(dreidimensional) "Tensordarstellung" Der Darstellungsraum wird aufgespannt von $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$

$$j_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \quad J_+ = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad J_- = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(J_+ - J_-) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Darstellung ist eng mit dem physikalischen Raum verbunden.
Durch die Ähnlichkeitstransformation

$S^{-1}J^iS = i\tau^i$ mit $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}$ gelang

man zu der definierenden Darstellung von SO(3) zurück.

Die ganzzahligen irreduziblen Darstellungen heißen allgemein "Tensordarstellungen".
Bsp2. j=1(dreidimensional) "Tensordarstellung" mit dem Darstellungsraum
von $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$
Bemerkung: Die Zuständen $|J,m\rangle$ sind die Tensordarstellungen Eigenzustände
des Differentialoperators.

$\vec{L} = \vec{X} \times \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$(*Drehimpuls der Quantenmechanik*).

In der Ortsdarstellung sind die Zustände die Kugelflächenfunktionen $|J,m\rangle = Y_J^m$
Bsp2. (zweidimensional) "Spinordarstellung" Der Darstellungsraum wird aufgespannt von
$\left\{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right\}$

$$J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad J_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

D.h.:$\vec{J} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$(*Pauli´sche Spinmatrizen*)Generell versteht man unter Darstellungen mit halbzahligem j "Spinordarsellungen".Damit haben wir alle irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebra so(3) gefunden und kategorisiert.

Aus der definierenden Darstellung der SO(3) (die eine Tensordarstellung mit dim=3 ist) lassen sich alle Tensordarstellungen gewinnen nicht jedoch "Spinordarstellungen" der Lie-Gruppe SO(3).

Ausgehend von der Lie-Algebra kann man auf rein algebraischem Weg die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume finden, die mit den Generatoren in Verbindung stehen und für irreduziblen Darstellungen die Eigenräume der Gruppen bilden.

Darstellung der SU(2)

Betrachten komplexe unitäre 2×2-Matrizen:

$U=\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ mit $|a^2|+|b^2|=1$

mit zwie komplexe Zahlen und eine Bedingung $\Rightarrow \exists$ 3 freie Parameter diese

Generatoren sind die halben Pauli-Matrizen:$U(\vec{\alpha}) = \exp(-i\alpha^i \frac{1}{2}\sigma^i)$ also Spinordarstellung.

Die Lie-Algebra su(2) der Lie-Gruppe SU(2) ist $\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2}\right] = i\varepsilon^{ijk}\frac{\sigma^k}{2}$

Erinnerung:so(3):$\left[J^i, J^J\right] = i\varepsilon^{ijk} j^k$d.h die Lie-Algebra su(2) und so(3) sind gleich.

su(2) und so(3) unterscheiden sich durch denFaktor 1/2 im Exponenten.

für Drehung um α=2π folgt R(2π) = R(0) =1 aber U(4π)=U(0)=1.

$\Rightarrow$ jedem Element der SO(3) R(α) sind zwei
Elementen der SU(2) U(α) und U($\alpha+2\pi$) zugeordnet.
D.h. im Gegensatz zur 2π-Periodizität der SO(3) besitzt die SU(2) eine $4\pi-$Periodizität.
Betrachten wir den Parameterraum der SU(2) durch Unimodularitätsbedingug $|a^2|+|b^2|=1$

ergibt sich die Gleichung einer (Hyper-)Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^4$:$u^2+v^2+x^2+y^2=1$
mit den Matrixelementen von a = u+iv und b = x+iy.
Dieser sogenannte "Parameterraum"von SU(2) ist einfach zusmmenhängend: je zwei Wege zwischen zwei Punkten lassen sich einfach zusammenchängend ineinander uberführen.
Bei SO(3) sind diese Punkte identiesch man kann sich den Parameterraum von SO(3) als die obere Halbkugel vorstellen, bei der diametrale Punkte auf dem Äquator identisch sind. Man sagt: SU(2) ist Überlagerungsgruppe von SO(3).

Satz:

jede Lie-Algebra ist Lie-Algebra genau einer einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe. jede andere Lie-Gruppe mit der gleichen Lie-Algebra, die n-fach zusamenhängt, wird von der einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe n-fach überlagert.

Die Lie-Gruppe SO(3) und SU(2) sind lokal um die Identität isomorph. Das folgt aus der Gleichheit ihrer Lie-Algebren. Global zerfallen allerdings die irreduziblen Darstellungen in Tensordarstellungen und Spinordarstellungen.
Beide Arten sind Darstellungen der SU(2) , aber nur die Tensordarstellung sind Darstellungen der SO(3). Manchmal spricht man von Spinordarstellung der SO(3).
Mathematisch korrekt ist allerdings, von einer Überlagerungsgruppe zusprechen.