

Seminar zum Thema
Modelle und Methoden in der statistischen
Mechanik und Feldtheorie

Phasenübergänge und kritische Phänomene

Einführung Landau-Theorie

von Sabine Körbel

Vortrag vom 12.11.2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung: Phasenübergänge, kritische Phänomene	3
1.1	Ordnung von Phasenübergängen	4
1.2	Kritische Exponenten	4
1.3	Korrelationslänge	6
1.4	Ordnungsparameter	7
2	Landau-Theorie	8
2.1	Ansatz, Berechnung der kritischen Exponenten	8
2.2	Vergleich mit experimentellen Ergebnissen	16
2.3	Gültigkeitsbereich der Landau-Theorie	16
2.4	Zusammenfassung	17
2.5	Literaturverzeichnis	17

1 Einführung: Phasenübergänge, kritische Phänomene

Aus dem Alltag kennt man Phasen vor allem als Aggregatzustände, z. B. des Wassers. Andere Beispiele für Phasenübergänge sind der Übergang vom Leiter zum Supraleiter, von der flüssigen in die superfluide Phase, z. B. bei Helium, oder zwischen Kristallstrukturen, wie z. B. bei Zinn.

Im Fall des Übergangs von der flüssigen in die Gasphase gibt es bei Wasser unterhalb des kritischen Punktes einen Sprung in der Dichte. Am kritischen Punkt selbst verhält sich die Dichte kontinuierlich, aber eine andere Größe, die isotherme Kompressibilität

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T,$$

divergiert.

Allgemein verhält sich bei einem Phasenübergang eine thermodynamische Größe unstetig. Dabei kann es sich um einen endlichen Sprung oder um Divergenz handeln.

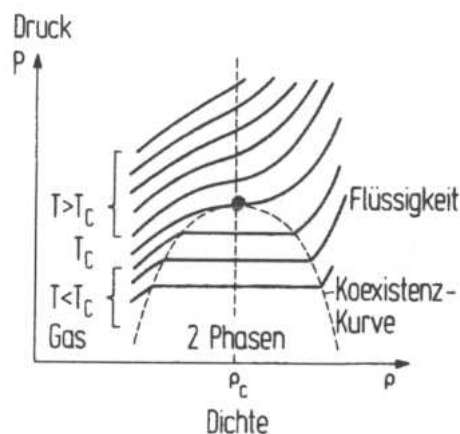
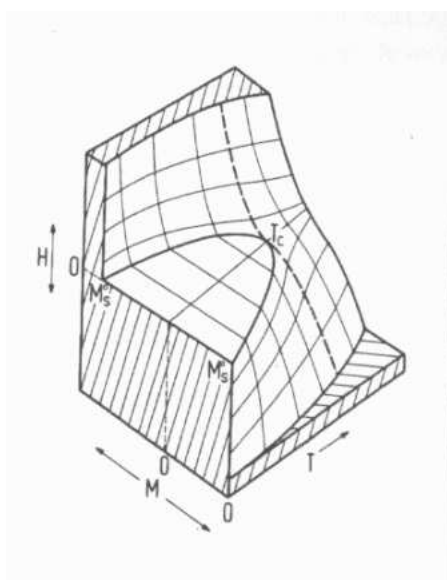


Abbildung 1: Phasendiagramme: links ein Ferromagnet, rechts ein van-der-Waals-Gas

1.1 Ordnung von Phasenübergängen

Beim Beispiel des Übergangs von flüssig nach fest unterhalb des kritischen Punktes ist die erste Ableitung der freien Energie

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_T = V$$

unstetig.

Man spricht von einem Phasenübergang erster Ordnung, wenn die erste Ableitung eines thermodynamischen Potentials nach einer seiner natürlichen Variablen unstetig ist.

Am kritischen Punkt selbst ist die zweite Ableitung

$$-\frac{1}{V} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\right)_T = \kappa_T$$

unstetig.

Nach Ehrenfest ist ein Phasenübergang von n-ter Ordnung, wenn bei stetigen Ableitungen der Ordnungen $\leq n-1$ die n-te Ableitung eines thermodynamischen Potentials nach einer seiner natürlichen Variablen beim Übergang unstetig ist.

1.2 Kritische Exponenten

Experimente zeigen, daß sich völlig unterschiedliche thermodynamische Systeme, wie z. B. ein Magnet und ein Gas, in der Nähe des kritischen Punktes qualitativ gleich verhalten. Thermodynamische Größen wie z. B. die Wärmekapazität lassen sich durch einen Potenzausdruck beschreiben, dessen Exponent φ für unterschiedliche Systeme und Materialien gleich ist:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon) \sim |\epsilon|^\varphi \text{ mit } \epsilon = \frac{T - T_C}{T_C}.$$

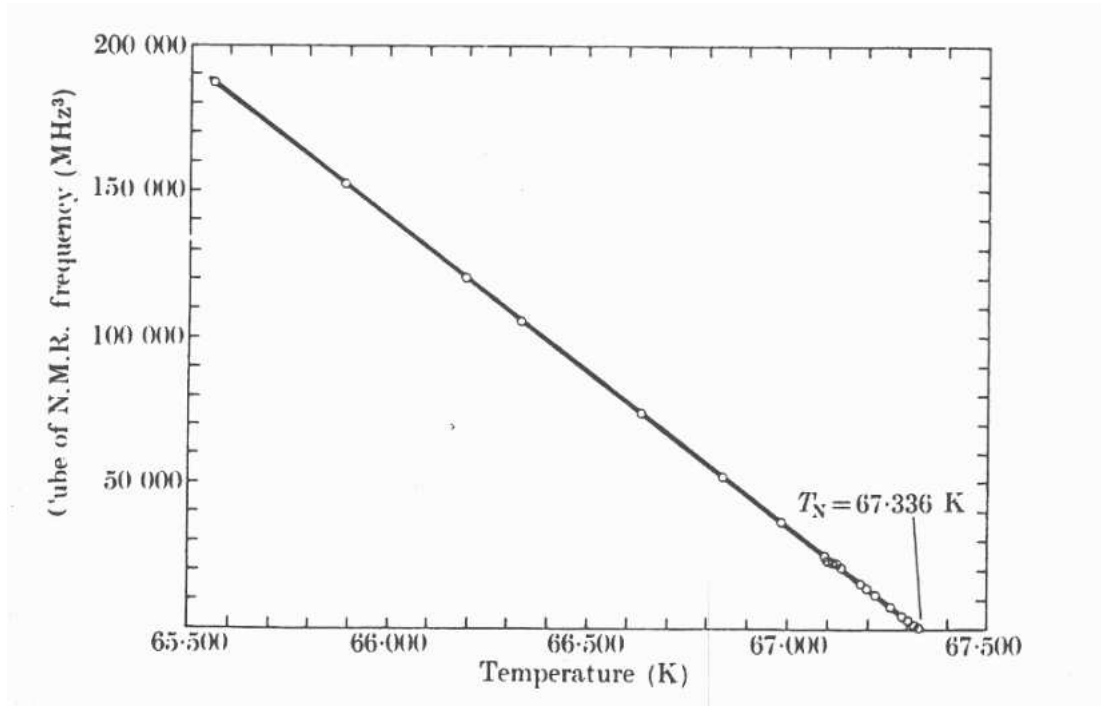


Abbildung 2: 3. Potenz der spontanen Magnetisierung M^3 gegen Temperatur T , offenbar $M \sim (T - T_C)^{1/3}$

Um auch logarithmische Divergenz durch einen Exponenten zu beschreiben, definiert man

$$\varphi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln f(\epsilon)}{\ln |\epsilon|} \text{ mit } \varphi = 0 \text{ f\"ur } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f \sim \ln(\epsilon).$$

Die kritischen Exponenten beim realen Gas	beim Magneten
$C_V \sim (-\epsilon)^{-\alpha'}$ auf der Koexistenzkurve	$C_H \sim (-\epsilon)^{-\alpha'}$ f\"ur $T < T_C$, $H = 0$
$C_V \sim \epsilon^{-\alpha}$ f\"ur $T > T_C$ und die krit. Dichte	$C_H \sim \epsilon^{-\alpha}$ f\"ur $T > T_C$, $H = 0$
$\Delta\rho \sim (-\epsilon)^\beta$ auf der Koexistenzkurve	$M \sim (-\epsilon)^\beta$, $H = 0$
$\kappa_T \sim (-\epsilon)^{-\gamma'}$ auf der Koexistenzkurve	$\chi_T \sim (-\epsilon)^{-\gamma'}$ f\"ur $T < T_C$, $H = 0$
$\kappa_T \sim \epsilon^{-\gamma}$ f\"ur $T > T_C$ und die krit. Dichte	$\chi_T \sim \epsilon^{-\gamma}$ f\"ur $T > T_C$, $H = 0$
$p - p_C \sim (\rho - \rho_C)^\delta$ auf der krit. Isothermen	$H \sim M^\delta$ auf der krit. Isothermen
$\xi \sim (-\epsilon)^{-\nu'}$ auf der Koexistenzkurve	$\xi \sim (-\epsilon)^{-\nu'}$ f\"ur $T < T_C$, $H = 0$
$\xi \sim \epsilon^{-\nu}$ f\"ur $T > T_C$ und die krit. Dichte	$\xi \sim \epsilon^{-\nu}$ f\"ur $T > T_C$, $H = 0$

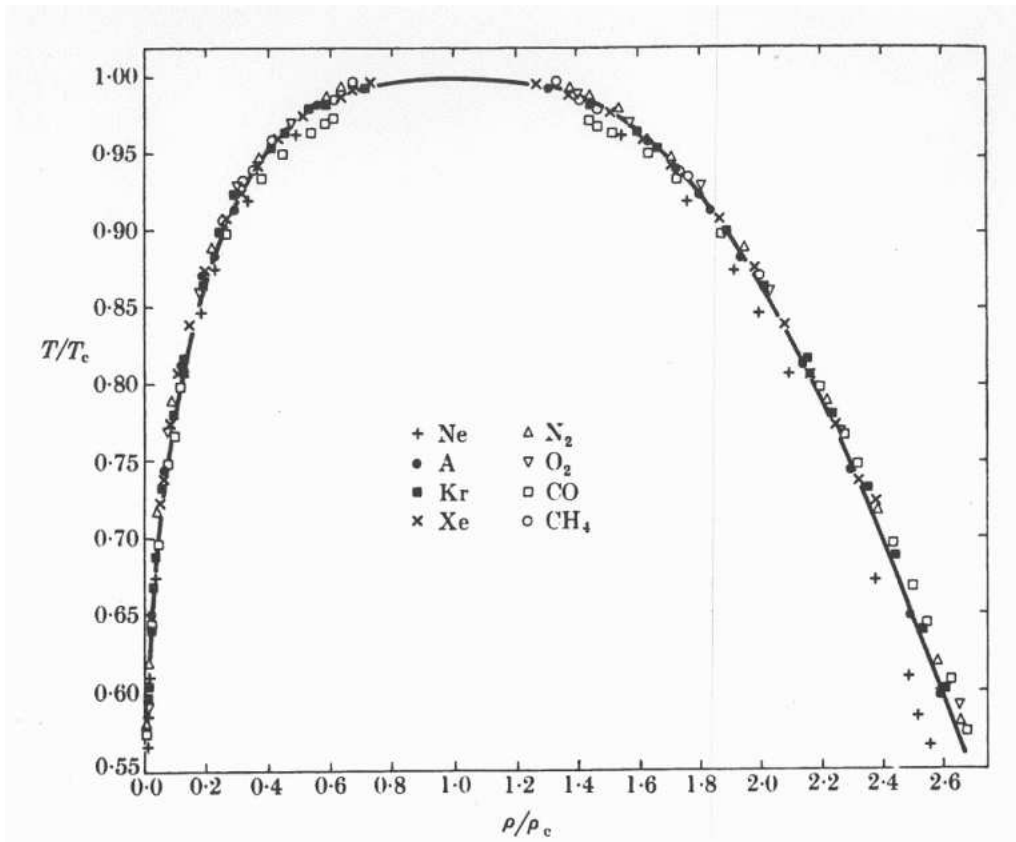


Abbildung 3: reduz. Temp. gegen reduz. Dichte, offenbar $\rho - \rho_C \sim (T - T_C)^{1/3}$

1.3 Korrelationslänge

Bei der Annäherung an die kritische Temperatur von unten beobachtet man bei einem Ferromagneten, daß sich die Bereiche gleicher Magnetisierung ausdehnen und zu größeren Bereichen zusammenlagern. Die Reichweite der Wechselwirkung der Spins untereinander scheint mit der Temperatur zuzunehmen und bei Erreichen von T_C zu divergieren. Hieraus ergibt sich die Vorstellung einer Korrelationslänge $\xi(T)$ der Wechselwirkung, die bei T_C divergiert, z. B. wie

$$\xi(T) \sim |T - T_C|^{-\nu} \text{ mit } \nu > 0.$$

Die Korrelationslänge ist etwas anderes als die Reichweite der Wechselwirkung, die sich bei allen Temperaturen im wesentlichen nur auf die nächste Umgebung, die nächsten Nachbarn erstreckt.

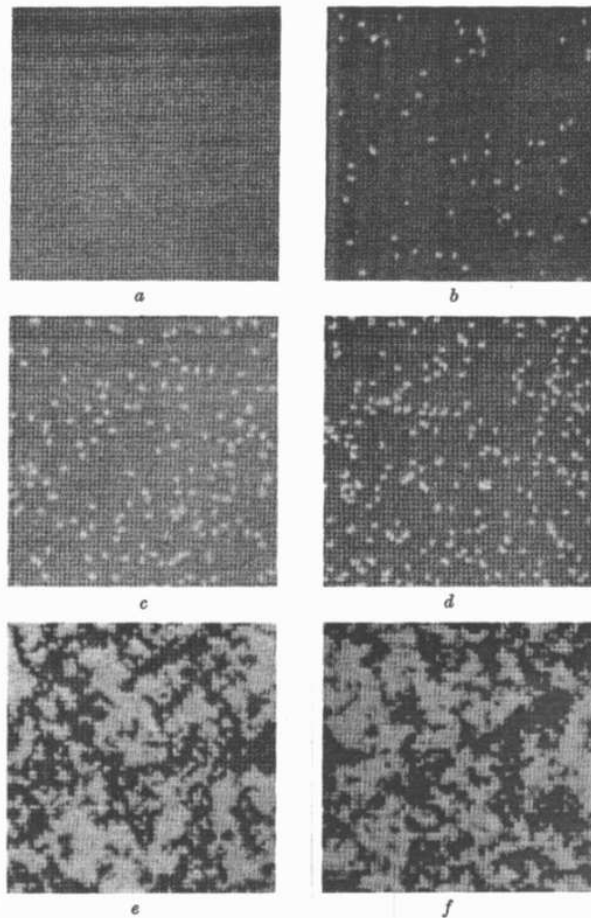


Abbildung 4: von oben links nach unten rechts Annäherung an T_C von unten, Domänenbildung (Gittergasmodell)

Die Temperaturabhängigkeit der Korrelationslänge ist experimentell beobachtbar: Wenn die Korrelationslänge etwa gleich der Wellenlänge von sichtbarem Licht ist, findet Lichtstreuung statt, die sogenannte kritische Opaleszenz.

1.4 Ordnungsparameter

Die Dichten der flüssigen und der Gasphase gleichen sich einander immer mehr an, je näher man sich von unten dem kritischen Punkt nähert. Im kritischen Punkt und darüber gibt es keinen Dichteunterschied mehr.

Eine Größe, die nur unterhalb des kritischen Punktes auftritt, kann ein

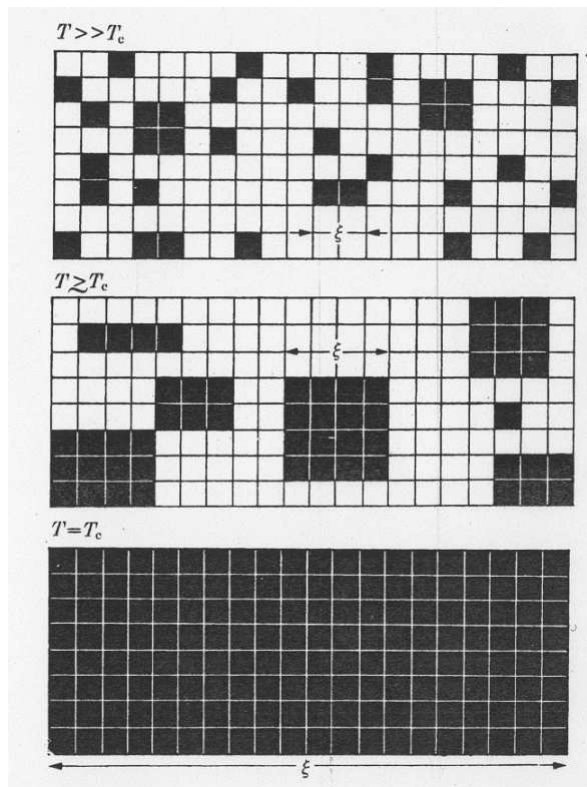


Abbildung 5: Gittermodell: von oben nach unten Annäherung an T_C von oben

Maß für die Ordnung des Systems sein. Man spricht vom Ordnungsparameter. Ein weiteres Beispiel für einen Ordnungsparameter ist die spontane Magnetisierung eines Ferromagneten, die nur unterhalb von T_C auftritt. Die Gleichrichtung der Spins bedeutet einen Zustand höherer Ordnung gegenüber der statistischen Ausrichtung der Einzelspins in der paramagnetischen Phase.

2 Landau-Theorie

2.1 Ansatz, Berechnung der kritischen Exponenten

Die Landau'sche Theorie ist eine allgemeine, klassische Theorie des Verhaltens thermodynamischer Systeme in der Nähe des Phasenübergangs.

Thermodynamische Funktionen lassen sich aus den thermodynamischen Potentialen berechnen. Diese zu finden ist im allgemeinen schwierig: Die Po-

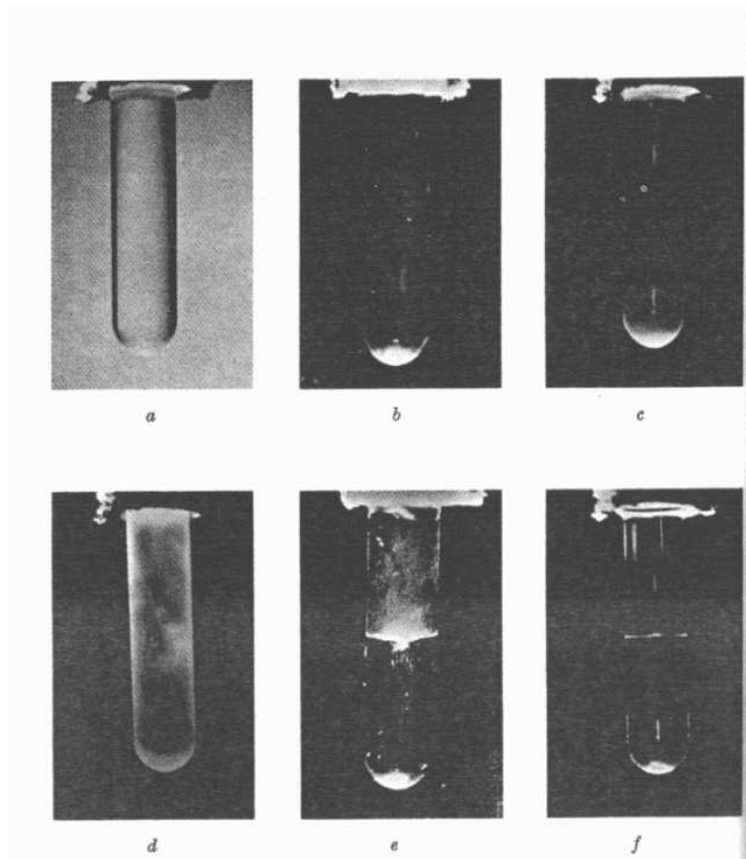


Abbildung 6: von oben links nach unten rechts Annäherung an T_C von oben, Phänomen der kritischen Opaleszenz: verstärkte Lichtstreuung in den Bildern d und e

tentiale leiten sich aus der Zustandssumme ab, die nicht für alle Systeme einfach aufzustellen ist.

Der Landau'sche Ansatz kommt ohne die Zustandssumme aus. Er besteht darin, ein thermodynamisches Potential, z. B. die Gibbs'sche Enthalpie G , die im Gleichgewicht minimal ist, als Potenzreihe nach dem Ordnungsparameter ϕ bzw. nach seiner Dichte $\varphi(\vec{r})$ zu entwickeln:

$$G = \int d^3r [g_0 - \pi\varphi(\vec{r}) + a(T)\varphi(\vec{r})^2 + b(T)\varphi(\vec{r})^4 + c(T)(\nabla\varphi(\vec{r}))^2 + \dots].$$

π ist die zu ϕ konjugierte Kraft. Beim Magneten ist π das äußere Feld B , beim Gas der negative Druck $-p$. Ungerade Potenzen von φ und $\nabla\varphi$ können nicht auftreten, weil die Funktion bei einem gleichzeitigen Vorzeichenwechsel

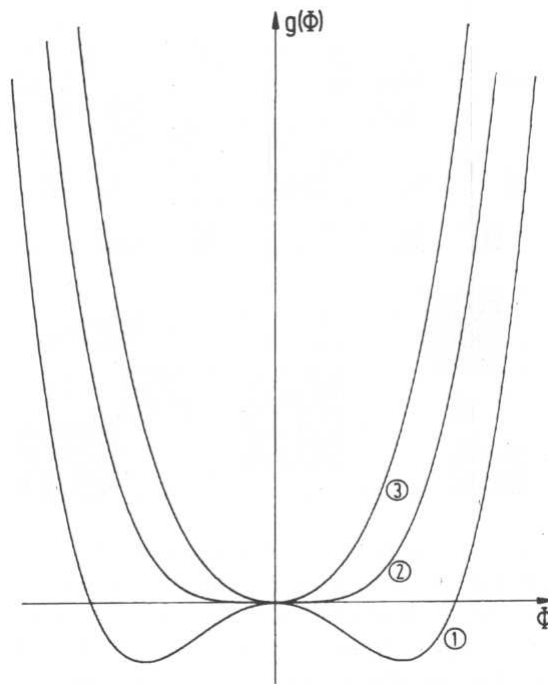


Abbildung 7: Dichte der Gibbs'schen Enthalpie g als Funktion des Ordnungsparameters ϕ

von ψ und π ihr Vorzeichen nicht ändern darf, denn z. B. muß die Enthalpie eines Magneten bei einer gleichzeitigen Umkehr von äußerem Magnetfeld und Magnetisierung unverändert bleiben. g_0 ist die Enthalpiedichte bei verschwindendem Ordnungsparameter, also für $T > T_C$.

Zur Rechnung wird nun die Ortsabhängigkeit des Ordnungsparameters zunächst außer acht gelassen:

$$G = G_0(T) - \pi\phi + \frac{1}{V}a(T)\phi^2 + \frac{1}{V^3}b(T)\phi^4.$$

Der Ordnungsparameter ϕ ist nur unterhalb von T_C von Null verschieden, für $T > T_C$ muß G daher im Gleichgewicht und bei verschwindender äußerer Kraft bei $\phi = 0$ ein Minimum annehmen:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \phi}\right)_T = 2\frac{a(T)\phi}{V} + 4\frac{b(T)\phi^3}{V^3} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}\right)_T (\phi = 0) = \left(\frac{2a(T)}{V} + 12\frac{b(T)\phi^2}{V^3}\right) (\phi = 0) = \frac{2a(T)}{V} > 0.$$

Man muss also fordern: $a(T) > 0$ für $T > T_C$.

Unterhalb T_C ($\phi \neq 0$) ergibt die Minimum-Bedingung:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \phi}\right)_T = 0 \implies 2\frac{a(T)}{V} + 4\frac{b(T)\phi^2}{V^3} = 0 \quad (1)$$

$$\iff \phi = \pm \sqrt{-V^2 \frac{a(T)}{2b(T)}}, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}\right)_T > 0 \implies a(T) + 6\frac{b(T)}{V^2} \stackrel{(1)}{=} 4\frac{b(T)\phi^2}{V^2} > 0.$$

Unterhalb T_C ist also $b(T) > 0$, wegen (2) ist dann $a(T) < 0$, wechselt also bei T_C das Vorzeichen. Man setzt an:

$$a(T) = a_0(T - T_C).$$

Eine höhere, ungerade Potenz erscheint an dieser Stelle zwar auch möglich, später ergäbe sich jedoch ein Widerspruch: die Wärmekapazität würde sich stetig verhalten, was nicht der Realität entspricht. Allgemein sind die Entwicklungskoeffizienten Potenzreihen von $T - T_C$, höhere Ordnungen werden vernachlässigt.

Es interessiert nun das Vorzeichen von $b(T)$ oberhalb T_C . Am kritischen Punkt selbst folgt zunächst aus der Minimum-Bedingung:

$$\left(\frac{\partial^4 G}{\partial \phi^4}\right)_T = T_C = 24\frac{b(T_C)}{V^3} > 0,$$

also $b(T) > 0$ unterhalb und in T_C . Man nimmt nun an, daß $b(T)$ in der Nähe des kritischen Punktes überall positiv und näherungsweise konstant ist ($b(T) \equiv b > 0$). Mit dieser Annahme ergibt sich der kritische Exponent β des Ordnungsparameters bzgl. ϵ :

$$\phi = \pm VT_C \sqrt{\frac{a_0}{2b}} |\epsilon|^{\frac{1}{2}}, \beta = \frac{1}{2}.$$

Für die Wärmekapazität

$$C_{\pi=0} = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_{\pi=0}$$

findet man für $T > T_C$ ($\phi = 0$):

$$C = -T \left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial T^2} \right)_{\pi=0},$$

für $T > T_C$:

$$C = -T \left(\frac{\partial^2}{\partial T^2} \frac{G_0 - Va(T)^2}{4b} \right)_{\pi=0} = -T \left[\left(\frac{\partial^2 G_0}{\partial T^2} \right)_{\pi=0} - \frac{Va_0^2}{2b} \right].$$

In T_C springt C also um

$$\frac{T_C Va_0^2}{2b},$$

der kritische Exponent der Wärmekapazität ist damit $\alpha = 0$.

Der Sprung der Wärmekapazität ist darauf zurückzuführen, daß vorher $a \sim \epsilon$ und nicht z. B. $a \sim \epsilon^3$ gewählt wurde.

Auf der kritischen Isothermen $T = T_C$ ($a(T_C) = 0$) ergibt die Minimum-Bedingung für eine nichtverschwindende äußere Kraft:

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \phi} \right)_T = -\pi + \frac{4b\phi^3}{V^3} = 0 \implies \phi = \frac{1}{V} (4b)^{-\frac{1}{3}} \pi^{\frac{1}{3}}.$$

Der kritische Exponent des Ordnungsparameters bzgl. der äußeren Kraft ist damit $\delta = 3$.

Die Suszeptibilität

$$\chi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \pi} \right)_{\pi=0}$$

läßt sich aus der Minimalbedingung berechnen. Diese lautet für nichtverschwindendes π :

$$2 \frac{a(T)\phi}{V} + 4 \frac{b(T)\phi^3}{V^3} - \pi = 0. \quad (3)$$

Für eine sehr kleine Variation $\delta\pi$ des äußeren Feldes ist die Variation des Ordnungsparameters näherungsweise

$$\delta\phi \sim \delta\pi,$$

$$\phi(\pi) = \phi(\pi = 0) + \delta\phi \equiv \phi_0 + \delta\phi.$$

In die Minimum-Bedingung (3) eingesetzt ergibt das

$$\frac{2a(T)}{V}(\phi_0 + \delta\phi) + 4\frac{b(T)}{V^3}(\phi_0 + \delta\phi)^3 - \delta\pi = 0.$$

2. und 3. Potenzen von $\delta\phi$ können vernachlässigt werden, das führt auf

$$\underbrace{\frac{2a(T)\phi_0}{V} + \frac{4b(T)\phi_0^3}{V^3}}_{=0 \text{ wegen (1)}} + \delta\phi \left(\frac{2a(T)}{V} + \frac{12b(T)\phi_0^2}{V^3} \right) - \delta\pi = 0.$$

Der erste Teil dieses Ausdrucks ist Null, denn er muß die Minimum-Bedingung ohne äußeres Feld erfüllen. Oberhalb von T_C ist $\phi_0 = 0$, daraus ergibt sich

$$\delta\phi = \frac{\delta\pi}{2a(T)}, \text{ also}$$

$$\chi = \left(\frac{\delta\phi}{\delta\pi} \right)_{\pi=0} = \frac{1}{2a(T)} = \frac{1}{2a_0|T - T_C|} \text{ für } T > T_C.$$

Unterhalb von T_C ist $\phi_0^2 = -\frac{V^2 a(T)}{2b(T)}$, und man erhält

$$\left(\frac{\delta\phi}{\delta\pi} \right)_{\pi=0} = \frac{1}{4a(T)} = \frac{1}{4a_0|T - T_C|} \text{ für } T < T_C.$$

Der kritische Exponent der verallgemeinerten Suszeptibilität (es kann sich z. B. auch um die Kompressibilität handeln) ist damit $\gamma = 1$.

Bisher wurde ein ortsunabhängiger Ordnungsparameter vorausgesetzt. Bei einem ortsabhängigen Ordnungsparameter treten an einem bestimmten Ort Fluktuationen auf, die nicht nur durch das lokale äußere Feld, sondern auch durch das Verhalten des Ordnungsparameters an anderen Orten verursacht werden. Diese Wechselwirkung wird durch die Korrelationsfunktion ausgedrückt:

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \varphi(\vec{r})\varphi(\vec{r}') \rangle - \langle \varphi(\vec{r}) \rangle \langle \varphi(\vec{r}') \rangle.$$

$g(\vec{r}, \vec{r}')$ wird Null, wenn keine Korrelation existiert. Dann faktorisiert der erste Term. Mit Hilfe der Korrelationsfunktion

$$g(\vec{r}, \vec{r}')$$

läßt sich später die Korrelationslänge $\xi(T)$ berechnen, die durch Effekte wie z. B. die kritische Opaleszenz eine anschauliche Bedeutung bekommt.

$\langle \phi(\vec{r}) \rangle$ kann in der kanonischen Gesamtheit bestimmt werden. Der Hamilton-Operator hat die Form

$$H = H_0 - \int d^3r' \pi(\vec{r}') \varphi(\vec{r}')$$

mit H_0 als kraftfreiem Operator. Dann ist

$$\langle \varphi(\vec{r}) \rangle = \frac{\text{Sp}(\varphi(\vec{r}) e^{-\beta H})}{\text{Sp}(e^{-\beta H})}.$$

mit der Zustandssumme $Z = \text{Sp}(e^{-\beta H})$.

Daraus erhält man

$$\begin{aligned} \delta \langle \varphi(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{Z} \text{Sp}(\varphi(\vec{r}) (-\beta \delta H) e^{-\beta H}) - \frac{1}{Z^2} \text{Sp}(-\beta H e^{-\beta H}) \text{Sp}(\varphi(\vec{r}) e^{-\beta H}) \\ &= -\beta (\langle \varphi(\vec{r}) \delta H \rangle - \langle \delta H \rangle \langle \varphi(\vec{r}) \rangle). \end{aligned}$$

Mit $\delta H = - \int d^3r' \varphi(\vec{r}') \delta \pi(\vec{r}')$ erhält man jetzt

$$\delta \langle \varphi(\vec{r}) \rangle = \beta \int d^3r' g(\vec{r}, \vec{r}') \delta \pi(\vec{r}'). \quad (4)$$

Die Minimum-Bedingung für G bedeutet bei ortsabhängigem Ordnungsparameter und vorhandener äußerer Kraft:

$$\delta G = \delta \int d^3r [g_0 - \pi \varphi(\vec{r}) + a(T) \varphi(\vec{r})^2 + b(T) \varphi(\vec{r})^4 + c(T) (\nabla \varphi(\vec{r}))^2 + \dots] = 0.$$

Der letzte Term kann wie folgt umgeformt werden:

$$\delta \int d^3r (\nabla \varphi(\vec{r}))^2 = 2 \int d^3r \nabla \varphi(\vec{r}) \delta \nabla \varphi(\vec{r}) = 2 \int d^3r (\nabla(\nabla \varphi \delta \varphi) - \delta \varphi \Delta \varphi).$$

Der erste Term kann in ein Oberflächenintegral umgewandelt werden:

$$\int_V d^3r \nabla(\nabla \varphi \delta \varphi) = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \nabla \varphi \delta \varphi.$$

Die Oberfläche kann so gewählt werden, daß das Integral verschwindet.

Die Minimum-Bedingung lautet jetzt

$$\int d^3r (-\pi(\vec{r}) + 2a(T)\varphi(\vec{r}) + 4b(T)\varphi^3(\vec{r}) - 2c(T)\Delta\varphi(\vec{r})) \delta\varphi(\vec{r}) = 0$$

oder

$$\pi(\vec{r}) = 2a(T)\varphi(\vec{r}) + 4b(T)\varphi^3(\vec{r}) - 2c(T)\Delta\varphi(\vec{r})$$

bzw. mit Hilfe von (4)

$$\begin{aligned} \delta\pi(\vec{r}) &= \int d^3r' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta\pi(\vec{r}') \\ &= \beta (2a(T) + 12b(T)\langle\varphi(\vec{r})\rangle^2 - 2c(T)\Delta_r) \int d^3r' g(\vec{r}, \vec{r}') \delta\pi(\vec{r}'). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(2a(T) + 12b(T)\langle\varphi(\vec{r})\rangle^2 - 2c(T)\Delta_r) g(\vec{r}, \vec{r}') = k_B T \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Unter der Näherung für $\pi \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \langle\varphi(\vec{r})\rangle^2 &= 0 \text{ für } T > T_C \\ \langle\varphi(\vec{r})\rangle^2 &\approx -\frac{a(T)}{2b(T)} \text{ für } T < T_C \end{aligned}$$

erhält man

$$(\alpha_1 - \alpha_2 \Delta_r) g(\vec{r}, \vec{r}') = k_B T \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

mit $(\alpha_1, \alpha_2) = (2a, 2c)$ für $T > T_C$ und $(-4a, 2c)$ für $T < T_C$.

Mit Hilfe der Fouriertransformation und des Residuensatzes erhält man die Lösung

$$g(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{k_B T}{8\pi c(T)} \frac{\exp\left(-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{\xi(T)}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

mit

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{c(T)}{a(T)}} \text{ für } T > T_C$$

$$\xi(T) = \sqrt{\frac{-c(T)}{2a(T)}} \text{ für } T < T_C.$$

Wenn man annimmt, daß $c(T)$ um T_C näherungsweise konstant ist, ergibt sich der kritische Exponent der Korrelationslänge mit dem oben gefundenen $a(T)$ zu $\nu = 1/2$.

Die gestrichenen Exponenten sind nach der Landau-Theorie jeweils gleich den ungestrichenen.

2.2 Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

	α	β	γ	γ'	δ	ν
Reales Gas	0 (log.)	0,35	$1,37 \pm 0,2$	$1,0 \pm 0,3$	$4,4 \pm 0,4$	0,64
Magnet	0 (log.)	0,34	$1,33 \pm 0,03$	$1,33 \pm 0,03$	$\geq 4,2$	$0,65 \pm 0,03$
Landau-Theorie	0 (disk.)	0,5	1	1	3	0,5

2.3 Gültigkeitsbereich der Landau-Theorie

Die Entwicklung des thermischen Potentials setzt voraus, daß die Ableitungen existieren und endlich sind. Experimente deuten jedoch darauf hin, daß die Wärmekapazität

$$C_{\pi=0} = -T \left(\frac{\partial^2 G}{\partial T^2} \right)_{\pi=0}$$

bei T_C für manche Systeme logarithmisch divergiert. Das bedeutet, daß die Annahmen über die schwache Temperaturabhängigkeit der Entwicklungskoeffizienten nicht immer richtig sein können.

Oben wurde benutzt, daß der wahrscheinlichste Wert des Ordnungsparameters etwa gleich dem mittleren Wert ist, bei starken Fluktuationen, also in der Nähe des kritischen Punktes, muß das jedoch nicht der Fall sein.

Der Gültigkeitsbereich der Landau'schen Theorie kann durch das Ginzburg-Kriterium abgeschätzt werden. Die Fluktuationen müssen klein gegenüber dem mittleren Wert des Ordnungsparameters sein:

$$\langle (\phi - \langle \phi \rangle) \rangle \ll \langle \phi \rangle^2.$$

Mit der Abschätzung

$$\chi_T = \beta \int d^3r g(\vec{r}) \approx \beta \xi^d g(\vec{r}_0)$$

mit $r_0 \leq \xi$ und der Dimension des Systems d folgt

$$\frac{2b}{c^{d/2}} kT_C |2a_0(T - T_C)|^{(d/2)-2} \ll 1.$$

Für Dimensionen < 4 ist das Ginzburg-Kriterium in T_C stets verletzt. Für Supraleiter sind jedoch die Faktoren auf der linken Seite der Gleichung so klein, daß das Kriterium für sehr kleine $|\epsilon|$ erfüllt ist.

2.4 Zusammenfassung

- Die Landau-Theorie beschreibt Phasenübergänge in der Nähe des kritischen Punktes.
- Die Beschreibung erfolgt durch die Entwicklung eines thermodynamischen Potentials als Reihe von Potenzen des Ordnungsparameters.
- Die Theorie sagt das Verhalten thermischer Größen, d. h. die kritischen Exponenten, qualitativ richtig, allerdings quantitativ (teilweise) falsch voraus.
- Die Ursache besteht darin, daß die Temperaturabhängigkeit der Entwicklungskoeffizienten selbst wiederum durch die niedrigsten Terme einer Taylorreihe ersetzt wird. In unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes ist dies nicht zulässig, die Temperaturabhängigkeit der Koeffizienten ist dort nicht vernachlässigbar klein.
- Eine Abschätzung für den Gültigkeitsbereich der Theorie liefert das Ginzburg-Kriterium.

2.5 Literaturverzeichnis

Weidlich: Thermodynamik Und Statistische Mechanik

Römer/Filk: Statistische Mechanik

Nolting: Grundkurs Theoretische Physik Band 6

Stanley: Introduction To Phase Transitions And Critical Phenomena

Gebhardt/Krey: Phasenübergänge Und Kritische Phänomene