

Einführung in den Symmetriebegriff und gruppentheoretische Grundlagen

Cornelia Petrović*

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---------------------------------------|----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Gruppentheoretische Grundlagen | 2 |
| 3 | Symmetrien und Erhaltungssätze | 4 |

1 Einleitung

Ziel dieses Vortrages war es, den Begriff der Symmetrie genauer zu erläutern. Der Vortrag gliederte sich in zwei Teile; der erste Teil befasste sich zunächst mit einem Beispiel für geometrische Symmetrien, anhand dessen ich Grundlagen der Gruppentheorie erläutern wollte. Im zweiten Teil wandte ich mich der Bedeutung von Symmetrien für die Analyse von physikalischen Systemen und insbesondere dem Zusammenhang von Symmetrien und Erhaltungsgrößen zu.

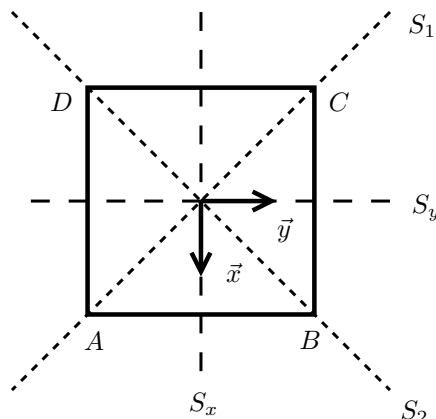
Der Begriff der Symmetrie wird in der Umgangssprache in mehreren Bedeutungen verwendet; zum Einen steht er im Zusammenhang mit den Begriffen Ebenmaß, Ausgewogenheit oder Harmonie (griechisch: “Syn“ Metron“ =“gleiches Maß“), zum Anderen wird er als Synonym für Spiegelsymmetrie benutzt. Der Symmetriebegriff der Physik präzisiert und verallgemeinert nun den Begriff der Spiegelsymmetrie der Umgangssprache; er kann auf Objekte im Raum, auf den Raum selbst, auf die Zeit, auf Aufgaben und Lösungen und auf die Naturgesetze angewendet werden. Im Folgenden soll es nun zunächst um Objekte im Raum gehen.

Üblicherweise bezeichnet man ein solches Objekt als symmetrisch, „wenn man damit etwas anstellen kann, ohne es am Ende geändert zu haben“. Oder präziser formuliert: Ein Objekt heißt symmetrisch, wenn es gegenüber bestimmten Transformationen (Symmetrieoperationen) invariant ist, d.h. im Erscheinungsbild unverändert ist. Wichtige Symmetrien sind Bewegungssymmetrien. Bewegungssymmetrisch heißen Objekte, die durch mindestens eine Bewegung außer der Identität in sich überführt werden. (unter Bewegungen versteht man die Transformationen des Raumes, die den Abstand zweier Punkte unverändert lassen.)

*petrovic@uni-muenster.de

2 Gruppentheoretische Grundlagen

Im Folgenden werden wir uns dem Beispiel für ein bewegungssymmetrisches Objekt zuwenden: dem Quadrat.



Das Quadrat bleibt nach jeder der folgenden Operationen in einer Position, die von der Ausgangsposition nicht zu unterscheiden ist (in Klammern die benutzten Bezeichnungen):

- Rotation um 180° (r_2)
- Rotation um $\pm 90^\circ$ (r_1^+, r_1^-)
- Spiegelung an einer Diagonalen (s_1, s_2)
- Spiegelung an der Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten (s_x, s_y)
- triviale Operation: das Quadrat bleibt unbewegt (e)

Dazu ist anzumerken, dass das Quadrat sich bewegt, die Symmetrieelemente / Achsen bleiben fest im Raum.

Wie man leicht überprüfen kann, ist die Hintereinanderausführung („Multiplikation“) zweier dieser acht Operationen wieder eine solche. Schreibt man sich in eine Tabelle sämtliche Produkte von Operationen auf, erhält man eine sogenannte Verknüpfungstafel. Man stellt dabei fest, dass erstens die Multiplikation nicht immer kommutativ ist, und dass zweitens jedes Symmetrieelement genau einmal in jeder Spalte und Zeile erscheint. Diese zweite Eigenschaft ist hinreichend dafür, dass es sich bei unserer Menge der Symmetrieoperationen zusammen mit der Hintereinanderausführung um eine Gruppe handelt:

Definition: Gruppe

Eine Gruppe ist ein Paar (G, \circ) bestehend aus einer nichtleeren Menge G und einer Abbildung $\circ : G \rightarrow G$ (genannt „Verknüpfung“) derart, dass :

1. $a, b \in G \Rightarrow a \circ b \in G$. (Abgeschlossenheit)
2. $\exists e \in G : \forall a \in G : a \circ e = e \circ a = a$. (Existenz eines neutralen Elementes)
3. $\forall a \in G \exists \bar{a} \in G : a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = e$. (Existenz von inversen Elementen)
4. $\forall a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$. (Assoziativität der Verknüpfung)

Eine Gruppe heißt *abelsch* oder *kommutativ*, wenn für alle $a, b \in G$ gilt: $a \circ b = b \circ a$. Zuweilen ist es bequem, die Elemente einer Gruppe nicht als unabhängige Größen aufzufassen, sondern aus den Elementen eines erzeugenden Systemes aufgebaut zu denken. In unserem Fall könnte man z.B. s_x und r_1^+ als erzeugende Elemente wählen. r_2 beispielsweise lässt sich nämlich auch schreiben als $(r_1^+)^2$.

Die Anzahl der Elemente einer Gruppe nennt man die *Ordnung* der Gruppe, sie kann endlich oder unendlich sein. Ein Beispiel für eine endliche Gruppe ist die eben betrachtete Gruppe der Symmetrieoperationen am Quadrat, die sogenannte Diedergruppe. Beispiele für unendliche Gruppen sind \mathbb{Z} mit der Addition sowie die Gruppe aller möglichen Drehungen des Kreises um 0 um eine Achse durch 0 senkrecht zur Zeichenebene. Der Begriff der „Ordnung“ kann sich aber auch auf ein einzelnes Gruppenelement beziehen: die Ordnung eines Elementes $a \in G$ ist n , wenn $n \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl ist für die gilt: $a^n = e$.

Definition: Untergruppe

Eine Untermenge $U \subset G$ heißt *Untergruppe*, wenn sie die Axiome 1.-4. erfüllt.

Die Ordnung einer Untergruppe teilt die Ordnung der betrachteten Gruppe. $k = \frac{|G|}{|U|}$ nennt man *Index*.

Klassen

Jede Gruppe kann in *Klassen* unterteilt werden: Man denke sich ein Element $r \in G$ herausgegriffen, x sei ein weiteres Element der Gruppe, und man untersucht das Produkt $x^{-1}rx$, das natürlich wieder in G liegt und als *zu r konjugiert* bezeichnet wird. Bildet man nun unter Festhaltung von r alle Produkte der Form $x^{-1}rx$, wobei x der Reihe nach alle Elemente der Gruppe durchlaufe, so stellt man fest, dass diese Produkte i.A. nicht alle Gruppenelemente umfassen, sondern nur eine Teilmenge, die man als *Klasse der Konjugierten* oder kurz als *Klasse* bezeichnet. Die Diedergruppe z.B. zerfällt in fünf Klassen.

Klassen besitzen einige spezielle Eigenschaften:

- Alle Elemente einer Klasse sind von derselben Ordnung.
- Wenn ein Element mit allen Elementen der Gruppe vertauscht, so muss dieses Element selbst eine Klasse bilden:
 $x^{-1}rx = x^{-1}xr = er = r$.
 In abelschen Gruppen stellt also jedes Element eine Klasse für sich da.

Der Vollständigkeit halber sollte auch der Begriff des *Normalteilers* erwähnt werden: Ein Normalteiler N ist eine Untergruppe, die aus vollständigen Klassen der ursprünglichen Gruppe zusammengesetzt ist. Mit anderen Worten:

$$n \in N, x \in G. \Rightarrow x^{-1}nx \in N.$$

Andere Bezeichnungen sind auch invariante Untergruppe oder selbstkonjugierte Untergruppe.

Matrixdarstellung und irreduzible Darstellungen

Wir haben gesehen, dass man verschiedene Präsentationen von Gruppen finden kann: einmal durch explizites Benennen der einzelnen Elemente aber auch durch das Angeben von Erzeugenden. Man kann sich leicht vorstellen, dass es möglich sein müsste, eine Gruppe von Matrizen zu finden, die die gleiche Multiplikationstafel besitzt wie die vorgegebene Gruppe. So etwas nennt man eine *Matrixdarstellung* der Gruppe. Genauer gilt:

Sei (G, \circ) eine Gruppe, (G', \bullet) eine weitere Gruppe und $\varphi: (G, \circ) \rightarrow (G', \bullet)$ ein Homomorphismus zwischen den beiden Gruppen, sprich für alle $a, b \in G$ gilt:

$$\varphi(a \circ b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b),$$

dann nennt man φ eine *Darstellung* und die $g' \in G'$ *Darsteller*. Manchmal wird auch die Gruppe selbst die Darstellung genannt (s.o.), die Sprechweise ist hier nicht eindeutig. Ist φ ein Homomorphismus zwischen zwei Gruppen und sind die beiden Gruppen von derselben (endlichen) Ordnung, so nennt man φ einen *Isomorphismus*. (Im Falle unendlicher Gruppenordnungen muss φ bijektiv sein.)

Die Bedeutung von all dem liegt darin, dass sehr oft verschiedene Gruppen, die in verschiedenen Situationen auftreten und deren Elemente daher verschiedene physikalische Bedeutung besitzen, in Wirklichkeit alle isomorph zu einer abstrakten Gruppe sind, deren Eigenschaften man ein für alle Mal analysieren kann.

Natürlich gibt es unendlich viele Darstellungen, insbesondere Matrixdarstellungen; eine besonders interessante Darstellung, die sogenannte „reguläre Darstellung“, erhält man auf die folgende Weise: man ordnet die Gruppentafel so um, dass das neutrale Element stets auf der Diagonalen steht. Dann greift man sich jeweils ein Gruppenelement heraus und ersetzt dieses in der Tafel durch 1, alle anderen durch 0. Man erhält so quadratische Matrizen, deren Dimension gleich der Ordnung der Gruppe ist.

Eine besondere Menge von Darstellungen wird durch die sogenannten *irreduziblen Darstellungen* gebildet. Nehmen wir an, wir hätten eine Gruppe von Matrizen A, B, \dots, M , von denen wir jede einer unitären Transformation unterziehen (X unitär):

$X^{-1}AX, X^{-1}BX, \dots, X^{-1}MX$. Wenn es möglich ist, eine Gruppe von Matrizen durch Anwendung derselben unitären Transformation auf jedes ihrer Elemente so zu vereinfachen, dass alle dieselbe Blockdiagonalform besitzen, nennt man die Matrixdarstellung *reduzibel*. Denn wenn die Gruppe der Matrizen A, B, \dots, M eine Darstellung einer gegebenen Gruppe bilden, so können wir aus jeder der Matrizen $X^{-1}AX, X^{-1}BX, \dots, X^{-1}MX$ den ersten (oder irgendeinen anderen) Block nehmen, und diese (nun kleineren) Matrizen bilden wiederum eine Matrixdarstellung der geg. Gruppe. Existiert kein solches X , so sagt man, dass die Matrizen A, B, \dots, M eine *irreduzible Darstellung* der Gruppe bilden. Die Anzahl der irreduziblen Darstellungen ist endlich; es gilt:

Anzahl der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe = Anzahl der Klassen der Gruppe.

3 Symmetrien und Erhaltungssätze

Im zweiten Teil des Vortrages ging es um die Frage, welchen Einfluss Symmetrien auf physikalische Systeme haben. Insbesondere wollen wir uns der Frage zuwenden, wann Erhaltungssätze in physikalischen Theorien auftreten. Die überraschend einfache Antwort ist, dass man für jede einem physikalischen System zugrunde liegende Symmetrie bei einer Transformation der Koordinaten oder anderer dynamischer Variabler eine erhaltene „Ladung“ definieren kann, die dieser Symmetrie entspricht. Gibt es auf der anderen Seite eine dem System zugehörige Erhaltungsgröße, dann liegt dem ein Symmetrie- oder Invarianzprinzip zugrunde. Diese Feststellung ist das sogenannte *Noether-Theorem*; mit anderen Worten: Jede Menge von Transformationen, die die Bewegungsgleichungen eines Systems unverändert lassen, definieren eine Symmetrie des physikalischen Systems.

Um uns die Aussage des Noether-Theorems zu veranschaulichen, haben wir Beispiele aus der klassischen Physik sowie der Quantenmechanik betrachtet. So haben wir zuerst gezeigt, dass in der klassischen Physik aus der Annahme der Homogenität des Raumes, d.h. der (räumlichen) Translations-Invarianz, die Erhaltung des Impulses für

ein abgeschlossenes System folgt. Weiterhin impliziert die Homogenität der Zeit Energieerhaltung sowie die Isotropie des Raumes Drehimpulserhaltung (für abgeschlossene Systeme).

Wir wollen nun bekannte Transformationen aus der klassischen Mechanik übertragen und vollführen dies an dem einfachsten Beispiel, der Translation:

$$x' = x + a, \quad \mathbb{R}^3. \quad (3.1)$$

Als nächsten Schritt führen wir den Operator $U(a)$ ein,

$$\begin{aligned} U(a) : L^2((\mathbb{R})^3) &\rightarrow L^2((\mathbb{R})^3), \\ [U(a)]\phi(x) &= \phi(x - a). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dieser Operator besitzt eine Reihe von Eigenschaften:

- $U(a)$ ist ein linearer Operator, er respektiert Superposition von Wellenfunktionen.
- $U(a)$ ist unitär und respektiert nicht nur die Normierung einer Wellenfunktion, sondern erhält auch Wahrscheinlichkeiten.
- Es gilt : $U(a)U(b) = U(a + b)$, die Menge aller Operatoren $U(a)$ bildet also eine Gruppe von unitären Operatoren.

Wir nehmen nun an, dass $\phi(x - a)$ bezüglich a in eine konvergente Taylorreihe entwickelbar ist:

$$\phi(x - a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-a \cdot \nabla)^n \phi(x) = [U(a)]\phi(x). \quad (3.3)$$

Unter der Verwendung der Ortsdarstellung des Impulsoperators ($P = -i\nabla$) erhalten wir also:

$$U(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ia \cdot P)^n}{n!} = \exp(-iaP). \quad (3.4)$$

Dies bezeichnet man als *Exponentialkonstruktion* der unitären Gruppe $U(a)$. Diese Gruppe hat drei Generatoren, nämlich die Komponenten von P . Wir haben also $U(a)$ aus P konstruiert; umgekehrt gilt:

$$-ia \cdot P = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} [U(ta) - 1]. \quad (3.5)$$

Man nennt $-ia \cdot P$ die *infinitesimale Transformation* der einparametrischen Schar $U(ta)$, $t \in \mathbb{R}$.

Bewegungsgleichung für räumlich verschobene Zustände

Der Zustand $\phi(x, t)$ wird bei räumlicher Verschiebung zum selben Zeitpunkt in den Zustand

$$\phi(x - a, t) = \phi'(x, t) \quad (3.6)$$

überführt. $\phi(x, t)$ genügt der zeitabhängigen Schrödingergleichung:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = H \phi(x, t). \quad (3.7)$$

Es stellt sich die Frage: Unter welchen Bedingungen genügt der verschobene Zustand derselben zeitlichen Entwicklung wie $\phi(x, t)$? (Genau das bedeutet nämlich die Forderung nach Homogenität des Raumes: Alle räumlich verschobenen Zustände müssen demselben Naturgesetz (der Schrödingergleichung) genügen.) Eine kurze Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \phi'(x, t) &= i \frac{\partial}{\partial t} U(a) \phi(x, t) &= U(a) i \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) \\ &= U(a) H \phi(x, t) \\ &= U(a) H U(a)^{-1} \phi'(x, t). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Es muss also gelten:

$$U(a) H U(a)^{-1} = H \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow [U(a), H] = 0 \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow [\exp(-ia \cdot P), H] = 0. \quad (3.11)$$

a war beliebig gewählt, also ist die letzte Gleichung gleichbedeutend mit

$$[P, H] = 0 = i \frac{d}{dt} P, \quad (3.12)$$

P ist also eine Konstante der Bewegung, wie wir es nach unseren „klassischen“ Überlegungen bereits erwartet hatten.

Wir wollen nun schließlich den Begriff der *Symmetriegruppe* allgemein fassen. Dazu denken wir uns ein physikalisches System, d.h. wir benennen den Zustandsraum \mathcal{H} und den Hamiltonoperator H . Sei (G, \circ) eine abstrakte Gruppe,

$$U(g) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

für jedes $g \in G$ entweder unitär oder antiunitär, so dass

$$U(g) U(g') = U(g \circ g') \quad \forall g, g' \in G, \quad (3.13)$$

und gilt $[U(g), H] = 0 \quad \forall g \in G$, so heißt G eine *Symmetriegruppe* für das physikalische System und $g \mapsto U(g)$ ihre Darstellung.

Mit anderen Worten: Eine Transformationsgruppe ist genau dann eine Symmetriegruppe, wenn der Hamiltonoperator des Systems mit allen unitären Operatoren der Darstellung kommutiert.

Der Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Symmetriegruppen stellt sich schlussendlich folgendermaßen dar:

Ist A eine Erhaltungsgröße, d.h. $[A, H] = 0$, so beschreibt

$$U(s) = \exp(isA) \quad \text{mit } s \in \mathbb{R} \quad (3.14)$$

eine unitäre Darstellung der additiven Gruppe \mathbb{R} . Diese Darstellung macht \mathbb{R} zu einer Symmetriegruppe, denn es gilt $[\exp(isA), H] = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Umgekehrt führt jede einparametrische Symmetriegruppe durch Übergang zur infinitesimalen Transformation auf eine Erhaltungsgröße.