Seminarvortrag
Teilchen- und Kerntheorie

Symmetriebrechung

Betreut von: Herr Prof. Münster und Herr Dr. Heitger

Gehalten von: Stefanie Rau

1. Was ist Symmetriebrechung

Ein quantenmechanisches System wird beschrieben durch seine Lagrangedichte $\mathcal{L}$. Dieses System hat einen Zustand minimaler Energie, den Vakuumzustand.

Wenn wir eine definierte Transformationsgruppe G auf den Vakuumzustand oder die Lagrangedichte wirken lassen kann G diese beiden Größen invariant lassen oder nicht. Die Invarianz des Vakuumzustands oder der Lagrangedichte bestimmt, ob die Symmetrie exakt oder gebrochen ist.

Coleman-Theorem:

i)	Vakuumzustand ist invariant	$\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ ist invariant
	exakte Symmetrie	
ii)	Vakuumzustand ist nicht invariant	
	$\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ ist invariant	**spontane Symmetriebrechung**
oder	$\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ ist nicht invariant	explizite Symmetriebrechung

Im Falle der spontanen Symmetriebrechung gilt das **Goldstone-Theorem**:
Die spontane Symmetriebrechung führt auf Teilchen mit der Masse m=0. Diese Teilchen werden Goldstone-Bosonen genannt.

Die Transformationsgruppe G kann entweder eine globale oder eine lokale Transformation sein.

2. Spontane Brechung der globalen Symmetrie

2.1 Exakte Symmetrie

Betrachtet wird ein System, welches durch die folgende Lagrangedichte bestimmt wird:

$$\mathcal{L}=\left(\partial_\mu\Phi^*\right)\left(\partial_\mu\Phi\right)-m^2\Phi^*\Phi-\tfrac{1}{4}f\left(\Phi^*\Phi\right)^2$$

Hierbei ist $\Phi(x)$ ein komplexes Skalarfeld, f eine Kopplungskonstante der skalaren Felder mit $f>0$ und m ist die Masse der Partikel mit $m^2>0$. $\mathcal{L}$ ist invariant unter einer globalen U_1 Phasentransformation:

$$\Phi(x)\rightarrow\Phi'(x)=\exp(-ig\varepsilon)\Phi(x) \qquad \Phi^*(x)\rightarrow\Phi'^*(x)=\exp(ig\varepsilon)\Phi^*(x)$$

Hierbei beschreibt ε die Transformation, und ist die Kopplungskonstante. Der Vakuumzustand ist bei $\Phi_V(x)=\Phi_V^*(x)=0$. Dieser Zustand ist invariant unter der Transformation und stabil. Die Symmetrie ist exakt.

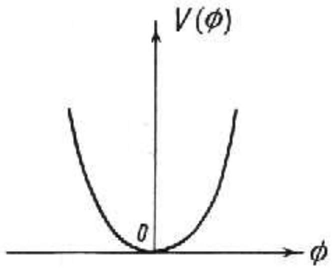

Abb.1 Exakte Symmetrie

2.2 Spontane Brechung

Betrachtet wird ein System, welches durch die folgende Lagrangedichte bestimmt wird:

$$\mathcal{L}=\left(\partial_\mu\Phi^*\right)\left(\partial_\mu\Phi\right)+m^2\Phi^*\Phi-\tfrac{1}{4}f\left(\Phi^*\Phi\right)^2$$

$\mathcal{L}$ ist invariant unter einer globalen U_1 Phasentransformation:

$$\Phi(x)\rightarrow\Phi'(x)=\exp(-ig\varepsilon)\Phi(x) \qquad \Phi^*(x)\rightarrow\Phi'^*(x)=\exp(ig\varepsilon)\Phi^*(x)$$

Der Vakuumzustand ist bei $\left|\Phi_V(x)\right|=\sqrt{2}\frac{m}{\sqrt{f}}\neq 0$. Dieser Zustand ist nicht invariant unter der Transformation und entartet. Die Symmetrie ist spontan gebrochen.

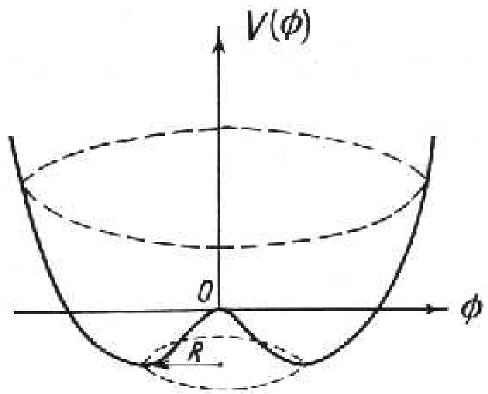

Abb.2 Spontan gebrochene Symmetrie

Für eine explizite Berechnung des Systems muss **ein** Vakuumzustand gewählt werden, da verschiedene Vakuumzustände zu unterschiedlichen Welten führen! Tunneln zwischen den einzelnen Zuständen ist nicht möglich. Durch die Transformation kann jeder Vakuumzustand des spontan gebrochenen Systems in einen anderen überführt werden.

Das Skalarfeld $\Phi(x)$ wird jetzt substituiert, in eine Beschreibung mit Real- und Imaginärteil.

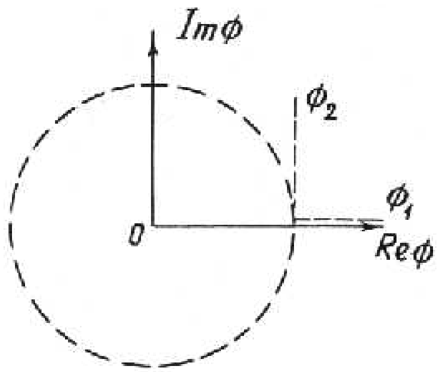

Abb.3 Ausgewählter Zustand

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2m}{\sqrt{f}}+\Phi_1(x)+i\Phi_2(x)\right)$$

Mit dieser Substitution, welche einer Entwicklung um das Minimum entspricht, folgt für die Lagrangedichte:

$\mathcal{L}(\Phi) \rightarrow$

$$\mathcal{L}_2(\Phi_1,\Phi_2) = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_1)^2 - \tfrac{1}{2} m_1^2 \Phi_1^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \Phi_2)^2 - \frac{f}{16}\left(\Phi_1^4 + 2\Phi_1^2\Phi_2^2 + \Phi_2^4\right) - \frac{m\sqrt{f}}{2}\left(\Phi_1^2 + \Phi_2^2\right)\Phi_1$$

Nach dem Goldstone-Theorem muss es ein Teilchen mit m=0 geben. Aber:
Wie können wir die Masse aus der Lagrangedichte ablesen?

Vergleich mit der exakten Symmetrie zeigt: Terme proportional zu $|\Phi|^2$ beinhalten die Masse:

$$-m^2|\Phi|^2 \qquad \Rightarrow \qquad \text{m=Masse}$$

$\Rightarrow$ Teilchen $\Phi_1(x)$ hat die Masse $m_1 = \sqrt{2}m$

$\Rightarrow$ Teilchen $\Phi_2(x)$ hat keine Masse, da es keinen Term gibt, welcher proportional zu $|\Phi_2|^2$ ist. $\Phi_2(x)$ **ist das Goldstone Boson!**

Betrachte m^2:

i) m^2=0 kritischer Punkt, bestimmt ob spontane Symmetriebrechung existiert

ii) m^2<0 stabiler und invarianter Vakuumzustand bei Φ_V =0

iii) m^2>0 nicht invariante, entartete Vakuumzustände bei $\Phi_V \neq 0$

2.2.1 Beispiel 1: Der Ferromagnet

$T > T_C$: Kein ausgezeichneter Zustand, der Ferromagnet ist rotationsinvariant

$T < T_C$:Grundzustand, nicht rotationsinvariant, Zustand bricht die Symmetrie

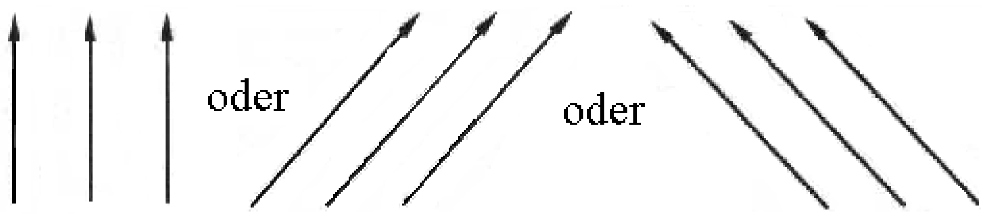

Abb.4 möglicher Grundzustand des Ferromagneten

Vorsicht: hier $m \rightarrow \mu$:temperaturabhängige Größe

μ^2<0 Magnetisierung (entspricht Vakuumserwartungswert) im Mittel Null

μ^2>0 Magnetisierung ungleich Null

2.2.2 Beispiel 2: Chirale Symmetrie

Wir betrachten ein System, welches durch folgende Lagrangedichte beschrieben wird:

$$\mathcal{L}= \overline{\Psi} i\partial\!\!\!/ \Psi + ig\overline{\Psi}\tau\gamma_5\Psi\Phi + g\overline{\Psi}\Psi\sigma + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi) + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)(\partial^\mu\sigma) - \tfrac{1}{2}\mu^2(\sigma^2+\Phi^2) - \tfrac{1}{4}\lambda^2(\sigma^2+\Phi^2)^2$$

Hierbei wird ein Modell angenommen, in dem die zwei Quarks Up und Down als annähernd massegleich angenommen werden, die Masse wird zusätzlich gleich Null gesetzt. Dieses wird beschrieben durch ein masseloses Dublett, dem Spinorfeld $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$. Die drei Pionen werden durch ein Triplett, dem Pseudoskalarfeld Φ beschrieben. σ beschreibt ein Skalarfeld.

$\mathcal{L}$ ist invariant unter einer globalen $SU(2)_L \times SU(2)_R$ Transformation,

$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \exp\left[-i\tfrac{1}{2}g\tau^\alpha\gamma_5\varepsilon^\alpha\right]\Psi(x)$ mit $\alpha = 0,1,2,3$ und $\tau^0 = 1$.

Diese Transformation wird durch die Eigenwerte des links- und des rechtshändigen Isospins beschrieben wird, und **chirale Symmetrie** genannt.

Bei Anwendung der chiralen Symmetrietransformation und geeigneter Wahl eines Vakuumzustandes erhalten wir 3 Goldstone-Bosonen, die Pionen, aus dem Φ-Feld. (Hier werden 4 Dimensionen betrachtet. Durch die Wahl des Vakuumzustandes wurde eine Dimension festgelegt, die restlichen drei bleiben übrig und zu Goldstone Bosonen.)
Hierbei muss beachtet werden, dass am Anfang die Näherung gemacht wurde, dass die Quarks gleiche Masse haben. Diese Näherung führt dazu, dass die Pionen nur näherungsweise masselos sind.

3. Spontane Brechung der lokalen Symmetrie

3.1 Exakte Symmetrie

Wir betrachten ein System, welches durch folgende Lagrangedichte beschrieben wird:

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (\partial_\mu\Phi^* - igA_\mu\Phi^*)(\partial_\mu\Phi - igA_\mu\Phi) - m^2\Phi^*\Phi - \frac{f}{4}(\Phi^*\Phi)^2$$

Diese Lagrangedichte ist exakt symmetrisch unter einer lokalen U_1-Transformation:

$$\Phi(x) \to \Phi'(x) = \exp[-ig\varepsilon(x)]\Phi(x) \qquad \Phi^*(x) \to \Phi'^*(x) = \exp[ig\varepsilon(x)]\Phi^*(x)$$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\varepsilon(x)$$

Der Vakuumzustand entspricht: $\Phi_V(x) = \Phi^*_V(x) = 0$.

3.2 Spontane Brechung

3.2.1 Abelsche Symmetriegruppe

Wir betrachten nun die Langrangedichte:

$$\mathscr{L}=\left(D_\mu\Phi\right)^+\left(D_\mu\Phi\right)-\tfrac{1}{2}\lambda^2\left(\Phi^*\Phi\right)^2+\tfrac{1}{2}m^2\Phi^*\Phi-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Mit $D_\mu=\partial_\mu+igA_\mu$ und $F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$. $\mathscr{L}$ ist invariant unter einer lokalen U_1 Phasentransformation:

1) $\Phi(x)\to\Phi'(x)=\exp[-ig\varepsilon(x)]\Phi(x)$

2) $A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\varepsilon(x)$

Der Erwartungswert im Vakuumzustand ist $\Phi_V=\frac{1}{\sqrt{2}}f$. Anstatt Φ jetzt in zwei Felder Φ_1 und Φ_2 aufzuteilen, was wieder auf Goldstone-Bosonen führen würde, verwendet man jetzt den **Higgs-Mechanismus**: Φ wird in Phase und Amplitude aufgeteilt:

3) $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(f+\rho(x)\right)\exp\left[-i\frac{\Theta(x)}{f}\right]$

Als nächsten Schritt wählt man die **Eich-Fixierung**. Hierbei wird $\varepsilon(x)$ so gewählt, dass gilt: $\Theta(x)=0$. Unter Verwendung von 1) und 3) erhält man dann:

$$\varepsilon(x)=-\frac{1}{gf}\Theta(x)$$

Wenn man nun die Transformation einsetzten erhält man:

$$\mathscr{L}=\tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu\rho\right)\left(\partial^\mu\rho\right)-\tfrac{1}{2}m^2\rho^2-\tfrac{1}{4}F_{A'\mu\nu}F^{A'\mu\nu}+\tfrac{1}{2}g^2f^2A'_\mu A'^\mu+A'_\mu A'^\mu\tfrac{1}{2}g^2\left(\rho^2+2f\rho\right)-\tfrac{1}{8}\lambda^2\rho^4-\tfrac{1}{2}\lambda^2f\rho^3$$

Sowohl das Skalarfeld ρ, als auch das Eichfeld A'_μ sind massiv. Das Skalarfeld beinhaltet das Higgs-Boson. Der Vakuumzustand ist nun durch die Eich-Fixierung nicht mehr entartet und invariant. Es gibt nun keine Goldstone-Bosonen mehr!

3.2.2 Nicht-Abelsche Symmetriegruppe

Wir betrachten ein System, welches durch folgende Lagrangedichte beschrieben wird:

$$\mathscr{L}=\left(\partial_\mu\Phi^{a*}\right)\left(\partial_\mu\Phi^a\right)-m^2\Phi^{a*}\Phi^a-\frac{f}{4}\left(\Phi^{a*}\Phi^a\right)^2$$

Mit dem isotopen Dublett des skalaren Feldes $\Phi^a=\begin{pmatrix}\Phi_1\\\Phi_2\end{pmatrix}$. Die Lagrangedichte ist invariant unter einer lokalen nicht-abelschen SU_2 Transformationsgruppe:

$$\delta\Phi^a=-\frac{i}{2}g\varepsilon_k\left(\tau_k\right)_{ab}\Phi^b \qquad \delta\Phi^{a*}=\frac{i}{2}g\varepsilon_k\Phi^{b*}\left(\tau_k\right)_{ab}$$

Wobei τ_k die Pauli-Matrizen sind. Damit lässt sich die Lagrangedichte umschreiben zu:

$\mathscr{L}=$

$$-\tfrac{1}{4}F^k{}_{\mu\nu}F^k{}_{\mu\nu}+\left(\partial_\mu\Phi^{a*}-\tfrac{1}{2}ig\Phi^{b*}(\tau_k)_{ab}A^k{}_\mu\right)\times\left(\partial_\mu\Phi^a+\tfrac{1}{2}ig(\tau_k)_{ab}\Phi^bA^k{}_\mu\right)+m^2\Phi^{a*}\Phi^a-\frac{f}{4}\left(\Phi^{a*}\Phi^a\right)^2$$

Der Vakuumerwartungswert ist $\Phi^a{}_V(x)=\sqrt{2}\frac{m}{\sqrt{f}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Dann werden zwei neue skalare Felder $\sigma(x)$ und $\Theta^k(x)$, mit k=1,2,3 eingeführt:

$$\Phi^a(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2m}{\sqrt{f}}+\sigma(x)+i\tau_k\Theta^k(x)\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\qquad\qquad \Phi^{a*}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1)\left(\frac{2m}{\sqrt{f}}+\sigma(x)-i\Theta^k(x)\tau_k\right)$$

Einsetzten in die Lagrangedichte führt auf drei Goldstone-Bosonen $\Theta^k(x)$. Dann wird auch hier die Eich-Fixierung wie in 3.2.1 gewählt. Als Lagrangedichte ergibt sich dann:

$$\mathscr{L}=-\tfrac{1}{4}\left(\partial_\mu A^k{}_\nu-\partial_\nu A^k{}_\mu\right)^2+\frac{g^2m^2}{2f}A^k{}_\mu A^k{}_\mu+\tfrac{1}{2}\partial_\mu\sigma\cdot\partial_\mu\sigma-\tfrac{1}{2}m^2\sigma^2+L_{WW}(A^k{}_\mu,\sigma)$$

Die Masse des Eichfeldes ist $\frac{gm}{\sqrt{f}}$, und die Masse des skalaren Feldes $\sigma(x)$ ist $\sqrt{2}m$.

3.2.3 Beispiel: Residuale Symmetrie

Die Lagrangedichte aus 3.2.2 ist invariant unter einer lokalen $\mathrm{SU}_2\times\mathrm{U}_1$-Transformation:

$$\Phi^a(x)\to\Phi'^a(x)=\exp\left[-\tfrac{1}{2}ig\tau_k\varepsilon_k(x)-\tfrac{1}{2}ig_1\varepsilon_4(x)\right]\Phi^a(x)$$
$$A_\mu(x)\to A'_\mu(x)=A_\mu(x)+\partial_\mu\varepsilon(x)$$

Der Vakuumerwartungswert ist $\Phi^a{}_V(x)=\sqrt{2}\frac{m}{\sqrt{f}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Dann werden wieder zwei skalare Felder $\sigma(x)$ und $\Theta^k(x)$, mit k=1,2,3 eingeführt, dieses führt auf drei Goldstone-Bosonen. Auch die Eich-Fixierung wird wie in 3.2.2 gewählt. Es folgt dann für die Lagrangedichte:

$\mathscr{L}=$

$$-\tfrac{1}{4}F^k{}_{\mu\nu}F^k{}_{\mu\nu}-\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{g^2m^2}{2f}A^k{}_\mu A^k{}_\mu+\frac{g_1{}^2m^2}{2f}A_\mu A_\mu+\frac{g_1gm^2}{f}A_\mu A^3{}_\mu+\tfrac{1}{2}\partial_\mu\sigma\cdot\partial_\mu\sigma-m^2\sigma^2$$
$$+L_{WW}(A^k{}_\mu,\sigma)$$
$$=L_0+L_{WW}$$

L_0 muss noch diagonalisiert werden, dazu werden nun neue Felder eingeführt:

$$W_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A^1{}_\mu+iA^2{}_\mu\right)\qquad\qquad W^*{}_\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(A^1{}_\mu-iA^2{}_\mu\right)$$
$$Z_\mu=A^3{}_\mu\cos\eta-A_\mu\sin\eta\qquad\qquad B_\mu=A^3{}_\mu\sin\eta+A_\mu\cos\eta$$

Zunächst ist η ein unbekannter Parameter. Diese Felder können nach den Eichfeldern umgeformt werden, und in die entsprechenden Terme aus der Lagrangedichte eingesetzt werden. Hierbei entsteht ein Mischterm in den Feldern Z_μ und B_μ. Der Parameter η wird dann so gewählt, dass dieser Term verschwindet. Es ergibt sich dann:

$$\cos\eta = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g_1^2}} \qquad \sin\eta = \frac{g_1}{\sqrt{g^2 + g_1^2}}$$

η wird auch der **Mischungswinkel** oder **Weinbergwinkel** genannt.

Damit schreibt sich die Lagrangedichte wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} =\; & \\
& -\tfrac{1}{2}\left(\partial_\mu W^*{}_\nu - \partial_\nu W^*{}_\mu\right)\left(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu\right) + \frac{g^2 m^2}{f} W^*{}_\mu W_\mu \\
& -\tfrac{1}{4}\left(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu\right)\left(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu\right) + \frac{m^2\left(g^2 + g_1^2\right)}{2f} Z_\mu Z_\mu \\
& -\tfrac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\right)\left(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\right) \\
& +\tfrac{1}{2}\partial_\mu \sigma \cdot \partial_\nu \sigma - m^2 \sigma\sigma \\
& + L_{WW}
\end{aligned}
$$

Vektorfeld $W_\mu(x)$	$m_W = \frac{gm}{\sqrt{f}}$	massives Austauschteilchen in der schwachen WW
Vektorfeld $Z_\mu(x)$	$m_Z = m\sqrt{\frac{\left(g^2 + g_1^2\right)}{f}}$	massives Austauschteilchen in der schwachen WW
Vektorfeld $B_\mu(x)$	$m_B = 0$	Elektromagnetisches Feld
Skalarfeld $\sigma(x)$	$m_\sigma = \sqrt{2}m$	Higgs-Feld

Wieso bleibt ein masseloses Feld $B_\mu(x)$ über? Weil es eine Transformationsgruppe gibt, eine Untergruppe U_1', unter der sowohl die Lagrangedichte, als auch der Vakuumzustand invariant bleiben. Diese Untergruppe wird durch nur einen Generator beschrieben. Es bleibt also eine Invarianz bestehen. Diese Symmetrie wird **Residuale Symmetrie** genannt.
Allgemein gilt: Die Anzahl der Generatoren der Residualen Symmetrie entspricht der Anzahl der Eichfelder, welche masselos bleiben.