Der Meßprozeß

Jörg Wassenberg

Seminar über Teilchen- und Kerntheorie

7. November 2001

Die Postulate der Quantenmechanik

1. Zustand $\leftrightarrow$ Vektor $|\Psi(t)\rangle \in$ Hilbertraum $\mathcal{H}$

2. Meßbare Größe $\mathcal{A}$ $\leftrightarrow$ in $\mathcal{H}$ wirkender hermitescher Operator (Observable) A

3. Meßwerte von $\mathcal{A}$ $\leftrightarrow$ Eigenwerte a_n von A
   Wahrscheinlichkeit zur Messung von a_n:
   $$p(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} \left|\left\langle u_n^i \middle| \Psi \right\rangle\right|^2$$

4. Zustand unmittelbar nach Messung von a_n:
   $$\left|\Psi'\right\rangle = \frac{P_n\,|\Psi\rangle}{\|P_n\,|\Psi\rangle\|}$$

5. Zeitentwicklung des Zustands $|\Psi(t)\rangle$ gemäß
   Schrödinger-Gleichung:
   $$i\hbar\frac{d}{dt}\,|\Psi(t)\rangle = H(t)\,|\Psi(t)\rangle$$

6. Vertauschungsrelationen zwischen Ortsoperator $\mathbf{R}$ und Impulsoperator $\mathbf{P}$:
   $$\begin{aligned} [R_i, R_j] &= 0 \\ [P_i, P_j] &= 0 \\ [R_i, P_j] &= i\hbar\delta_{ij} \end{aligned}$$

Postulate 3&4 $\leftrightarrow$ „Meßpostulate“

Modell eines Meßprozesses

Meßobjekt Q:	$\mathcal{H}_Q$,	H_Q
Meßapparatur M:	$\mathcal{H}_M$,	H_M
Gesamtsystem:	$\mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_M$,	$H = \underbrace{H_Q + H_M}_{H_0} + H_I$

Zeitentwicklung des Zustands $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_Q \otimes \mathcal{H}_M$ des Gesamtsystems?

$\rightarrow$ Zeitentwicklungsoperator: $|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0)\,|\Psi(t_0)\rangle$

Eigenschaften:

- $U(t, t_0) = U(t, t')U(t', t_0)$

- $i\hbar \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H(t) U(t, t_0)$

- $$\begin{aligned} \langle\Psi(t_0)|\Psi(t_0)\rangle &= \langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle \\ &= \langle\Psi(t_0)|\underbrace{U^\dagger(t, t_0) U(t, t_0)}_{1}|\Psi(t_0)\rangle \end{aligned}$$

  $\leftrightarrow$ U ist unitär.

  Zeitentwicklung gemäß Schrödinger-Gleichung
  $\leftrightarrow$ unitäre Zeitentwicklung

- $U(t, t_0) = \mathsf{T} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau H(\tau)\right)$

Messung einer Observablen A an Q
$\leftrightarrow$ Wechselwirkung zwischen Q und M über H_I

Modell eines Meßprozesses

- Idealisiertes Modell für H_I:

  Zeigerposition $\leftrightarrow$ Observable X

  zu X kanonisch konjugierter Impuls: P, $\quad [X,P] = i\hbar$

  P ist Erzeugende von Zeigerbewegungen; diese werden durch A kontrolliert.

  $\rightarrow$ idealisierter Ansatz $H_I(t) = -g(t)PA$

  $g(t) = 0$ für $t \notin [t_1, t_2]$ $\leftrightarrow$ endliche Dauer der Messung

- Zeitentwicklungsoperator für Meßvorgang:

$$
\begin{aligned}
U(t,t_0) &= U(t,t_2)\underbrace{U(t_2,t_1)}_{\text{Messung}}U(t_1,t_0) \\
U(t_2,t_1) &= \mathsf{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} d\tau H(\tau)\right) \\
&= \mathsf{T}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} d\tau\,[H_0 - g(\tau)PA]\right) \\
&\overset{H_I \gg H_0}{\approx} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\lambda PA\right), \quad \lambda = \int\limits_{t_1}^{t_2} d\tau\, g(\tau)
\end{aligned}
$$

- Anwendung auf Ausgangszustand $|\Psi\rangle = |a_n\rangle\,|x\rangle$:

$$
\begin{aligned}
U(t_2,t_1)\,|a_n\rangle\,|x\rangle &\approx \underbrace{\exp\left(\frac{i}{\hbar}\lambda P a_n\right)}_{\text{Translationsoperator}}\,|a_n\rangle\,|x\rangle \\
&= |a_n\rangle\,|x + \lambda a_n\rangle
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Zeigerposition nach der Messung repräsentiert Zustand des Meßobjekts.

Das Meßproblem

Messung der Observablen A an Quantensystem Q mittels makroskopischer Meßapparatur M

gesucht: Zeitentwicklung des Gesamtsystems nach der Schrödinger-Gleichung

Nach Messung soll M Zustand von Q anzeigen:

$$|b_0\rangle \overset{\text{Messung}}{\longrightarrow} |b_n\rangle$$

Erneute Messung von A soll denselben Wert liefern:

$$|a_n\rangle \overset{\text{Messung}}{\longrightarrow} |a_n\rangle$$

Anfangszustand des Objekts sei...

- Eigenzustand $|a_n\rangle$:

$$|a_n\rangle\,|b_0\rangle \overset{\text{Messung}}{\longrightarrow} |a_n\rangle\,|b_n\rangle$$

- Linearkombination $\sum_n c_n\,|a_n\rangle$:

$$\left(\textstyle\sum_n c_n\,|a_n\rangle\right)|b_0\rangle = \sum_n c_n\left(|a_n\rangle\,|b_0\rangle\right)$$

$$\overset{\text{Messung}}{\longrightarrow} \quad \textstyle\sum_n c_n\left(|a_n\rangle\,|b_n\rangle\right)$$

Verwendet wurde: Linearität des Zeitentwicklungs-operators

Das Meßproblem

Untersuchung des Endzustands $\sum_n c_n \left(|a_n\rangle\,|b_n\rangle\right)$:

- Wahrscheinlichkeit, Objekt im Zustand $|a_n\rangle$, Apparatur im Zustand $|b_m\rangle$ anzutreffen:

$$
\begin{aligned}
p(a_n, b_m) &= \left|\left(|a_n\rangle\,|b_m\rangle\,, \sum_i c_i \left(|a_i\rangle\,|b_i\rangle\right)\right)\right|^2 \\
&= \left|\sum_i c_i \,\langle a_n|a_i\rangle\,\langle b_m|b_i\rangle\right|^2 \\
&= \left|\sum_i c_i \delta_{ni}\delta_{mi}\right|^2 \\
&= |c_n|^2\,\delta_{mn}
\end{aligned}
$$

  $\rightarrow$ Korrelation zwischen Zuständen von Q und M

- Vergleich mit Meßpostulaten:

  Endzustand $\sum_n c_n \left(|a_n\rangle\,|b_n\rangle\right)$ gemäß Schrödinger-Gleichung ist Superposition von Basiszuständen $|a_n\rangle\,|b_n\rangle$
  $\rightarrow$ reiner Zustand

  Gemäß Postulaten 3 & 4 sollte sich jedoch einer der Zustände $|a_n\rangle\,|b_n\rangle$ mit der Wahrscheinlichkeit $|c_n|^2$ einstellen
  $\rightarrow$ gemischter Zustand

$\rightarrow$Meßproblem: Kann der Meßprozeß nicht durch die Schrödinger-Gleichung beschrieben werden?

Reine und gemischte Zustände

Meßprozeß gemäß Meßpostulaten:

$$\left(\sum_n c_n |a_n\rangle\right)|b_0\rangle \quad \overset{\text{Messung}}{\longrightarrow} \quad „\, |a_n\rangle\,|b_n\rangle\,,\ p\left(|a_n\rangle\,|b_n\rangle\right) = |c_n|^2\,“$$

$$\overset{\text{Ablesen}}{\longrightarrow} \quad |a_n\rangle\,|b_n\rangle$$

„Reduktion des Zustandsvektors“

einheitliche Beschreibung von reinen und gemischten Zuständen über <u>statistischen Operator</u> („Dichtematrix“):

- reiner Zustand $|\Psi\rangle$:

$$\varrho = |\Psi\rangle\,\langle\Psi|$$

- gemischter Zustand $|\Psi_i\rangle$, $p\left(|\Psi_i\rangle\right) = p_i$:

$$\varrho = \sum_i p_i\,|\Psi_i\rangle\,\langle\Psi_i|$$

Bedeutung der Dichtematrix: Berechnung von Erwartungswerten:

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= \sum_i p_i\,\langle\Psi_i|\,A\,|\Psi_i\rangle = \sum_{i,n} p_i\,\langle\Psi_i|\,A\,|n\rangle\,\langle n|\Psi_i\rangle \\ &= \sum_n \langle n|\sum_i p_i\,|\Psi_i\rangle\,\langle\Psi_i|\,A\,|n\rangle = \mathsf{Sp}\,(\varrho A)\end{aligned}$$

Zusammengesetztes System Q+M: A wirkt in $\mathcal{H}_Q$

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= \mathsf{Sp}\,(\varrho A) = \mathsf{Sp}_\mathsf{Q}\mathsf{Sp}_\mathsf{M}\,(\varrho A) = \mathsf{Sp}_\mathsf{Q}\left[\mathsf{Sp}_\mathsf{M}\,(\varrho)\,A\right] \\ &= \mathsf{Sp}_\mathsf{Q}\,(\widehat{\varrho} A)\end{aligned}$$

mit $\widehat{\varrho} = \mathsf{Sp}_\mathsf{M}\,(\varrho)$: reduzierte Dichtematrix

Meßprozeß und Dichtematrix

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n \, |a_n\rangle \, |b_0\rangle$$

Beschreibung der Messung durch Dichtematrix:

$$\begin{aligned}
\varrho_0 &= |\Psi\rangle \, \langle\Psi| \\
&= \sum_{m,n} c_m c_n^* \, |a_m\rangle \, |b_0\rangle \, \langle a_n| \, \langle b_0| \\
\xrightarrow{\text{Messung}} \varrho_1 &= \sum_{m,n} c_m c_n^* \, |a_m\rangle \, |b_m\rangle \, \langle a_n| \, \langle b_n| \\
&= \underbrace{\sum_n |c_n|^2 \, |a_n\rangle \, |b_n\rangle \, \langle a_n| \, \langle b_n|}_{\text{gemischter Zustand}} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{m,n\neq m} c_m c_n^* \, |a_m\rangle \, |b_m\rangle \, \langle a_n| \, \langle b_n|}_{\text{Interferenzterme}}
\end{aligned}$$

Könnte man die Interferenzterme zum Verschwinden bringen, hätte man ein Gemisch.

Meßprozeß und Dichtematrix

Meßwert werde nicht abgelesen:

Relevant für Q ist reduzierte Dichtematrix

$$\begin{aligned}\widehat{\varrho}_1 &= \mathsf{Sp}_{\mathsf{M}}(\varrho_1) = \sum_i \langle i| \sum_{m,n} c_m c_n^* |a_m\rangle |b_m\rangle \langle a_n| \langle b_n|i\rangle \\ &= \sum_{i,m,n} c_m c_n^* |a_m\rangle \langle b_n|i\rangle \langle i|b_m\rangle \langle a_n| \\ &= \sum_n |c_n|^2 |a_n\rangle \langle a_n|\end{aligned}$$

$\widehat{\varrho}_1 \leftrightarrow$ gemischter Zustand

Obwohl sich das Gesamtsystem in einem reinen Zustand befindet, ist die Dichtematrix von Q, die sich durch Spurbildung über M ergibt, die eines Gemisches.

Kopplung an die Umgebung

System Q+M ist immer an die Umgebung Z gekoppelt.

$$\sum_n c_n |a_n\rangle |b_0\rangle |z_0\rangle \xrightarrow{\text{Messung}} \sum_n c_n |a_n\rangle |b_n\rangle |z_n\rangle$$

Zustand der Umgebung wird nicht abgelesen: Spurbildung über Z

$$\begin{aligned}\widehat{\varrho}' &= \mathsf{Sp}_{\mathsf{Z}}(\varrho) = \sum_i \langle i| \sum_{m,n} c_m c_n^* |a_m\rangle |b_m\rangle |z_m\rangle \langle a_n| \langle b_n| \langle z_n|i\rangle \\ &= \sum_n |c_n|^2 |a_n\rangle |b_n\rangle \langle a_n| \langle b_n|\end{aligned}$$

System Q+M befindet sich nach der Messung in einem gemischten Zustand.

Meßgerät als Meßobjekt

Übergang vom reinen Zustand zum Gemisch bei Messung
$\leftrightarrow$ Reduktion des Zustandsvektors

Um Meßergebnis in Erfahrung zu bringen, muß Messung an M vorgenommen werden $\rightarrow$ zweite Apparatur M'

Für Messung an M gelten die gleichen Überlegungen wie für Messung an Q
$\rightarrow$ Messung von $|b_n\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit $|c_n|^2$

M kann als Bestandteil des Meßobjekts aufgefaßt werden.

Problem:Wo liegt die Grenze zwischen Objekt und Beobachter?
An welcher Stelle tritt Reduktion des Zustandsvektors auf?

Beispiel: Polarisationsexperiment (Rae, S.90)

Extremfall: Verschieben der Grenze über den Beobachter hinaus:

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n \, |a_n\rangle \, |b_n\rangle \, \left|b'_n\right\rangle \cdots |Beobachter_n\rangle$$

$\rightarrow$ „Superposition“ von Beobachtern