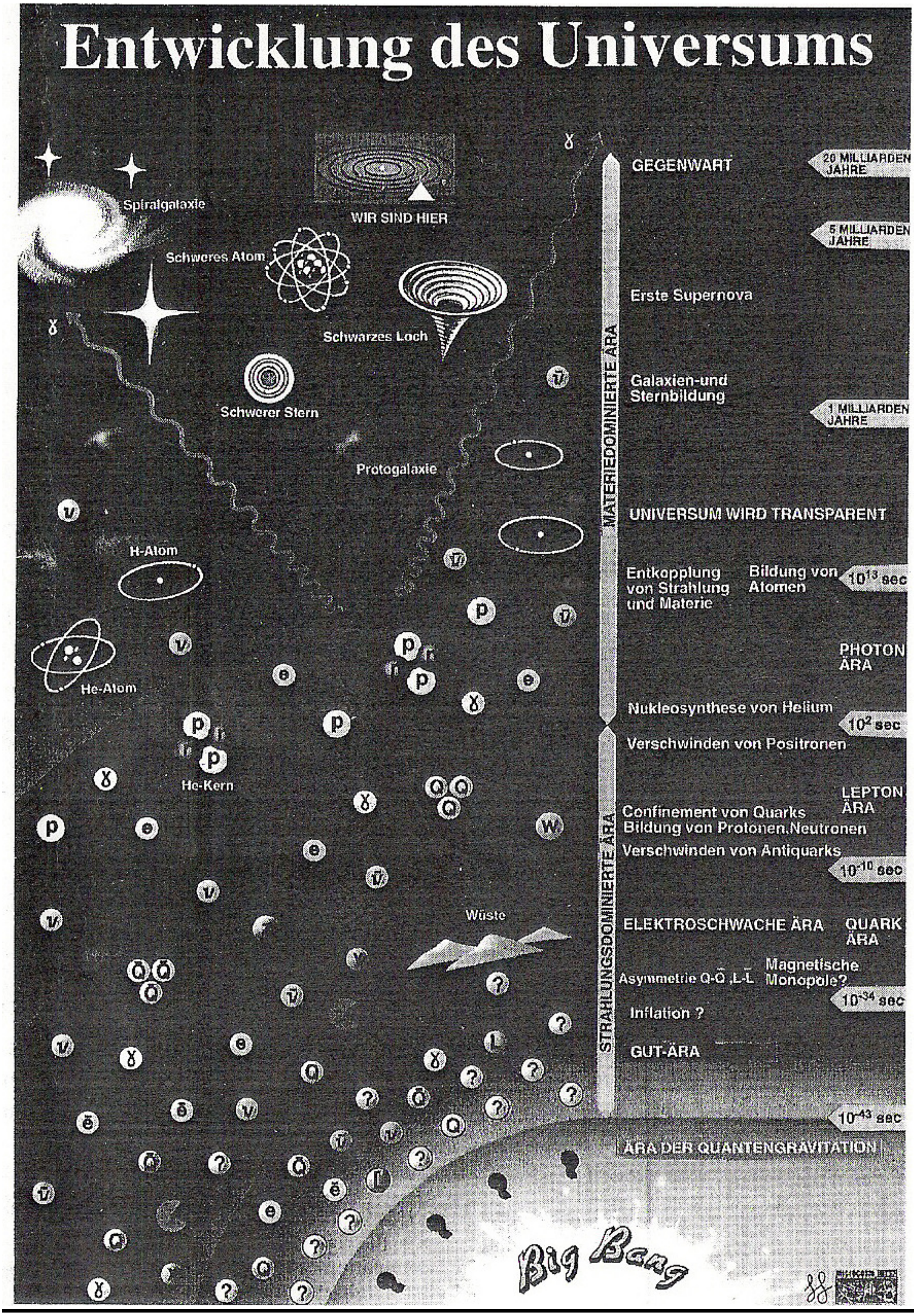

von Christine Broelemann

<u>Kosmologie: Thermodynamik</u>

Wie wir später noch sehen werde, kann man in guter Näherung annehmen, dass sich das frühe Universum in einem thermodynamischen Gleichgewicht befunden hat.
Zur Beschreibung dieses Gleichgewichtszustands betrachten wir die Teilchendichte n, die Energiedichte ρ und den Druck p der Teilchen im Universum, für das wir ein verdünntes Gas schwach wechselwirkender Teilchen mit g internen Freiheitsgraden annehmen. ρ ,n und p sind dann in diesem Fall gegeben durch:

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3}\int f(\vec{p})d^3p$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3}\int E(\vec{p})f(\vec{p})d^3p$$

$$p = \frac{g}{(2\pi)^3}\int \frac{|\vec{p}|^2}{3E} f(\vec{p})d^3p$$

mit $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$. Die Verteilungsfunktion $f(\vec{p})$ ist im Fall des thermodynamischen Gleichgewichts gegeben durch:

$$f(\vec{p}) = \frac{1}{\exp[(E-\mu)/T]\pm 1}$$

wobei μ das chemische Potential ist. Im Fall des +Zeichen erhält man die Fermi-Dirac-Verteilung und im Fall des –Zeichen erhält man die Bose-Einstein-Verteilung.
Im relativistischen Limes (T>>m) und nicht-relativistischen Limes(T<<m) lassen sich obige Integrale bestimmen. Im Vergleich zeigt sich nun, dass die Energiedichte ρ und der Druck p für nichtrelativistische Teilchen exponentiell kleiner ist als für relativistische Teilchen.

Die bisherigen Betrachtungen bezogen sich nur auf eine einzige Teilchenart. Um nun die totale Energiedichte ρ_R und den totalen Druck p_R des Universums, das ja nicht nur aus einer Teilchenart bestand, zu bestimmen, müssen wir über alle Teilchenarten summieren. Diesen relativ komplizierten Summenausdruck kann man nun dadurch vereinfachen, dass man nur die relativistischen Teilchenarten betrachtet. Diese Näherung ist deshalb machbar, da die Energiedichte und der Druck relativistischer Teilchen viel größer ist als für nichtrelativistische Teilchen und diese in der Summe folglich gegenüber den relativistischen Teilchen vernachlässigt werden können. Löst man nun im relativistischen Limes obige Integrale und summiert dann diese Ergebnisse auf, so erhält man:

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$$

$$p_R = \frac{\rho_R}{3} = \frac{\pi^2}{90} g_* T^4$$

hierbei ist g_* die Summe aller Freiheitsgrade der relativistischen Teilchen und gegeben durch

$$g_* = \sum_{Bosonen} g_i (\frac{T_i}{T})^4 + \frac{7}{8}\sum_{Fermionen} g_i (\frac{T_i}{T})^4 \qquad ,$$

T ist die Photonentemperatur und die T_i die jeweiligen Teilchenartentemperaturen.

Eine weitere wichtige Größe der Thermodynamik ist die Entropie. Im Fall des Gleichgewichts ist die Entropie konstant. In unserem Fall heißt das, dass die Entropie im sich ausdehnendem Universum in einem mitbewegten Volumenelement konstant sein muss, da wir ja annehmen, dass sich das Universum (zumindest lokal) in einem thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Mit Hilfe des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik erhält man einen Ausdruck für die Entropie in diesem Volumenelement und zwar:

$$S = \frac{(\rho + p)V}{T}$$

Umformulierung des 1. Hauptsatzes liefert dann schließlich $dS = 0$, d.h. also, dass zumindest lokal im frühen Universum ein thermodynamisches Gleichgewicht gegeben war. Später werden wir genauer untersuchen, wann genau sich das Universum nun während seiner Entwicklung (näherungsweise) im thermodynamischen Gleichgewicht befunden hat.

Zunächst betrachten wir die Entropiedichte s, die folgendermaßen definiert:

$$s = \frac{S}{V} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*s} T^3 \quad , \qquad \text{mit } g_{*s} = \sum_{Bosonen} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{Fermionen} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 \ .$$

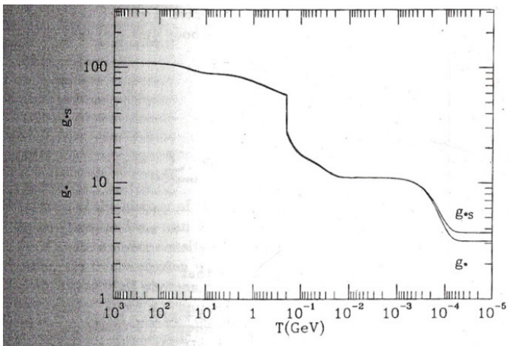

Fig. 3.5: The evolution of $g_*(T)$ as a function of temperature in the $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ theory.

Wie man sieht, entspricht g_{*s} g_* für hohe Temperaturen bzw. dann wenn alle Teilchen die gleiche Temperatur besitzen. Da dies für unsere Betrachtungen gegeben ist, werden im Folgenden nicht zwischen diesen beiden unterscheiden.

Wir betrachten die Entropiedichte daher, da man mit ihrer Hilfe z.B. die Anzahl der Teilchen N einer Teilchenart im thermodynamischen Gleichgewicht in einem solchen Volumenelement bestimmen kann, die dann gegeben ist durch: $N = n/s$, wobei n die Teilchendichte ist.
Des weiteren ergibt sich aus der Tatsache, dass $g_{*s} T^3 R^3$ während der Ausdehnung des Universums konstant bleibt, die Temperaturentwicklung des Universums, die dann wie folgt gegeben ist:

$$T \sim g_{*s}^{-1/3} R^{-1}$$

Hieran kann man auch sehr gut sehen, dass die Temperatur weniger schnell abnimmt, wenn eine Teilchenart vom Gleichgewicht entkoppelt, da ja in diesem Fall g_{*s} kleiner wird und die Temperatur dadurch weniger stark abfällt. Anders ausgedrückt übertragen die entkoppelten Teilchen ihre Entropie auf die im Gleichgewicht verbleibenden Teilchen, da ja die Entropie im Gleichgewicht konstant bleiben muss, dies hat dann zur Folge, dass die Temperatur etwas weniger schnell abfällt.

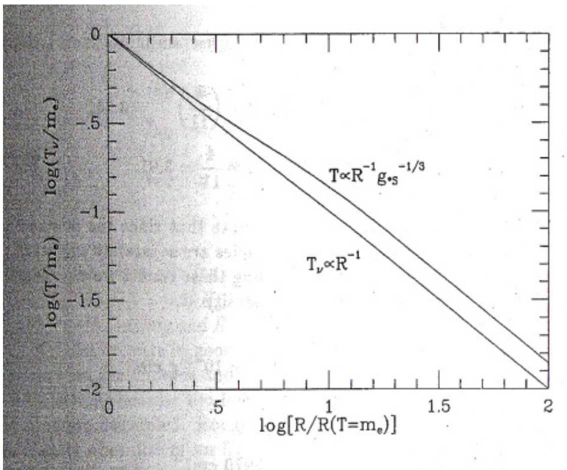

Fig. 3.8: The evolution of T and T_ν through the epoch of $e^{\pm}$ annihilation.

Diese entkoppelten Teilchen, sowohl massive (nichtrelativistische) als auch masselose (relativistische), behalten eine Gleichgewichtsverteilung auch nach der Entkopplung bei. Dies folgt direkt daraus, dass die Energie im Falle der masselosen und die kinetische Energie (über den Impuls) im Fall der massiven Teilchen mit der Ausdehnung des Universums rotverschoben sind. Die Temperatur der masselosen Teilchen fällt dann nach der Entkopplung mit R^{-1} ab, wohingegen die Temperatur der massiven Teilchen mit R^{-3} abfällt. Insgesamt sieht man hieran, dass die Temperatur entkoppelter Teilchen schneller abfällt als die Temperatur der noch im Gleichgewicht befindlichen Teilchen, da ja deren Temperatur durch den Entropieübertrag während der Entkopplung weniger stark abfällt. Daher hat z.B. der (noch nachzuweisende!) Neutrinohintergrund eine geringere Temperatur (~1,96K) als der Photonenhintergrund (~2,75K).
Nun stellt sich die Frage, wann man im frühen Universum überhaupt von einem thermodynamischen Gleichgewicht sprechen kann, d.h. wann also die Wechselwirkungsrate Γ der Teilchenarten viel größer war als die Ausdehnungsrate H des Universums. Ist dies nämlich gegeben, so entwickelt sich das Universum adiabatisch mit einer mit R^{-1} abnehmenden Temperatur. Die Wechselwirkungsrate ist gegeben durch:

$$\Gamma = n\sigma|v| \quad ,$$

wobei n die Teilchendichte, σ der Wirkungsquerschnitt und $|v|$ die relative Geschwindigkeit ist.
Betrachten wir zunächst die Wechselwirkungen, die durch masselose Bosonen vermittelt werden. In diesem Fall ist der Wirkungsquerschnitt für die Streuung zweier Teilchen folgendermaßen gegeben: $\sigma \sim \dfrac{\alpha^2}{T^2}$,
hierbei ist α über die Eichkopplungsstärke definiert. Wie wir gesehen haben ist die Teilchendichte n~T^3 und damit ist $\Gamma \sim \alpha^2 T$
Benutzen wir nun noch die Tatsache, dass die Ausdehnungsrate H während der Strahlungsdominierten Epoche ~$\dfrac{T^2}{m_{pl}}$ (mit m_{pl} der Planck Masse) ,
so folgt für das Verhältnis der Wechselwirkungsrate zur Ausdehnungsrate:

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \frac{\alpha^2 m_{pl}}{T}$$

Dies zeigt nun, dass Wechselwirkungen, die durch masselose Bosonen vermittelt werden nur dann schnell genug verlaufen, um das Gleichgewicht aufrecht zu erhalten, wenn die Temperatur $T \leq \alpha^2 m_{pl} \sim 10^{16} GeV$ ist.
Betrachten wir nun Wechselwirkungen, die durch massive Bosonen vermittelt werden, so erhält man das gleiche Resultat, wenn die Temperatur viel größer ist als die Masse der Bosonen. Ist allerdings die Temperatur kleiner als die Masse der Bosonen, so wird der Wirkungsquerschnitt für diese Wechselwirkungen durch die Kopplungskonstante $G_x \sim \alpha / m_x^2$ charakterisiert, d.h. $\sigma \sim G_x^2 T^2$. Dies ergibt dann $\Gamma \sim G_x^2 T^5$ und $\dfrac{\Gamma}{H} \sim G_x^2 m_{pl} T^2$, d.h. für

$T \geq G_x^{-2/3} m_{pl}^{-1/3}$ sind die Wechselwirkungen, die durch massive Bosonen vermittelt werden schnell genug, um ein Gleichgewicht aufrecht zu erhalten.
Insgesamt haben wir mit Hilfe dieser Betrachtungen eine obere und eine untere Grenze für die Temperatur gefunden oberhalb bzw. unterhalb der das thermodynamische Gleichgewicht nicht gegeben war, d.h. also für $10^{16} GeV \geq\ T \geq G_x^{-2/3} m_{pl}^{-1/3}$ befand sich das Universum im nahezu thermischen Gleichgewicht.

Im Folgenden werden wir die Evolution des Universums etwas genauer betrachten, genauer gesagt werden wir die thermische Geschichte des Universums betrachten. Da ja die Temperatur mit der Ausdehnung des Universums und damit auch im laufe der Zeit abnimmt, kann man auch anstelle einer zeitlichen Evolutionsbetrachtung eine thermische durchführen. Dies ist auch daher sinnvoll, da wichtige Ereignisse im Universum über die Temperatur zu diesem Zeitpunkt charakterisiert sind.
Mit unserem heutigen Wissen kann man nur Aussagen über das Universum bis zur Planck-Skala ($t \sim 10^{-43} s, T \sim 10^{19} GeV$) treffen, davor ist eine quantemechanische Beschreibung der Gravitation notwendig. Dies ist dann auch der Zeitpunkt, an dem unsere Betrachtung beginnt. Im frühen Universum sind die Temperaturen so hoch, dass alle uns heute bekannten Teilchen wie z.B. Quarks, Leptonen, Bosonen etc relativistisch sind, diese Teilchen bilden ein Plasma, aus dem das Universum besteht.
Bei Temperaturen zwischen 10^{16} GeV und 10^{14} GeV fand die GUT-Symmetriebrechung statt, wobei die schweren X Eichbosonen entkoppeln. Dies ist zudem der Zeitpunkt an dem, wie wir gesehen haben, die „ Gleichgewichtsepoche" des Universums beginnt. Die SSB-Symmetriebrechung fand statt, als die Temperatur $\approx 300 GeV$ betrug, hierbei erhalten einige Eichbosonen über den Higgs Mechanismus eine Masse. Dies hat zur Folge, dass die Teilchen, die mittels Wechselwirkungen, die durch solche Bosonen vermittelt werden, wechselwirken bei einer Temperatur $\sim G_x^{-2/3} m_{pl}^{-1/3}$ entkoppeln.
Die Quarks und die Antiquarks entkoppeln, als die Temperatur unterhalb von 1GeV sinkt und vernichten sich schließlich fast vollständig gegenseitig. Der geringe Quarküberschuß, der dabei übrig bleibt, bildet die gesamte heutige baryonische Materie.
Bei einem weiteren Phasenübergang, der zwischen 300MeV und 100MeV stattfand, wurde die chirale Symmetrie in der starken Wechselwirkung gebrochen. Des weiteren gehen die bis dahin noch freien Quarks in Form eines Quark-Gluon-Plasmas in Baryonen und Mesonen über. Eine wichtige Epoche des Universums war die Epoche der primordialen Nukleosynthese, die zwischen 10MeV und 0,1MeV stattfand. Während dieser Epoche entkoppeln sowohl die Neutrinos als auch die $e^{\pm}$-Paare, die sich daraufhin gegenseitig vernichten. Betrachten wir nun wieder das Verhältnis der Wechselwirkungsrate zur Ausdehnungsrate, so erhalten wir die Temperatur, bei der die Neutrinos entkoppeln. Die Neutrinowechselwirkungen sind durch die Fermikonstante G_F charakterisiert, der Wirkungsquerschnitt für die Neutrinoreaktionen ist somit $\sim G_F^2 T^2$, damit ist die Wechselwirkungsrate $\sim G_F^2 T^5$ und $\Gamma / H \sim (T / 1MeV)^3$. Hieraus kann man dann ablesen, dass die Neutrinos unterhalb von 1MeV entkoppeln. Kurz danach fällt die Temperatur unterhalb der Schwellentemperatur der $e^{\pm}$-Paare ($m_e = 0{,}511 MeV$), die dann ebenfalls entkoppeln und dabei ihre Entropie auf die Photonen übertragen, die dann ja noch die einzigen relativistischen Teilchen sind. Die heutige Temperatur der Neutrinos kann man nun darüber bestimmen, dass $g_*(RT)^3$ während der Ausdehnung konstant bleibt und dass die $e^{\pm}$-Paare und die Neutrinos fast gleichzeitig entkoppeln, die Entropie der $e^{\pm}$-Paare jedoch nicht mit auf die Neutrinos übertragen wird. Daher entspricht das Verhältnis von g_* vorher zu g_* nachher dem

Verhältnis von (RT) nach der $e^{\pm}$-Entkopplung zu (RT) davor dem Verhältnis bzw. dem Verhältnis der Photonentemperatur zur Neutrinotemperatur.

Bislang war das Universum strahlungsdominiert gewesen, dies ändert sich ca. 10^{11} s nach dem Urknall, da zu diesem Zeitpunkt die Materiedichte der Strahlungsdichte im Universum entsprach und das Universum also nach diesem Zeitpunkt materidominiert wurde.

700000 Jahre ($\sim 10^{13}\,s$) nach dem Urknall ist die Temperatur schließlich soweit gesunken, dass die bis dahin noch freien Elektronen von den Atomkernen „ eingefangen“ werden und Atome bilden. Die Temperatur entspricht zu diesem Zeitpunkt 0,308eV, diesen Wert erhält man nun dadurch, indem man die Häufigkeit der freien Elektronen, die über die Saha Gleichung gegeben ist, in Abhängigkeit der Rotverschiebung betrachtet. Definiert man nun den Punkt der Rekombination als den Punkt, bei dem 90% der Elektronen „ eingefangen“ wurden, so kann man die Rotverschiebung bei der Rekombination bestimmen und über den Zusammenhang $T = T_0(1+z)$ schließlich die Temperatur.

Da nun die Photonen nicht mehr mit den Elektronen wechselwirken können, wird das Universum schließlich durchsichtig und die Strahlung, also die Photonen, entkoppelt nun von der Materie. Damit endet nun auch die lange Epoche nahezu thermischen Gleichgewichts, zudem wachsen von nun an die Dichtefluktuationen, was die Bildung großräumiger Strukturen wie z.B. Galaxien, ermöglicht.