Die de Broglie - Bohm Theorie der Quantenmechanik

Björn Schwentker[1]

[1] schwenb@uni-muenster.de

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkung

Dieser Text beschreibt die Grundlagen der de Broglie-Bohm Theorie der Quantenmechanik, die auch unter den Namen "Bohmsche Mechanik", "Pilot-Wellen Theorie" oder "Führungswellen Theorie" bekannt ist. Die de Broglie-Bohm Theorie erklärt die gesamte nichtrelativistische Quantenmechanik aus Sicht einer dynamischen Teilchentheorie. Mit ihrer Teilchenontologie und den Grundgleichungen der Theorie lassen sich alle in der Quantenmechanik konstruierbaren Paradoxa in widerspruchsfreie Erklärungen auflösen (siehe z.B. [2]).

2 Eine Theorie "verborgener Parameter"

Bei der Beschäftigung mit den Grundlagen der Quantenmechanik stößt man immer wieder auf den Begriff der Theorien "verborgener Parameter". Beispielsweise war Einstein, der die Quantenmechanik in ihrer gegebenen Form nie als vollständig aktzeptiert hat, ein Verfechter der These, die Quantenmechanik sei lediglich eine *statistische* Theorie. Unter der jetzigen Theorie, in der er nur eine der Thermodynamik analoge phänomenologische Beschreibung experimenteller Ergebnisse sah, vermutete er daher weitere "verborgene" Parameter, die von der Theorie bisher noch nicht erfasst werden. In der Analogie der Thermodynamik wären dies die Teilchen und ihre (Hamiltonschen) Bewegungsgleichungen, die in der statistischen Physik über den Begriff des Ensembles die mikroskopische Grundlage für die Phänomenologie der Thermodynamik bilden.

Die de Broglie-Bohm Theorie ist eine solche *statistische* Theorie *"verborgener" Parameter* für die *nichtrelativistische* Quantenmechanik. Wie sieht nun die Struktur einer solchen Theorie aus, und in welchem Sinne ist speziell die de Broglie-Bohm Theorie eine solche Theorie "verborgener" Parameter?

- **Parameter:** Ein in der orthodoxen Quantenmechanik nicht enthaltener Parameter λ (Im Allgemeinen $\lambda \in \mathbb{R}^N$), der in der neuen Theorie bestimmt wird (z.B. durch Differentialgleichungen).

  In der de Broglie-Bohm Theorie ist $\lambda = X(t)$, der zu jedem Zeitpunkt eindeutig definierte Ort aller Teilchen eines betrachteten Systems.

- **Statistik:** Die experimentell beobachtbare Statistik der "Observablen" der orthodoxen Quantenmechanik ist in der neuen Theorie gegeben durch ein Ensemble $\rho(\lambda, t)$ über den "verborgenen" Parameter λ. Formal stellt $\rho(\lambda, t)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(\lambda, t)$ über den Parameter λ dar.

  Die Bedeutung dieser Wahrscheinlichkeit ist aber eine fundamental andere als die der Wahrscheinlichkeit in der orthodoxen Quantenmechanik : Dort ist die Wahrscheinlichkeit - wie man sagt "inhärent" - in der Materie enthalten. Das heißt, dass nichts *existiert*, worüber diese Wahrscheinlichkeit ein Ensemble bilden könnte. Anders ausgedrückt ist das einzige, was den Zustand eines Systems ausmacht, in der orthodoxen Quantenmechanik dessen Wellenfunktion Ψ, bzw. der Zustandsvektor $|\Psi\rangle$. Die Wahrscheinlichkeit gilt ausschließlich für das Vorliegen von Messergebnissen. In einer Ensemble- bzw. statistischen Theorie *existiert* etwas (nämlich das, was man mit dem Parameter λ meint), für welches das Ensemble eine Wahrscheinlichkeit liefert. Es liegt *immer* ein definiertes λ vor, die Wahrscheinlichkeit des Ensembles drückt lediglich unser Unwissen aus: Wir wissen immer nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit, welches λ realisiert ist[2].

In der de Broglie-Bohm Theorie liegt ein Ensemble über die Teilchenorte $X(t)$ vor. Die Wahrscheinlichkeitsdichte dieses Ensembles ist gegeben durch $|\Psi(X,t)|^2$. (Achtung: Obwohl diese Wahrscheinlichkeitsdichte formal genauso aussieht wie in der orthodoxen Quantenmechanik , ist die Bedeutung wie eben beschrieben eine ganz andere.)

Auf den ersten Blick scheint eine solche statistische Theorie die experimentellen Ergebnisse der Quantenmechanik nicht erklären zu können: Denn man misst Interferenzen der Wellenfunktionen Ψ. Ensembles, die auf dem Konzept der Unwissenheit beruhen, können aber niemals Interferenzen erzeugen (denn zwischen den einzelnen Ensemblemitgliedern besteht absolut keine Wechselwirkung). In der de Broglie-Bohm existiert Ψ aber nicht nur als Grundlage der Wahrscheinlichkeitsverteilung sondern auch als Element der Teilchendynamik. Diese beschreibt den gesamten Umfang der quantenmechanischen Phänomene exakt, also auch die Interferenz.

3 Historischer Kontext

Tabelle 1 enthält einige geschichtliche Daten, die im Zusammenhang mit der Entwicklung der de Broglie-Bohm Theorie interessant sind: Bereits 1927, während der berühmten 5. Solvay-Konferenz, die oft mit der Durchsetzung der Kopenhagener Deutung als vorherrschender Interpretation der Quantenmechanik in Verbindung gebracht wird, hielt Luis de Broglie einen damals wenig beachteten Vortrag über seine Idee der "Pilot-Wellen" als Grundlage einer Teilchendynamik im quantenmechanischen Regime. De Broglies Ideen waren zu diesem Zeitpunkt bei weitem nicht voll ausgearbeitet. Sein Pilot-Wellen Ansatz liegt aber immer noch der heutigen de Broglie-Bohm Theorie zu Grunde.

Es war 1952 der Amerikaner David Bohm, der den selben Ansatz wie de Broglie verfolgte und die Pilot-Wellen Idee konsequent zu einer kompletten Teilchen-Interpretation der Quantenmechanik ausarbeitete (siehe [5]). Diese beinhaltete bereits 1952 auch eine Theorie des Messprozesses, und damit innerhalb der Bohmschen Interpretation die vollständige Klärung des "Messproblems".

Zum Zeitpunkt seiner Veröffentlichung lebte Bohm nicht mehr in den USA sondern in Sao Paolo, Brasilien. Bohm hatte die USA bereits 1951 verlassen, da ihm nach einer Vernehmnung durch das "Komitee für unamerikanische Angelegenheiten" (siehe Abbildung 1) sämtliche Lehrmöglichkeit in den USA genommen worden war. Im Zusammenhang der amerikanischen Kommunistenverfolgung, in der so genannten Mc-Carthy-Ära, hatte Robert Oppenheimer, der ehemalige Lehrer von Bohm, wohl unter Druck von offizieller Seite, Bohms Namen auf einer Liste potentiell verdächtiger Mitarbeiter herausgegeben. Bohms praktische Isolation von der wissenschaftlichen Elite zu dieser Zeit ist sicher ein geschichtlicher Grund für die geringe Beachtung seiner Theorie.

Die Tatsache, dass Bohm mit seiner Theorie schon 1952 ein widerspruchsfreies Gegenbeispiel zu von Neumanns "No hidden variables"- Theorem von 1932 vorlegte, blieb weit-

[2] Es ist eine völlig legitime und wahrscheinlich auch sehr notwendige Frage, was unter einem solchen "Unwissenheits-Ensemble" über reale Objekte zu verstehen ist. Das allgemeine Gefühl der amtierenden Physiker geht aber wohl dahin, dass eine Ensemblebeschreibung der Natur durchaus etwas natürliches und/ oder notwendiges ist.

1926	Aufstellung der Schrödinger-Gleichung, Bornsche Wahrscheinlichkeitsinterpretation
1927	5. Solvay-Kongress in Brüssel: 1.) 1.Höhepunkt der Einstein-Bohr Debatte 2.) De Broglie gibt eine Vorlesung über **Pilot-Wellen Theorie**
1932	Von Neumann veröffentlicht sein Buch "Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik" mit einem "Beweis" der Unmöglichkeit von Theorien "verborgener" Parameter.
1935	Veröffentlichung des berühmten EPR-Artikels
1952	David Bohm veröffentlicht in zwei aufeinanderfolgenden Artikeln ([5]) seine ausgearbeitete **Bohmsche Mechanik**.
1964	John S. Bell stellt die berühmten Bellschen Ungleichungen auf.
1966	John S. Bell zeigt in seiner Veröffentlichung "On the problem of hidden variables in quantum mechanics", dass der von-Neumannsche Beweis nur für eine verschwindend kleine Klasse von Theorien gilt.
1987	Das Experiment von Aspect zur Überprüfung der Bellschen Ungleichungen zeigt, dass es in der Natur nichtlokale Wechselwirkungen gibt.

Tabelle 1: Einige historische Daten zur de Broglie-Bohm Theorie.

gehend unbeachtet, bis der Ire John Stuart Bell, damals Theoretiker am CERN in Genf, darauf hinwies, dass der von-Neumannsche Beweis auf sehr strengen Annahmen fußt und daher nur für eine verschwindend kleine Klasse von Theorien "verborgener" Parameter überhaupt zutreffend ist. Es war die Kenntnis von Bohms Theorie, die Bell zu Überlegungen motivierte (siehe [4]), die schließlich in die Aufstellung der Bellschen Ungleichungen mündete. Diese sollten experimentell entscheidbar machen, ob eine Vervollständigung der Quantenmechanik mit Hilfe "verborgener" Parameter lokalen Charakter haben kann, oder ob eine solche Theorie nichtlokal sein muss. Heute gilt als experimentell gesichert, dass die Natur nichtlokal ist und daher jede Theorie "verborgener" Parameter nichtlokale Wechselwirkungen enthalten muss.

Abbildung 1: David Bohm im Mai 1949 auf dem Weg zu seiner Vernehmung durch das "Komitee für unamerikanische Angelegenheiten". Unter Berufung auf das Prinzip der Gedankenfreiheit verweigerte er die Aussage und verlor dadurch sämtliche Lehrmöglichkeit in den USA.

4 Bedingungen für eine Theorie "verborgener Parameter"

Für jede Theorie "verborgener Parameter", bzw. für jede fundamentale Theorie der Materie, also auch die de Broglie-Bohm Theorie, gelten drei scharfe Bedingungen, die diese zu erfüllen hat:

1. Die neue Theorie muss mit allen bisherigen **experimentellen Ergebnissen** - also auch mit den phänomenologischen Voraussagen der orthodoxen Quantenmechanik - übereinstimmen.

2. **Nichtlokalität:** Spätestens die Experimente, die im Zusammenhang mit den Bellschen Ungleichungen ausgeführt wurden, haben deutlich gezeigt, dass nichtlokale Wechselwirken in so genannten verschränkten Systemen vorliegt. Dies bedeutet, dass sich Änderungen am Zustand eines solchen Systems instantan über Distanzen von im Prinzip unbegrenzter Reichweite auswirken können. Dies ist kein Verstoß gegen die Prinzipien der Einsteinschen Relativitätstheorie. Die Experimente zeigen, dass auch die Quantenmechanik im Prinzip nichtlokal ist. Dies kann man dem Formalismus jedoch nicht ansehen, da sich die Nichtlokalität im (Schrödinger-)dynamisch nicht beschreibbaren Messprozess verbirgt. In der de Broglie-Bohm Theorie wird die Nichtlokalität im Formalismus offenbar. Dies ist keine "esoterische Eigenschaft" der Theorie. Die Natur *ist* nichtlokal.

3. **Kontextualität:** Die Eigenschaft der Kontextualität erfüllen all diejenigen Theorien "verborgener Parameter", die nicht in die Klasse von "No-Go"-Theoremen wie der von Neumannsche Unmöglichkeits-"Beweis" fallen. Die de Broglie-Bohm Theorie fällt nicht in diese Klasse.

5 Grundlagen I

Das Konzept der de Broglie-Bohm Theorie beruht auf zwei Grundpfeilern: Der *Dynamik* von Teilchen zum einen und deren *Statistik* zum anderen. Diese sollen in den folgenden zwei Unterkapiteln erläutert werden. Dabei wird die Theorie zunächst für Systeme mit nur einem Teilchen eingeführt (also $X(t) = \vec{x}(t)$).

Eine Verallgemeinerung auf Mehrteilchensysteme ergibt sich dann auf sehr naheliegende Weise. Sie wird im Abschnitt "Grundlagen II" beschrieben.

5.1 Dynamik: Die Bewegungsgleichungen

Die de Broglie-Bohm Theorie ist in allererster Linie eine Theorie über die Dynamik von real existierenden Teilchen (Der statistische Charakter hat weniger fundamentalen Charakter). Der Ort X eines Teilchens wird zu jeder Zeit kontinuierlich beschrieben, d.h. es gibt eine eindeutige *Trajektorie* $X(t)$.

Im Folgenden sei ein System $\mathfrak{S}$ betrachtet, dass in aus der orthodoxen Quantenmechanik gewohnter Weise durch einen Hamilton-Operator $\hat{H}$ beschrieben wird. Die Teilchendynamik wird beschrieben durch zwei Bewegungsgleichungen, d.h. zwei (völlig kontinuierliche) Differentialgleichungen:

1. Die *Schrödinger-Gleichung* für die Wellenfunktion $\Psi(X,t)$ des betrachteten Systems:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\Psi(X,t) = \hat{H}\Psi(X,t)} \tag{1}$$

   Die Wellenfunktion trägt in der de Broglie-Bohm Theorie den Namen "Pilot-Welle" oder "Führungswelle", da sie vermittels der unten beschriebenen Bewegungsgleichung (2) das Teilchen auf seiner Bahn führt. Die Wellenfunktion Ψ ist die aus der normalen Quantenmechanik bekannte komplexwertige Funktion. Im allgemeinen Fall von N Teilchen ist sie auf dem $3N$-dimensionalen Konfigurationsraum definiert. Zwar hat die Wellenfunktion in der de Broglie-Bohm Theorie auch statistischen Charakter. Aber hier ist sie zunächst einzig und allein als dynamisches Feld für die Teilchenbewegung nötig.

2. Die eigentliche *Bewegungsgleichung* für die Teilchenbahnen:

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = \frac{1}{m}\,\nabla S(X,t) = \frac{\hbar}{m}\Im\left\{\frac{\nabla\Psi(x,t)}{\Psi(x,t)}\right\}} \tag{2}$$

   mit

$$\Psi(x,t) = |\Psi(x,t)| \cdot e^{\frac{i}{\hbar}S(x,t)} \tag{3}$$

Anmerkungen:

- In der de Broglie-Bohm Theorie ist der Zustand eines Systems nicht wie in der orthodoxen Quantenmechanik nur durch dessen Wellenfunktion Ψ (bzw. dessen entspr. Vektor $|\Psi\rangle$ im Hilbertraum) gegeben. Hier charakterisiert zusätzlich die genaue Teilchenkonfiguration (also der Ort aller Teilchen im betrachteten System) den eindeutigen Zustand des Systems:

  Zustand zu Zeit t: $(\Psi(X,t), X(t))$

- Zu beachten ist, dass die Schrödinger-Gleichung (1) autonom ist, sich die Wellenfunktion also völlig unabhängig vom Teilchenort entwickelt. Anders ausgedrückt: Es gibt keine "back-action" des Teilchens auf das seine Bewegung bestimmende Pilot-Feld[3]. Für das Teilchen gilt aber keine Autonomie: Die Pilotwelle $\Psi(X,t)$ geht explizit in die Bewegungsgleichung (2) ein.

  Die Teilchendynamik wird oft dahingehend missverstanden, dass die Pilotwelle dem Teilchen in irgendeiner Weise vorauseile. Das ist falsch. Die Wellenfunktion ist zu jedem Zeitpunkt an jedem Ort eindeutig definiert. Das Teilchen greift sich quasi an genau seinem Ort $X_{\text{Teilchen}}(t)$ den Wert des Gradienten der Phase der Wellenfunktion heraus und berechnet sich daraus seine momentane Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(X_{\text{Teilchen}}(t),t) = \frac{dX_{\text{Teilchen}}}{dt} = \frac{1}{m}\nabla S(X_{\text{Teilchen}},t)$$

  Mit einem gegebenen Anfangsort $X_0(t_0)$ berechnet sich so durch Aufintegrieren entlang der Geschwindigkeit $\vec{v}(X_{\text{Teilchen}}(t),t)$ die komplette Trajektorie des Teilchens. das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(X_{\text{Teilchen}}(t),t)$ ändert sich dabei natürlich nicht nur, weil sich die Teilchenposition ändert, sondern auch, weil sich die Wellenfunktion Ψ, und damit auch dessen Phase S, entsprechend der Schrödinger-Entwicklung zeitlich ändert. Die Dynamik der Teilchen wird unten im Abschnitt "Dynamik: Kochrezept..." noch einmal beschrieben.

- Die in der de Broglie-Bohm Theorie neue Bewegungsgleichung (2) wurde hier ohne weitere Herleitung oder Motivation einfach nur angegeben. Es gibt verschiedene "Herleitungen" der Bewegungsgleichung, die aber alle ihre Nachteile haben, die schliesslich darin begründet liegen, dass man grundlegende Gleichungen nicht herleiten kann (so lassen sich ja beispielsweise auch die Newtonschen Gesetze oder die Schrödingergleichung nicht herleiten). Sie müssen vielmehr ihre Sinnhaftigkeit innerhalb der Theorie und ihre Übereinstimmung mit den Experimenten erweisen. In diesem Sinne wird (2) hier als grundlegend postuliert. Im Abschnitt 5.4 zeigt eine Konsistenzbetrachtung in Hinblick auf die Statistik der Theorie allerdings, dass (2) sehr naheliegend ist.

5.2 Dynamik: Kochrezept zum Berechnen von Teilchenbahnen

Die Berechnung von Teilchenbahnen für ein gegebenes System $\mathfrak{S}$ verläuft immer nach dem gleichen Schema:

1. *Definition des Systems*, z.B. durch Festlegen eines Hamilton-Operators der Form $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\triangle + V(X)$. Mit der *Anfangsbedingung* $\Psi_0(X,t_0)$ wird die Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(X,t) = \hat{H}\,\Psi(X,t)$$

   dieses Systems gelöst. Man erhält, ausgezeichnet durch die Anfangsbedingung: $\Psi^{\text{AB}}(X,t)$

[3] Dies ist ein in der Physik neues Konzept. In der klassichen Mechanik z.B. ist jeder im Gravitationsfeld bewegte Massepunkt auch wieder Verursacher eines Gravitationsfeldes. Analoges gilt für geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern.

2. Man ermittelt aus $\Psi^{\mathrm{AB}}(X,t)$ vermöge

$$\Psi^{\mathrm{AB}}(X,t) = |\Psi(X,t)| \cdot e^{\frac{i}{\hbar}S(X,t)},$$

die Phase der Wellenfunktion. Sie geht ein in die Bewegungsgleichung

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{m}\nabla S(X,t),$$

die mit der *Anfangsbedingung* für den Teilchenort, $X_0(t_0)$, gelöst wird. Das Ergebnis ist die Trajektorie des Teilchens: $X^{\mathrm{AB}}(t)$.

Sind also die Anfangsbedingungen $(\Psi_0(X,t_0), X_0(t_0))$ bekannt, so liegt das Verhalten des Systems (isoliert, wie wir es hier angenommen haben) für alle Zeit fest. Da die de Broglie-Bohm Theorie sich als eine universelle Theorie betrachtet, muss es auch eine Wellenfunktion $\Psi_{\mathrm{Universum}}(X_{\mathrm{Universum}},t)$ mit einer entsprechenden Anfangsbedingung $\Psi_{\mathrm{Universum}}(X_{\mathrm{Universum}},t_0)$ sowie Anfangsbedingungen $X_{\mathrm{Universum}}(t_0)$ für alle Teilchen des Universums geben. In diesem Sinne ist das de Broglie-Bohm-Universum *vollständig deterministisch*[4]. Dieser durch die kontinuierlichen Bewegungleichen gewährleistete lückenlose Determinismus umfasst alles auf der Welt Existierende: inklusive Atomen, Bauklötzen, Messapparaturen, Einzellern und etwas komplexere Lebewesen wie Menschen mit und ohne Doktortitel, die evtuell im Rahmen eines quantenmechanischen Messprozesses für die Rolle des "Beobachters" herhalten müssen[5].

Abbildung 2 zeigt ein Beispiel für das Geschwindigkeitsfeld eines einfachen Systems, das durch ein zweidimensionalen Kastenpotentials definiert ist. Die eingezeichneten Pfeile zeigen das gesamte Geschwindigkeits(vektor-)feld für einen festen Zeitpunkt t an. Mit t ändert sich die (als Höhenlinien des Betragsquadrats bunt eingezeichnete) Wellenfunktion und damit auch das Geschwindigkeitsfeld (die Pfeile) im ganzen Kasten. Setzt man nun zur Zeit t ein Teilchen an einen bestimmten Ort X_0 in das $\vec{v}$-Feld, so erhält das Teilchen dort genau die Geschwindigkeit $\vec{v}(X_0,t)$in Richtung des Pfeils. Es bewegt sich aber nur ein infinitesimales Stückchen in Richtung dieses Pfeiles und liest sich dann zur Zeit $t+dt$ am Ort $X_0 + \vec{v}(X_0,t)\cdot dt$ seine neue Geschwindigkeit im wegen der Schrödingerdynamik *veränderten* Geschwindigkeitsfeld ab. Auf diese Weise entsteht die Trajektorie des Teilchens.

Anmerkungen:

- Auf diese Weise sind die Teilchenbahnen vieler Systeme berechnet worden (H-Atom, Doppelspaltexperiment (siehe Abschnitt 6), Tunnelprozesse,...). Trajektorien der meisten Probleme sind jedoch nicht mehr analytisch auszurechnen und werden numerisch bestimmt. Die Teilchenbewegungen können auch bei sehr einfachen Systemen schnell sehr kompliziert werden (nämlich sobald man Superpositionen von Wellenfunktionen als Pilotwelle hat). Die chaotischen Eigenschaften solcher Systeme (fast aller Systeme unserer Welt!) sind sehr interessant aber fast noch überhaupt nicht erforscht.

- Betrachtet man sich die Bewegungsgleichung $dX/dt = 1/m\,\nabla S$, so stellt sich die Frage, ob die Trajektorien von Teilchen auch dort noch eindeutig bzw. überhaupt

[4]Auch dieser Text entstand nicht aus Zufall!
[5]...ohne dass die UN ihnen jemals den Beobachterstatus verliehen hätte!

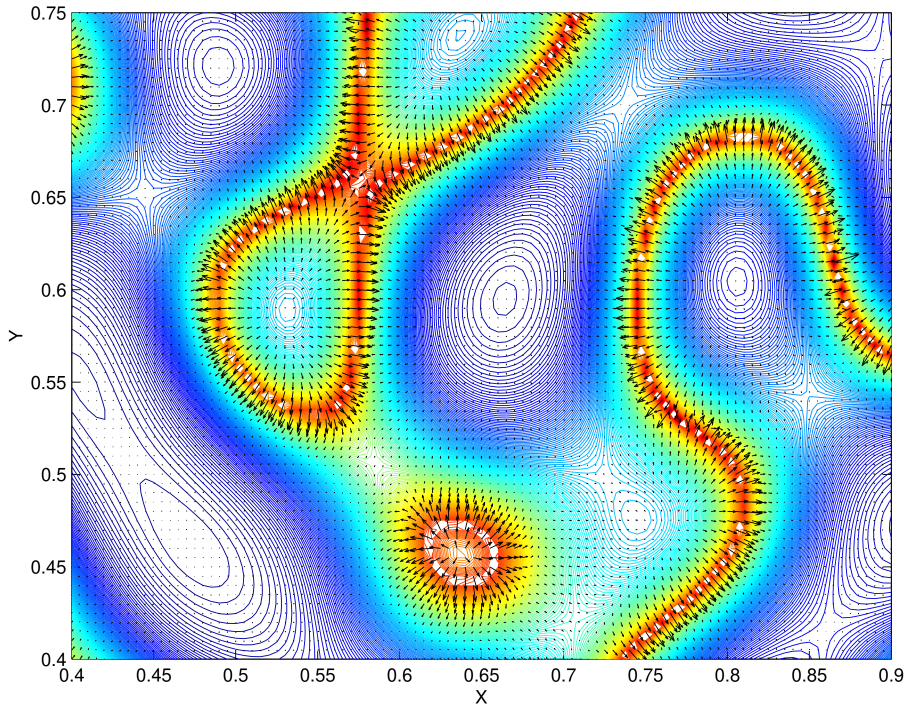

Abbildung 2:
Geschwindigkeits(vektor-)feld für einen festen Zeitpunkt t, berechnet für unendlich hohes Kastenpotential/ 10 Superpositionen. Die Pfeile geben die Geschwindigkeitsvektoren an. Der Kontourplot gibt $|\Psi|^2$ für das System an: zu den roten Bereichen hin liegen die Nullstellen der Wellenfunktion. Wo die Wellenfunktion klein wird, wächst die Stärke des Geschwindigkeitsvektoren stark an und zeigt von den Minima der Wellenfunktion weg.

noch definiert sind, wo die Wellenfunktion eine Nullstelle hat. Denn dort ist die Phase S ja überhaupt nicht definiert. Probleme dieser Art exisitieren in der Tat nicht. Die Existenz und Eindeutigkeit von Trajektorien in der de Broglie-Bohm Theorie ist mathematisch rigoros gezeigt worden. Grob gesagt tritt das Problem nicht auf, da die Teilchen, sobald sie in die Nähe einer Nullstelle von Ψ geraten, von dieser mit großer Geschwindigkeit wegbewegt werden. Dies ist auch in Abbildung 2 an den langen $\vec{v}$-Vektorpfeilen in der Nähe der (dort roten) Nullstellen zu sehen.

- Die hier dargestellten zwei Bewegungsgleichungen stellen die so genannte "minimale Version" der de Broglie-Bohm Theorie dar. Gemeint ist damit die Form der Teilchen-Bewegungsgleichung $dX/dt = 1/m\,\nabla S$ als Differentialgleichung erstere Ordnung. Die von Bohm in [5], [1] formulierte Theorie schreibt diese Gleichung anders, nämlich als Gleichung zweiter Ordnung in der Zeit. Die Teilchenbewegnung wird dann beschrieben ducrch die Eigenschaften eines Quantenpotentials $Q(x,t)$. Die Dynamik ist aber genau die gleiche wie die hier beschriebene.

  Die Bohmsche Umformulierung verdeckt die Tatsache, dass es sich bei der Teilchendynamik eben *nicht* um eine klassische Bewegung handelt. Die Bewegungen der Teilchen sind in der Tat alles andere als klassisch. Die Dynamik ist nich Newtonsch sonder Aristotelisch: Das Anologon zur Kraft in einer Newtonschen BWG zweiter

Ordnung ist hier ∇S. Ist $\nabla S = 0$, so folgt als "natürlicher Zustand" des Teilchens nicht linear gleichförmige Bewegung sondern Stillstand des Teilchens.

5.3 Statistik: Das Ensemble

Nun ist die Dynamik der Teilchen geklärt. Es muss aber noch dem statistischen Charakter der Naturbeobachtungen Rechnung getragen werden. Dies geschieht durch Einführung eines statistischen Ensembles über die Teilchenorte:

$$\text{Teilchenort-Ensemble: } \rho(X,t)$$

Um die Übereinstimmung der Vorraussagen der de Broglie-Bohm Theorie mit denen der orthodoxen Quantenmechanik und mit den Messergebnissen zu gewährleisten muss offensichtlich gelten:

Quanten-Gleichgewichts-Hypothese:

$$\rho(X,t) = |\Psi(X,t)|^2 \quad \forall t \tag{4}$$

Anmerkung:

Die Art des hier postulierten Ensembles $\rho(X,t)$ ist grundsätzlich anders als die der Wahscheinlichkeitsdichte $|\Psi(X,t)|^2$ in der orthodoxen Quantenmechanik, auch wenn sie die gleichen Werte haben.

$\rho(X,t)$ ist ein *statistisches Ensemble*: Es liegt nur genau *ein* System mit exakt definierten Teiclhenorten vor. Allerdings wissen wir nicht, welches das ist. $\rho(X,t)$ ist also nur Ausdruck unserer Unwissenheit und gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür an, dass sich die Teilchen des betrachtete Systems am Ort X befinden. D.h. die Teilchen *sind* mit einer Wahrscheinlichkeit(sdichte) $\rho(X,t)$ wirklich dort, völlig unabhängig von einer (Orts-) Messung.

Der Ausdruck $|\Psi(X,t)|^2$ in der orthodoxen Quantenmechanik bedeutet nach der *Bornschen Wahrscheinlichkeitsinterpretation* die Wahrscheinlichkeit(sdichte), ein Teilchen bei einer *Messung* am Ort X zu finden. Findet keine Messung statt, so ist der Ort des Teilchens üeberhaupt *nicht definiert*, da es in diesem Fall schlichtweg keine Teilchen gibt.

5.4 Konsistenzbetrachtung: Erhaltung des Quantengleichgewichts

In (4) wurde das Quantengleichgewicht zunächst für alle t postuliert. Nun unterliegen die Teilchen in ihren jeweils voneinander völlig unabhängigen Realisierungen des statistischen Ensembles einer Bewegung, die von der Pilot-Welle Ψ geleitet wird. könnte es nicht sein, dass auf diese Weise der Fluss der Teilchen über das gesamte Ensemble $\rho(X,t)$ der Verteilung $|\Psi|^2$ "davonfließt"?

Dass dies nicht sein kann, sieht man folgendermaßen: Man betrachtet zunächst die zeitliche Entwicklung von $|\Psi(X,t)|^2$, das ja als Wahrscheinlichkeitsdichte einer Kontinuitätsgleichung genügen muss[6]:

$$\frac{\partial|\Psi(X,t)|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(X,t) = 0$$

[6]Es darf ja keine Wahrscheinlichkeit verloren gehen.

Da die Zeitentwicklung von $|\Psi(X,t)|^2$ durch die Schrödingergleichung bestimmt wird, lässt sich mit Hilfe dieser nun der Wahrscheinlichkeitsstrom $\vec{j}(X,t)$ bestimmen zu

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}\left\{\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right\} = \frac{\hbar}{m}\Im\left\{\Psi^*\nabla\Psi\right\}. \tag{5}$$

Vergleicht man nun diesen Strom mit dem Ausdruck für das Geschwindigkeitsfeld der Teilchendynamik in der de Broglie-Bohm Theorie,

$$\vec{v}_{\text{Teilchen}} = \frac{1}{m}\nabla S = \frac{\hbar}{m}\Im\left\{\frac{\nabla\Psi}{\Psi}\right\},$$

so sieht man, dass die Stromdichte $\vec{j}$ nichts anderes ist als

$$\vec{j} = \vec{v}_{\text{Teilchen}} \cdot |\Psi|^2 \tag{6}$$

Der Fluss der durch $|\Psi|^2$ gegebenen Wahrscheinlichkeitsdichte ist also tatsächlich durch die angenommene Teilchenbewegungsgleichung (2) gegeben! Da der Fluss von $\rho(X,t)$ per Definition durch $\vec{v}_{\text{Teilchen}}$ bestimmt ist, gehorchen $\rho(X,t)$ und $|\Psi(X,t)|^2$ der gleichen Kontinuitätgleichung. Dies bedeutet, dass ρ und $|\Psi|^2$ für alle Zeiten gleich sind, wenn sie für einen Zeitpunkt gleich sind. Die obige Quanten-Gleichgewichts-Hypothese lässt sich nun schwächer neu so schreiben:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \text{Teilchenfluss-} & & \text{Quanten-Gleichgewicht } \rho = |\Psi|^2 \\ \text{Dynamik} & \Longleftrightarrow & \forall t \text{ falls} \\ \vec{v} = \frac{1}{m}\nabla S & & \rho = |\Psi|^2 \text{ für ein } t_0 \end{array}} \tag{7}$$

6 Das Doppelspaltexperiment: Interferenz & kein Dualismus

Jetzt soll am Beispiel des Doppelspaltexperiments gezeigt werden, wie die Trajektorien in der de Broglie-Bohm Theorie aussehen können, und in welcher Weise sie damit genau mit den Ergebnissen von Messungen übereinstimmen. Das Beispiel wird auch die Frage klären, warum es in dieser Theorie mit einem statistischen Teilchenensemble die beobachtbaren Interferenzefekte gibt: Der Grund dafür liegt in der Doppelrolle der Wellenfunktion $\Psi(X,t)$, die einerseits als Pilot-Welle für die Teilchen fungiert und andererseits in Form ihres Betragsquadrats mit der Ensemble-Dichte identisch ist.

Um die Trajektorien für das Doppelspaltexperiment berechnen zu können, muss zunächst die Wellenfunktion des Systems bestimmt werden. Eine Skizze des Doppelspalt-Systems findet sich in Abbildung 3. Elektronen werden von einer Quelle Q ausgesandt, treten durch einen der Spalte A oder B und werden schliesslich auf einem Schirm detektiert. Die Wellenfunktion eines solchen Systems wird am bequemsten im Pfadintegralformalismus bestimmt. Dabei wird zur Bestimmung von Ψ jeder mögliche Pfad von Q über alle möglichen Punkte a in den Spalten bis zu Punkten D auf dem Schirm in Betracht gezogen. Das Ergebnis ist die Überlagerung zweier sich auf den Schirm zu und dabei leicht auseinander bewegender Gaußscher Wellenpakete:

$$\Psi(X,t) = \Psi_{\text{A}}(X,t) + \Psi_{\text{B}}(X,t) = \text{Gauß}_{\text{A}}(X,t) + \text{Gauß}_{\text{B}}(X,t) \tag{8}$$

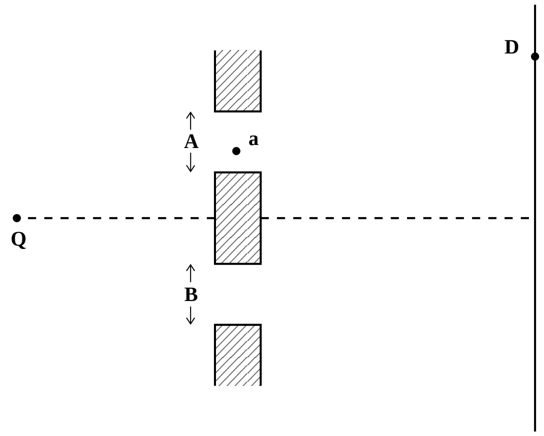

Abbildung 3: Skizze des Doppelspaltexperimentes: Im Pfadintegralformalismus werden alle Wege von der Teilchenquelle Q über alle Punkte a in den Spalten bis zu allen Punkten D auf dem Schirm betrachtet, um so die Gesamtwellenfunktion Ψ des Systems zu berechnen.

Für die Startpunkte (Anfangsbedingungen!) der nun zu berechnenden Trajektorien wählt man Punkte in den beiden Spalten die entsprechend $|\Psi|^2$ jeweils Gaußsch verteilt sind. Auf diese Weise kommt das statistische Ensemble ins Spiel. Von diesen Anfangspunkten aus integriert man die Trajektorien entlang

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{m}\nabla S(X,t)$$

auf, wobei $S(X,t)$ die Phase der zu (8) bestimmten Pilot-Welle ist. Die Trajektorien lassen sich in diesem Fall nicht analytisch bestimmen, sind aber numerisch berechnet worden. Abbildung 4 zeigt die sich ergebenden Teilchenbahnen. Es ist natürlich nur eine endliche Zahl von Bahnen berechnet worden. Aber die Dichte der Trajektorien am Auftritspunkt auf dem Schirm lässt deutlich die selbe Struktur erkennen wie die im Experiment erhaltenen Interferenzmuster[7]. Abbildung 5 zeigt Aufnahmen eines mit Elektronen durchgeführten Doppelspaltexperimentes. Numerische Berechnungen und Messergebnisse zeigen klar das gleiche Bild: *die Orte von Teilchen.*

Das Doppelspaltexperiment ist in der orthodoxen Quantenmechanik immer wieder der Aufhänger für die Frage nach der korrekten Naturbeschreibung: "Welle oder Teilchen?" Mit dem Wellenbild lassen sich in herkömmlicher Weise die Interferenzen, mit dem Teilchenbild die gemessenen Teilcheneinschläge auf dem Photoschirm erklären.

In der Sicht der de Broglie-Bohm Theorie wird klar, dass schon die Frage falsch gestellt ist. Hier muss es heißen: Welle *und* Teilchen! Denn die Wellenfunktion $\Psi(X,t)$ existiert ja zu jeder Zeit üeberall auf dem Konfigurationsraum, also im gesamten System, und breitet sich entsprechend durch beide Spalte gleichzeitig aus. Das Teilchen, das ja aber zu jedem Zeitpunkt nur einen definierten Ort hat, nimmt natürlich jeweils nur einen Weg und entsprechend nur einen Spalt.

[7]Und in der Tat werden für unendlich viele berechnete Trajektorien und unendlich viele Teilchen im Experiment die Interferenzmuster schließlich identisch.

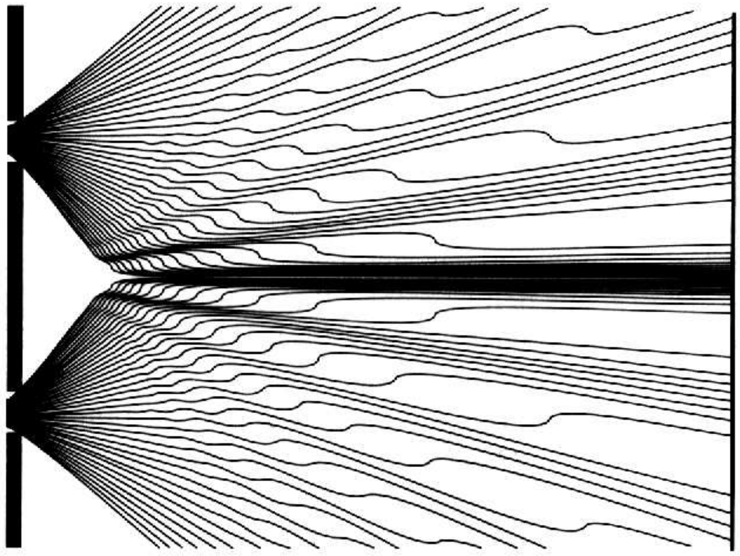

Abbildung 4: Berechnete Teilchenbahnen für das Doppelspaltexperiment (aus [3] nach Philippidis, Dewdney, Hiley [6]).

7 Messbarkeit von Teilchen, Trajektorien und "Observablen"

Sieht man Bilder von Trajektorien wie in Abbildung 4, so drängt sich eine Frage sofort auf: Lassen sich diese Trajektorien messen? Denn gelänge dies, so wären die Hypothesen der de Broglie-Bohm Theorie experimentell belegt. Leider gibt es nur einen, der solche Trajektorien wirklich sehen kann: Es ist der Subquantendämon. Der Subquantendämon ist ein Wesen, das in einem quantenmechanisches System den Ort des Teilchens *und* die Wellenfunktion messen kann, ohne das System im geringsten zu stören. Er ist in Abbildung 6 zu sehen. Es wurde noch kein Mensch gefunden, der die Fähigkeiten eines Subquantendämons hat.

Dies ist auch prinzipiell unmöglich: Natürlich können wir Teilchenorte messen. In der Tat gibt es kein Experiment, welches *keine* Teilchenorte misst. Die Messung eines jeden quantenmechanischen Operators ist im Endeffekt immer eine Messung von Teilchenorten, und wenn es auch nur die Orte von Teilchen von Messgerätzeigern sind.

Das Problem bei der Messung von Trajektorien besteht darin, dass sich die Wellenfunktion nicht messen lässt. Dies ist durch einmalige Ortsmessung nicht zu machen. Und selbst wenn es gelänge (was nicht der Fall ist), so würde eine Ortsmessung die Wellenfunktion des Systems in unkontrollierbarer Weise stören und der Zustand (Ψ, X) des Systems wäre wieder unbekannt und eine Vorausberechnung der Trajektorie unmöglich.

Die Tatsache, das jedes Experiment im Prinzip nur Teilchenorte misst, die Wellenfunktion hingegen nicht messbar ist, wirft ein neues Licht auf den Begriff der Teilchenorte als "verborgene" Parameter. Was verborgen ist, ist in der Tat die Wellenfunktion! Auch die in der gewohnten Formulierung der Quantenmechanik so grundlegenden Operatoren als *Observablen*, also Messgrößen, tauchen weder in der de Broglie-Bohm Theorie, noch in

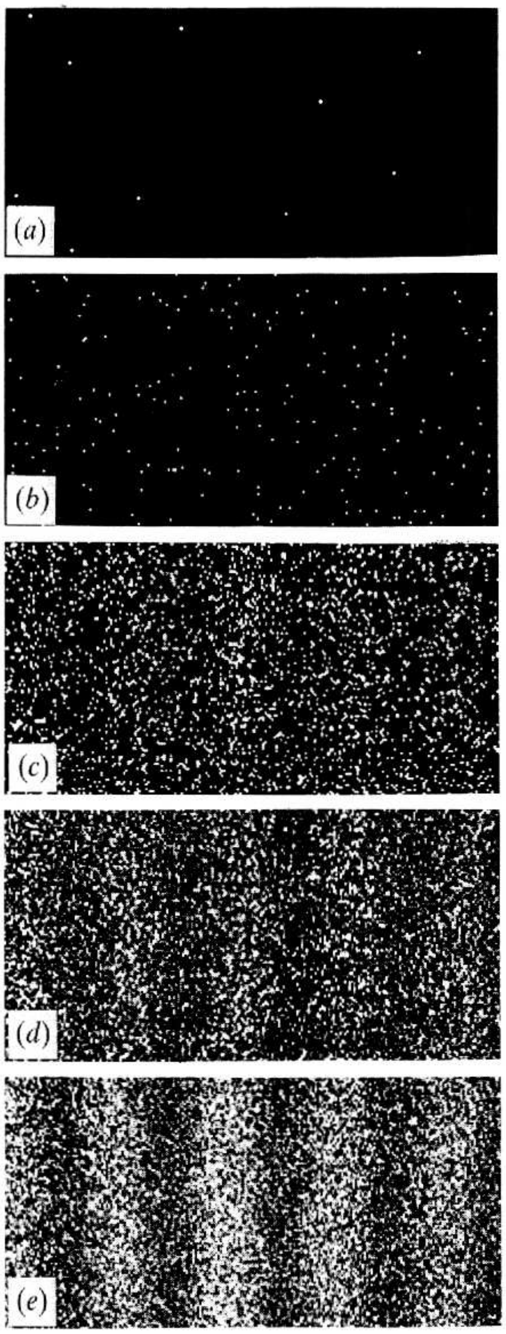

Abbildung 5: Aufnahmen von Photoplatten eines neueren Doppelspaltexperiments mit Elektronen (Tonomura 1989). Mit zunehmender Zahl an Elektronen wird das von der Quantenmechanik vorausgesagte Interferenzmuster immer deutlicher. Was wirklich gemessen wird sind allerdings die Einzeleinschläge von *Teilchen*: (a) 10, (b) 100, (c) 3000, (d) 20 000, (e) 70 000 Elektronen.

Abbildung 6: Der Subquantendämon: Klein aber gemein.

den Messergebnissen dieser Observablen auf[8].

Es ist nicht der Ort der Teilchen, der eine "verborgene Variable" ist. Vielmehr ist es das Konzept der "Observablen", das nach einer Erklärung verlangt! John S. Bell hat dies auch erkannt und gefordert, den Begriff "Observable" ganz abzuschaffen und stattdessen in "physikalischen" Theorien nur noch so genannte "Beables" zuzulassen. In der de Broglie-Bohm Theorie ist dieses messbare Beable eindeutig der Ort des als real existierend angenommenen Teilchens. Der Operatorformalismus der Quantenmechanik ergibt sich in der de Broglie-Bohm Theorie ganz natürlich als eine Konsequenz aus Linearität der Schrödinger-Gleichung und den Wechselwirkungen des Messprozesses. Die Observablen sind also "Derivate", die unserer phänomenologischen Naturbetrachtung durch die Struktur der Quantenmechanik und die in unserer Welt stattfindenden Wechselwirkungsprozesse aufgedrängt werden. Ohne Zweifel ist der Operatorformalismus sehr praktisch für alle Arten von Berechnungen. Aber die Observablen stehen nicht für wirklich "seiende" grundlegende Eigenschaften des betrachteten Systems. Konsequenter Weise sucht man Konzepte wie Energie von Teilchen in der de Broglie-Bohm Theorie vergeblich[9]. Sie haben im makroskopischen Bereich eine phänomenologische Bedeutung, sind aber im Bereich des aus de Broglie-Bohm Sicht auf mikroskopischer Ebene wirklich Seienden (nämlich der Teilchen) ohne Bedeutung. Die Verbindung zwischen mikroskopischer Welt und makroskopischer Phänomenologie wird in der de Broglie-Bohm Theorie durch eine lücken- und Kollapslose Beschreibung des Messprozesses gewährleistet (siehe z.B. [2]).

[8]So hat etwa noch niemand einen Spin gesehen. Was man misst ist der Ort eines Teilchens z.B. in der Form des Ortes eines Silberatoms nach Durchgang durch eine Stern-Gerlach-Apparatur. Ähnliches gilt für die beobachteten Spektrallinien bei "Energiemessungen", Spuren in Nebel-, Drift oder sonstigen Kammern bei "Impulsmessungen",...

[9]Das stimmt nicht ganz. Man kann in Analogie zu den Observablen auch Eigenschaften des Mikrosystems *definieren*, die dann zeitkontinuierlich bestimmt sind. Diese Größen stammen aber dann nicht originär aus der de Broglie-Bohm Theorie sondern kommen eben gerade vom Operatorformalismus her.

8 Grundlagen II

8.1 Mehrteilchensysteme: Nichtlokalität

Betrachtet sei ein System mit N Teilchen. Die Physik dieses Systems muss dann auf dem $3N$-dimensionalen Konfigurationsraum stattfinden. Die N-Teilchen-Wellenfunktion des Systems hat die Form und Zerlegung

$$\Psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N) = |\Psi(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)| \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)}, \tag{9}$$

und ist Lösung einer entsprechenden N-Teilchen Schrödinger-Gleichung mit einer Anfangsbedingung $\Psi_0(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_N)$.

Die Bewegungsgleichung für das i-te Teilchen ergibt sich in Analogie zum Ein-Teilchen-Fall (2):

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{1}{m_i} \nabla_i S(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_i, \ldots, \vec{x}_N) \tag{10}$$

Dabei bedeutet ∇_i den Gradienten der Funktion S nach den Koordinaten des i-ten Teilchens.

In der Bewegungsgleichung (10) kommt explizit die *Nichtlokalität* der Quantenmechanik (der Natur!) zum Ausdruck (siehe auch die Bemerkungen in Abschnitt 4). Die Geschwindigkeit des Teilchens i an der Stelle $\vec{x}_i$ ist gegeben durch den Gradient ∇_i der Funktion S. Aber obwohl S nur nach der Dreierkoordinate $\vec{x}_i$ abgeleitet wird, gehen in S und damit auch in $\nabla_i S$ die Positionen aller anderen Teilchenorte als Parameter ein. Bei Änderung der Position $\vec{x}_j$ $(j \neq i)$ irgendeines anderen Teilchens im System, ändert sich also instantan die Geschwindigkeit von Teilchen i am Ort $\vec{x}_i$, und damit seine gesamte Trajektorie. Dabei spielt es keine Rolle, wie weit die einzelnen Teilchen voneinander entfernt sind. Sie müssen lediglich zum gleichen, zusammenhängenden System gehören, d.h. die Einzelsysteme der Teilchen müssen zu dem N-Teilchen Gesamtsystem verschränkt sein (siehe nächster Abschnitt).

8.2 Das de Broglie-Bohm Universum

Betrachtet man ein System $\mathfrak{S}$, so drängen sich zwei Fragen auf:

1. Warum ist $\Psi_S(X, t_0)$ so wie es ist[10]?

2. Warum ist $X_0(t_0)$ so wie es ist?

Sicherlich macht eine Theorie keinen Sinn, wenn für jedes willkürlich definierte System neue Anfangsbedingungen definiert werden müssen. Die Konsequenz dieser betrachtung ist, dass es für eine (jede) universelle Theorie nur Anfangsbedingungen für das gesamte Universum zu geben braucht:

$$\text{Angangsbedingungen des Universums:} \quad \Psi_{\text{Universum}}(X_{\text{Universum}}, t_0), X_{\text{Universum}}(t_0) \tag{11}$$

Ein *Subsystem* $\mathfrak{S}$ des Universums ist dann durch das Herausgreifen einer bestimmten Teilchenmenge (eben die Teilchen in $\mathfrak{S}$) aus allen Teilchen des Universums definiert. Die Wechselwirkung des Systems mit dem Rest der Welt ist dann bestimmt durch den Zusammenhang der Funktionen $\Psi_S, \Psi_{\text{Rest}}$ und $\Psi_{\text{Universum}}$.

[10] Der tiefgestellte Index S gehört zum System $\mathfrak{S}$.

Unabhängige Systeme: Es findet keine Wechselwirkung des Systems $\mathfrak{S}$ mit dem Rest der Welt statt, wenn die Wellenfunktion des Universums faktorisiert (global, d.h. überall auf dem gesamten Konfigurationsraum):

$$\Psi_{\text{Universum}} = \Psi_S(X_S)\,\Psi_{\text{Rest}}(X_{\text{Rest}}) = |\Psi_S||\Psi_{\text{Rest}}| \cdot e^{i/\hbar(S_S(X_S)+S_{\text{Rest}}(X_{\text{Rest}}))} \tag{12}$$

Da in diesem Fall die Phase S zu einer Summe $S_S(X_S) + S_{\text{Rest}}(X_{\text{Rest}})$ zerfällt, hängt die Geschwindgkeit eines Teilchens i aus $\mathfrak{S}$ nur noch ab von $S_S(X_S)$:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \frac{1}{m_i}\nabla_i(S_S(X_S) + S_{\text{Rest}}(X_{\text{Rest}})) \\ &= \frac{1}{m_i}\nabla_i(S_S(X_S) + 0) \\ &= \frac{1}{m_i}\nabla_i(S_S(X_S)) \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Teilchen in $\mathfrak{S}$ sowohl von der Wellenfunktion Ψ_{Rest}, als auch den Teilchenpositionen $X_{\text{Rest}}(t)$ völlig unabhängig sind. Die Unabhängigkeit von Teilsystemen, bei denen das Produkt der Wellenfunktionen diejenige des Gesamtsystems ergibt, gilt analog in der orthodoxen Quantenmechanik. Dort fehlt allerdings die anschauliche Begründung durch das Teilchenbild.

Verschränkte Systeme: Im allgemeinen faktorisieren die Wellenfunktionen von Untersystemen nicht global. Die Systeme sind dann zunächst prinzipiell *nicht* unabhängig, sie sind also verschränkt. Ein Beispiel für einen solchen Zusammenhang der Wellenfunktionen wäre:

$$\Psi_{\text{Universum}} = \Psi_A(X_S)\,\Psi_B(X_{\text{Rest}}) + \Psi_C(X_S)\,\Psi_D(X_{\text{Rest}}) \tag{13}$$

Von dieser Struktur ist auch der Spin-Anteil der Wellenfunktionen bei Singulett-Zuständen, wie sie für die Experimente zu den Bellschen Ungleichungen verwendet werden:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1\,|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1\,|\uparrow\rangle_2)$$

Durch solche Wellenfunktionen beschriebene Systeme stehen durch *nichtlokale* Wechselwirkung miteinander in Kontakt, wie ja auch die Experimente zeigen. Dabei spielt es überhaupt keine Rolle, wie klein der Wert der Wellenfunktion (oder ihres Betragsquadrates) an einem Teilchenort sein mag (*solange sich in beiden evtl. im Konfigurationsraum weit voneinander getrennten Summanden der Wellenfunktion in (13) noch Teilchen befinden*). Nicht die Entfernung zwischen Teilchen sondern die Verschränkung der Wellenfunktionen der Teilchen ist für deren Wechselwirkung verantwortlich.

Betrachtet man außer den beiden Konzepten der globalen Faktorisierung und der Verschränkung noch den effektiv ständig vorkommenden Fall von "lokaler" Faktorisierung der Wellenfunktionen (das ist der Fall einer Wellenfunktion vom Typ (13) mit faktisch im Konfigurationsraum getrennten Summanden-Funktionen $\Psi_a\Psi_B$ und $\Psi_C\Psi_D$ und Teilchenkoordinaten, die nur "in einem der Summanden" liegen), so gerät man in den sehr interessanten Bereich der Messtheorie[11] und der Dekohärenz, zum Begriff der "aktiven Information" und der "leeren Wellenzüge". Mehr darüber findet sich z.B. bei [2] oder [3].

[11] ..., die in der orthodoxen Quantenmechanik ein Messproblem hat, eben weil dort wegen des beschränkten Zustandsbegriffes das Konzept der Systemunabhängigkeit wegen lokaler Faktorisierung der Wellenfunktionen keinen Sinn macht.

Hinweise zur Literatur

Bücher: Ausführlich, gründlich und gut verständlich ist das Buch von Holland [2]. Es enthält neben den Grundlagen der Theorie auch etliche konkrete Beispielsysteme, für die die de Broglie-Bohm Trajektorien ausgerechnet wurden. Das Buch [1] von Bohm selbst eignet sich weniger als Einstieg gibt aber interessante Einblicke in die Denkweise des "Erfinders" der Theorie. Dürrs Buch [3] ist auf deutsch und liest sich recht gut, ist allerdings sehr polemisch gehalten und teils nicht besonders ausführlich.

Äußerst lesenswert - wenn auch kein Buch über die de Broglie-Bohm Theorie im eigentlichen Sinne - ist die Aufsatzsammlung [4] von John S. Bell. Dort wird deutlich, wie er aus Kritik an den herrschenden Interpretationen der Quantenmechanik und zur Unterstützung nichtlokaler Theorien "verborgener Parameter" seine Bellschen Ungleichungen aufstellte. Die de Broglie-Bohm Theorie wird aus verschiedenen Blickwinkeln betrachtet.

Artikel: In Bohms Originalartikeln [5] von 1952 kann man die Grundlagen der Theorie im Quantenpotential-Formalismus nachlesen. Es werden auch Beispiele durchgerechnet und die Theorie der Messungen wird vorgestellt. Das oben erwähnte Doppelspaltexperiment wird detailiert in [6] durchgerechnet.

Die beiden Artikel [7] beschreiben neue Ideen des Quanten-Ungleichgewichts $\rho \neq |\Psi|^2$ sowie die dynamische Entwicklung zum Quantengleichgewichts-Zustand $\rho = |\Psi|^2$. Überlegungen zur Idee des Quanten-Ungleichgewichts führen zu völlig neuen Aspekten in der Physik.

Literatur

[1] D.Bohm, B.J. Hiley, *The Undivided Universe*, Routledge, London, 1993

[2] P.R. Holland, *The Quantum Theory of Motion*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993

[3] D. Dürr, *Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik*, Springer-verlag, Heidelberg, 2001

[4] J.S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987

[5] D. Bohm, *A suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden Variables"*, Part I, Phys. Rev. 85, 166-79, Part II, Phys. Rev. 85, 180-94

[6] C. Philippidis, C. Dewdney, B.J. Hiley, *Quantum Interference and the Quantum Potential*, Il Nuevo Cimento 52B (1979) 15

[7] A. Valentini, *Signal-locality, uncertainty and the subquantum H-theorem*, Part I, Phys. Letters A 156 (1991) 5, Part II, Phys. Letters A 158 (1991) 1