

**Darstellungstheorie**  
**der**  
**Lorentzgruppe**

# 1.) Lorentztransformationen:

Die zwei grundlegenden Postulate der Speziellen Relativitätstheorie sind das Relativitätsprinzip, welches besagt, dass alle Naturgesetze unter der Menge der Transformationen zwischen Inertialsystemen kovariant sein müssen, und das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Das Relativitätsprinzip legt die Struktur der möglichen Transformationen bereits bis auf eine universelle Konstante  $K$  fest, welche im Fall der Galilei – Transformationen gleich 0 ist und im Fall der Lorentztransformationen gleich  $-1$  ist, was der Wahl  $c = 1$  entspricht. Die speziellen Lorentztransformationen haben dann folgende Gestalt:

$$\bar{x}^0 = \gamma(x^0 - \vec{v}\vec{x})$$
$$\vec{\bar{x}} = \vec{x} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\vec{v}(\vec{v}\vec{x}) - \gamma\vec{v}x^0$$

Man erkennt das linear-homogene Transformationsverhalten der Vierervektorkomponenten. Diese Gleichungen lauten in Vierer - Notation:

$$\bar{x}^\mu = (L_V)^\mu_\nu x^\nu$$
$$L_V = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\vec{v}^T \\ -\gamma\vec{v} & \mathbf{1} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\vec{v}\vec{v}^T \end{pmatrix}$$

Der Index  $V$  deutet an, dass es sich um einen Spezialfall einer allgemeinen LT handelt, nämlich um eine reine Geschwindigkeitstransformation. Eine allg. LT erhält man durch eine zusätzliche Drehung des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes, die durch orthogonale Matrizen  $R$  vermittelt wird:

$$L = L_R L_V$$
$$L_R = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & R \end{pmatrix}$$
$$R^T R = \mathbf{1}$$

Die Kombination  $L' = L_V L_R$  wäre zwar auch eine allg. LT, aber nicht identisch mit der oben definierten  $L$ . Mit anderen Worten: Geschwindigkeitstransformationen und Drehungen kommutieren i.A. nicht.

## 2.) Lorentzgruppe:

Man kann Lorentztransformationen abstrakt als diejenigen Transformationen  $L$  einführen, welche die Minkowski – Norm invariant lassen:

$$(x')^2 = (Lx)^T \eta (Lx) = x^T \eta x = x^2$$

$$\rightarrow L^T \eta L = \eta \quad \text{oder} \quad \eta_{\mu\nu} L^\mu_\rho L^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$$

Diese Transformationen erfüllen die Gruppeneigenschaften Abgeschlossenheit und Assoziativität, es gibt ein neutrales Element und zu jedem Gruppenelement gibt es ein Inverses. Man spricht von der (homogenen) Lorentzgruppe. Nimmt man noch Translationen hinzu erhält man die Poincarégruppe.

Hier beschränken wir uns auf die Lorentzgruppe, genauer gesagt auf einen Teil von ihr, die eigentlich-orthochrone Lorentzgruppe  $L^{\uparrow}_+$ . Diese ist dadurch gekennzeichnet, dass für die in ihr liegenden Transformationen  $\det L = +1$  und  $L^0_0 \geq 1$  gilt.

Die volle Lorentzgruppe lässt sich in vier disjunkte Stücke einteilen, wobei aber nur die eigentlich-orthochrone LG eine Untergruppe ist, da nur sie ein Einselement enthält.

Das Transformationsverhalten der Vierervektoren nimmt man nun als Prototyp um jenes beliebiger Tensoren  $T$  zu definieren:

$$T'^{\nu_1 \nu_2 \dots}_{\mu_1 \mu_2 \dots} = L^{\rho_1}_{\mu_1} L^{\rho_2}_{\mu_2} \dots L^{\nu_1}_{\sigma_1} L^{\nu_2}_{\sigma_2} \dots T^{\sigma_1 \sigma_2 \dots}_{\rho_1 \rho_2 \dots}$$

Durch das linear-homogene Transformationsverhalten wird die Erfüllung des Relativitätsprinzips automatisch gewährleistet.

Vom systematischen Standpunkt stellt sich nun die Frage:

**Sind Tensoren die einzigen Größen, welche linear-homogenes Transformationsverhalten unter LT aufweisen?**

Diese Frage kann positiv beantwortet werden, und führt auf die sogenannten Spinoren.

Die geeigneten Mittel, die Frage zu beantworten liefert die Darstellungstheorie. Eine Darstellung einer Gruppe ist ein Homomorphismus mit den Eigenschaften:

$$\mathbf{1} \rightarrow T(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_d$$

$$T(L_2)T(L_1) = T(L_2 L_1)$$

$$\rightarrow [T(L)]^{-1} = [T(L^{-1})]$$

Man kann zeigen, dass jede LT eines beliebigen Feldes eine Darstellung der LG ist. Das Problem besteht nun darin, die inäquivalenten irreduziblen Darstellungen zu finden.

Die infinitesimale Form der Darstellung liefert die Generatoren **M** der Lorentzgruppe in der betrachteten Darstellung:

$$T(L(\delta\omega)=\mathbf{1}-\delta\omega) = \mathbf{1}_d - \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}\mathbf{M}^{\mu\nu}$$

$$(\mathbf{M}_{\mu\nu}) = -(\mathbf{M}_{\nu\mu})$$

$\omega$  ist ein antisymmetrischer Parametertensor und hat 6 unabhängige Komponenten, die man z.B. als die Komponenten eines Drehvektors und eines Geschwindigkeitsvektors wählen kann.

Für diese Generatoren **M** erhält man folgende Vertauschungsrelationen:

$$[\mathbf{M}^{\mu\nu}, \mathbf{M}^{\rho\sigma}] =$$

$$= i(\eta^{\mu\rho}\mathbf{M}^{\nu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\mathbf{M}^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma}\mathbf{M}^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}\mathbf{M}^{\mu\sigma})$$

Endliche Darstellungen lassen sich dann als Exponentialterm schreiben:

$$T(L(\omega)) = \exp\left[\frac{-i}{2}\omega_{\mu\nu}\mathbf{M}^{\mu\nu}\right]$$

Man definiert nun zweckmäßigerweise Drehimpulsoperatoren **J** und Boostoperatoren **K** gemäß den beiden wichtigsten Wirkungen von Lorentztransformationen, Drehungen und Geschwindigkeitstransformationen

$$\mathbf{J}^k = -\frac{1}{2}\epsilon^k_{mn}\mathbf{M}^{mn}$$

$$\mathbf{K}^n = \mathbf{M}^{n0}$$

und erhält neue Vertauschungsrelationen:

$$[\mathbf{J}^k, \mathbf{J}^l] = i\epsilon^{klm}\mathbf{J}^m$$

$$[\mathbf{J}^k, \mathbf{K}^l] = i\epsilon^{klm}\mathbf{K}^m$$

$$[\mathbf{K}^k, \mathbf{K}^l] = -i\epsilon^{klm}\mathbf{J}^m$$

Man sieht, dass **J** und **K** i.A. nicht kommutieren. In einem nächsten Schritt geht man nun zu komplexen Größen über und definiert die sogenannten A - und B - Spin - Vektoren durch:

$$\vec{\mathbf{A}} := \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{J}} + i\vec{\mathbf{K}}) \quad \vec{\mathbf{B}} := \frac{1}{2}(\vec{\mathbf{J}} - i\vec{\mathbf{K}})$$

$$[\mathbf{A}^k, \mathbf{A}^l] = i\epsilon^{klm}\mathbf{A}^m \quad [\mathbf{B}^k, \mathbf{B}^l] = i\epsilon^{klm}\mathbf{B}^m$$

$$[\mathbf{A}^k, \mathbf{B}^l] = 0$$

Im Ergebnis erhält man, dass sich die Lie - Algebra der Lorentzgruppe L als direkte Summe zweier SU(2) Lie - Algebren schreiben lässt. L ist also lokal isomorph zu einem direkten Produkt SU(2)⊗SU(2), jedoch fortgesetzt zu komplexen und unbeschränkten Drehparametern.

Endlichdimensionale irreduzible Darstellungen der Lorentzgruppe erhält man dann als direkte Produkte zweier irreduzibler SU(2) Darstellungen.

$$D_{(m_1, m_2), (n_1, n_2)}^{(j_1, j_2)}(\omega) = D_{m_1, n_1}^{j_1}(\vec{\varphi} - i\vec{\lambda}) D_{m_2, n_2}^{j_2}(\vec{\varphi} + i\vec{\lambda})$$

Damit ist das Problem, die irreduziblen Darstellungen der LG zu klassifizieren gelöst. Die Darstellungen sind durch zwei ganz- oder- halbzahlige Indizes zu kennzeichnen, welche den Gewichten der irred. Darstellungen der beiden Drehgruppen entsprechen.

## 3.) Fundamentaldarstellungen:

Die beiden Fundamentaldarstellungen der Lorentzgruppe sind diejenigen mit den Gewichten (0, 1/2) bzw. (1/2, 0).

$$(j_1, j_2) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ und } \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{mit } D^{(1/2)}(\vec{\zeta}) = \exp\left(\frac{-i}{2}\vec{\zeta}\vec{\sigma}\right) \quad \vec{\zeta} \in \mathbb{C}^3$$

a) Die Darstellung mit  $(j_1, j_2) = (1/2, 0)$  nennt man linkshändige Weyl-Spinor-Darstellung

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{2}\vec{\sigma} & \vec{B} &= 0 \\ \rightarrow \vec{J} &= \frac{1}{2}\vec{\sigma} & \vec{K} &= -\frac{i}{2}\vec{\sigma} \end{aligned}$$

Der Darstellungsraum ist der Raum der komplexen Zweierspalten mit Transformationsmatrix  $S_1 \in SL(2, \mathbb{C})$

$$\chi = (\chi_\alpha) = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

$$\chi'_\alpha = (S_1(\omega))_\alpha^\beta \chi_\beta$$

$$\begin{aligned} (S_1(\omega)) &= D^{(1/2)}(\vec{\varphi} - i\vec{\lambda}) \\ &= \exp\left[(-i\vec{\varphi} - \vec{\lambda}) \cdot \frac{1}{2}\vec{\sigma}\right] \in SL(2, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Der einzige invariante Spinor, der eine Metrik definiert, ist der antisymmetrische Spinor 2. Stufe:

$$\epsilon = (\epsilon_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{\alpha\beta} \epsilon_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}$$

$$\text{Metrik: } (\varphi, \chi) := \varphi^{\alpha} \chi_{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta} \varphi_{\beta} \chi_{\alpha}$$

b) Die Darstellung  $(j_1, j_2) = (0, 1/2)$  heißt rechtshändige Weyl-Spinor-Darstellung

$$\begin{aligned} \vec{A} &= 0 & \vec{B} &= \frac{1}{2} \vec{\sigma} \\ \rightarrow \vec{J} &= \frac{1}{2} \vec{\sigma} & \vec{K} &= \frac{i}{2} \vec{\sigma} \end{aligned}$$

Der Darstellungsraum ist der Raum der rechtshändigen oder Weyl-Spinoren 2. Art mit der Darstellungsmatrix  $S_2 \in SL(2, \mathbb{C})$ . Da zwischen den beiden Darstellungsräumen zu unterscheiden ist, benutzt man hier gepunktete Indizes:

$$\bar{\eta} = (\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}) = \begin{pmatrix} \bar{\eta}^{\dot{1}} \\ \bar{\eta}^{\dot{2}} \end{pmatrix}$$

$$\eta'^{\dot{\alpha}} = (S_2(\omega))^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}}$$

$$\begin{aligned} (S_2(\omega)) &= D^{(1/2)}(\vec{\varphi} + i\vec{\lambda}) \\ &= \exp\left[(-i\vec{\varphi} + \vec{\lambda}) \cdot \frac{1}{2} \vec{\sigma}\right] \in SL(2, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

Der Metrik definierende Spinor hat folgende Gestalt:

$$\bar{\epsilon} = (\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\bar{\epsilon}^{-1} \quad \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \bar{\epsilon}^{\dot{\gamma}\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$$

$$\text{Metrik: } (\bar{\vartheta}, \bar{\eta}) := \bar{\vartheta}_{\dot{\alpha}} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} = \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\vartheta}^{\dot{\beta}} \bar{\eta}^{\dot{\alpha}}$$

Es lässt sich zeigen, dass die Beziehung zwischen diesen beiden Fundamentaldarstellungen in einer Komplexkonjugation besteht, d.h. zwischen einer gepunkteten und einer ungepunkteten Komponente desselben Spinors besteht der Zusammenhang:

$$\chi_{\dot{\alpha}} = (\chi_{\alpha})^*$$

# 4.) Zusammenhang zwischen Tensoren und Spinoren:

Die Transformation eines nach der Darstellung  $D^{(1/2,1/2)}$  transformierenden Spinors sieht folgendermaßen aus:

$$X'^{A\dot{Y}} = A^A_B A^{\dot{Y}}_{\dot{Z}} X^{B\dot{Z}}$$

Die Spinorkomponenten können als Linearkombinationen von Komponenten eines Vierervektors  $x^\mu$  geschrieben werden. Dazu definiert man die aus den Pauli – Matrizen hervorgehenden Verbindungsgrößen:

$$\sigma_\mu^{A\dot{B}} := \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_\mu)^{AB}$$

$$\sigma^\mu_{A\dot{B}} := \frac{1}{\sqrt{2}} (\tilde{\sigma}^{\mu T})_{AB}$$

Man erhält damit:

$$X^{A\dot{Y}} = x^\mu \sigma_\mu^{A\dot{Y}} \quad x^\mu = X^{A\dot{Y}} \sigma^\mu_{A\dot{Y}}$$

wobei gelten soll

$$\tilde{\sigma}^\mu := \sigma_\mu$$

Dieses Schema lässt sich auf beliebige Tensoren verallgemeinern. Es definiert die Zuordnung eines äquivalenten Spinors zu einem Tensor:

$$T^{\mu\nu\dots} \rightarrow T^{A\dot{X}B\dot{Y}\dots} = T^{\mu\nu\dots} \sigma_\mu^{A\dot{X}} \sigma_\nu^{B\dot{Y}} \dots$$

Umgekehrt kann man auch einem beliebigen Spinor einen äquivalenten Tensor zuordnen:

$$T^{A\dot{X}B\dot{Y}\dots} \rightarrow T^{\mu\nu\dots} = T^{A\dot{X}B\dot{Y}\dots} \sigma^\mu_{A\dot{X}} \sigma^\nu_{B\dot{Y}} \dots$$