Die Robertson- Walker Metrik

Marcus Tassler

20. Juli 2005

1 Raum und Zeit in der allgemeinen Relativitätstheorie

1.1 Äquivalenzprinzip

Über die heute mit einer Genauigkeit von 10^{-13} bestätigte Gleichheit von schwerer und träger Masse folgt daß in einem frei fallenden Bezugssystem lokal die selben Bewegungsgleichungen wie in einem unbeschleunigten Inertialsystem gelten.
Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie bildet entsprechend die weitergehende Behauptung:

Aequivalenzprinzip *In einem lokalen (frei fallenden) Inertialsystem gelten die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie ohne Gravitation.*
Gegeben sei nun ein beliebiges Beobachterkoordinatensystem $\vec{x} = (x^0, .., x^3)$ so-

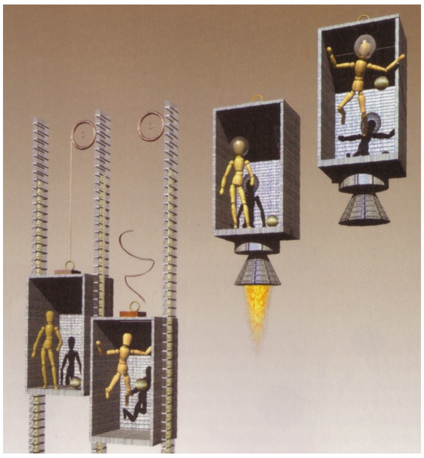

Abbildung 1: Darstellung des Äquivalenzprinzips

wie ein lokales (frei fallendes Inertialsystem) an der Stelle $\vec{x_0}$ mit $\vec{\xi} = (\xi^0, .., \xi^3)$.
Gemäß der speziellen Relativitätstheorie ist die Größe $ds^2 = d\xi_\alpha d\xi^\beta = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$ in allen lokalen Inertialsystemen bei $\vec{x_0}$ invariant.
In einer Umgebung von $\vec{x_0}$ gilt weiter: $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Somit ergibt sich die Größe ds im Beobachterkoordinatensystem über:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(\vec{x_0}) dx^\mu dx^\nu \tag{1}$$

Über den letzten Ausdruck wird ein Riemannscher Raum mit dem **metrischen Tensor** $g_{\mu\nu}$ definiert.

1.2 Der Riemannsche Raum

Ein Raum mit einer Metrik der Form

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \tag{2}$$

wird als Riemannscher Raum bezeichnet.
Betrachtet man als Beispiel ein zweidimensionales Koordinatensystem $x = (x^1, x^2)$ mit der Metrik $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ und skaliert die Abstände zwischen den einzelnen Punkten des Koordinatensystems mit $dx'^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ so wird deutlich daß ein Riemannscher Raum sich als gekrümmte Hyperfläche in einem höherdimensionalen kartesischen Raum auffassen läßt.

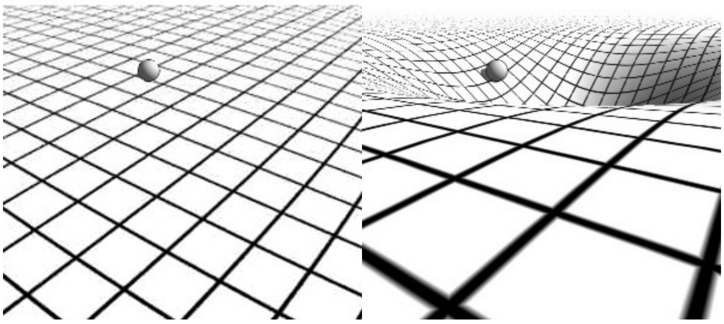

Abbildung 2: Skalierung eines zweidimensionalen Koordinatensystems mit $dx'^2 = ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

Die Form der Hyperfläche ist bei invariantem ds unabhängig von der Wahl der Koordinatensystems $x = (x^1, x^2)$.
Als Maß für die Krümmung der Hyperfläche dient der **Krümmungstensor** (Riemann- Tensor)

$$R^m_{\ ikp} = \frac{\partial \Gamma^m_{ik}}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma^m_{ip}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{ik}\Gamma^m_{rp} - \Gamma^r_{ip}\Gamma^m_{rk} \tag{3}$$

mit $\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{g^{\kappa\sigma}}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} \right)$ (Christoffelsymbole).
Bei einer ungekrümmten Hyperfläche gilt $R^m_{\ ikp} = 0$. Folgende Kontraktionen des Krümmungstensors dienen ebenfalls als Maße für die Krümmung der Hyperfläche:

$$R_{ip} = R^m_{\ imp} \ \textbf{(Ricci- Tensor)} \tag{4}$$

$$R = R^i_{\ i} = g^{ik} R_{ik} \ \textbf{(Krümmungsskalar)} \tag{5}$$

1.3 Bewegung im Gravitationsfeld

Im folgenden wird die Bewegung eines Massenpunktes im Gravitationsfeld betrachtet. Nach dem Äquivalenzprinzip bewegt sich der Massepunkt in einem lokalen Inertialsystem $\vec{\xi} = (\xi^0, .., \xi^3)$ kräftefrei und gehorcht gemäß der SRT der Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \tag{6}$$

In einem beliebigen Beobachterkoordinatensystem $\vec{x} = (x^0, .., x^3)$ gilt dann lokal

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) &= \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \\ \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial\xi^\alpha} = \delta^\kappa_\mu \overset{\cdot\partial x^\kappa/\partial\xi^\alpha}{\Rightarrow} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} &= -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \end{aligned} \tag{7}$$

wobei τ die Eigenzeit des Massenpunkts bezeichnet. Die Bewegungsgleichung läßt sich also allein über den metrischen Tensor, welcher somit die volle Information über das Gravitationsfeld beinhaltet, formulieren. Gemäß der speziellen

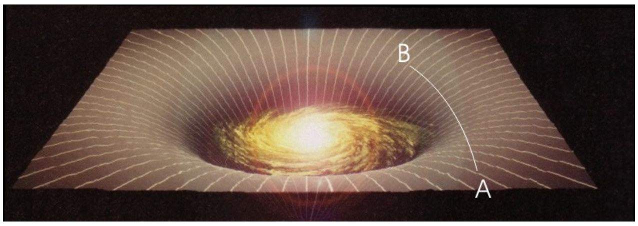

Abbildung 3: Bewegung im Gravitationsfeld

Relativitätstheorie gilt weiter $d\tau = ds$ womit die Bewegungsgleichung folgende Form annimmt:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} \tag{8}$$

Hierbei handelt es sich um eine **Geodäte im Riemannschen Raum**. Ein frei fallender Massenpunkt wählt also zwischen zwei Bahnpunkten den kürzesten Weg im Riemannschen Raum.

2 Die Robertson-Walker Metrik

2.1 Das kosmologische Prinzip

Eine wichtige Grundlage der heutigen Kosmologie ist folgende Annahme:

Kosmologisches Prinzip *Im Universum sind alle Orte und Richtungen gleichwertig.*

Diese Annahme bedeutet im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie die Annahme einer auf großen Skalen homogenen und isotropen Massenverteilung im Universum.

Das kosmologische Prinzip wurde zunächst lediglich zur Vereinfachung der mathematischen Betrachtungen eingeführt, ist jedoch bald aufgrund des Erfolgs dieser Annahme bei der Beschreibung kosmologischer Vorgänge sowie aufgrund ihrer Bestätigung durch heutige Messungen der Massenverteilung im Universum zu einem Grundpfeiler der Kosmologie geworden.

2.2 Konstruktion der Metrik

Die Forderung nach räumlicher Homogenität und Isotropie überträgt sich auf die Metrik des Universums als Forderung nach einer konstanter Krümmung der Metrik im dreidimensionalen Unterraum.
Betrachtet man zunächst vereinfachend ein zweidimensionales Koordinatensystem mit einer Metrik der Form (2) und stellt dieses als zweidimensionale Hyperfläche in einem höherdimensionalen kartesischen Raum dar, so weist die Hyperfläche mit

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{k} R^2 \text{ mit k=-1,1 oder k} \to 0 \tag{9}$$

eine konstante räumliche Krümmung auf. Die Metrik erfüllt also die Forderung nach räumlicher Homogenität und Isotropie.
Im euklidischen Raum ist die Metrik gegeben durch:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \tag{10}$$

Beseitigt man x_3 über (9) so folgt:

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2)^2}{\frac{R^2}{k} - x_1^2 - x_2^2} \tag{11}$$

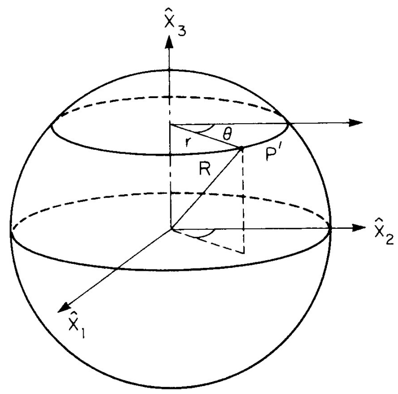

Abbildung 4: Darstellung der verwendeten Eigenkoordinaten

Mit $x_1 = r' cos\theta, x_2 = r' sin\theta$ ergibt sich schließlich die Metrik der Hyperfläche in Eigenkoordinaten:

$$dl^2 = \frac{R^2 dr'^2}{R^2 - kr'^2} + r'^2 d\theta^2$$

$$r = \frac{r'}{R} \Rightarrow dl^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\theta^2 \right) \tag{12}$$

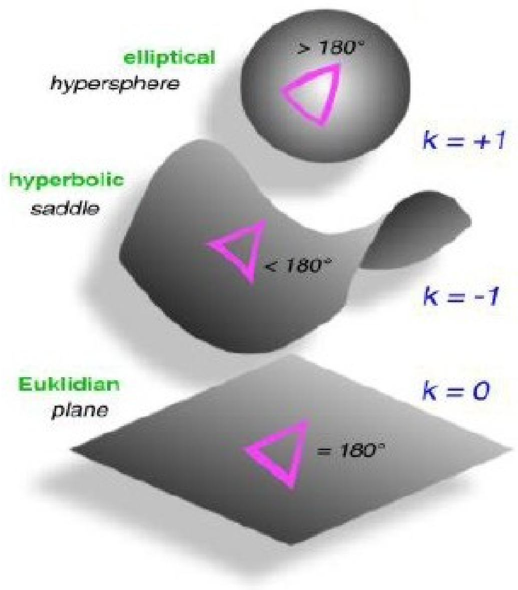

Abbildung 5: Mögliche Geometrien für ein zweidimensionales Universum. Ebenso wie im 3 dimensionalen unterscheidet man in Abhängigkeit davon welchen Wert k annimmt zwischen einer geschlossen, einer offenen und einer flachen Geometrie.

Für eine dreidimensionale Hyperfläche der Form

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{k}R^2 \tag{13}$$

folgt analog über Beseitigung von x_4

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{\frac{R^2}{k} - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2} \tag{14}$$

und die Koordinatenwahl

$$x_1 = R\ \ r\cos\phi\sin\theta, x_2 = R\ \ r\sin\phi\sin\theta, x_3 = R\ \ r\cos\theta \tag{15}$$

folgende Metrik in Eigenkoordinaten:

$$dl^2 = R^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{16}$$

Diese Metrik erfüllt im Räumlichen die Forderung des kosmologischen Prinzips nach Homogenität und Isotropie.
Fügt man nun noch über $ds^2 = dt^2 - dl^2$ und $R \rightarrow R(t)$ eine zeitliche Komponente hinzu erhält man als eine das kosmologische Prinzip erfüllende Raumzeitgeometrie die **Robertson- Walker Metrik**:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{17}$$

Die Größe $R(t)$ wird als **kosmischer Skalenfaktor** bezeichnet.
Sowohl Hyperfläche als auch das zugehörige Koordinatensystem
$x_1 = R(t)\ r\cos\phi\sin\theta, x_2 = R(t)\ r\sin\phi\sin\theta, x_3 = R(t)\ r\cos\theta$ werden über $R(t)$ skaliert. Es handelt sich bei (x_1, x_2, x_3) also um ein **mitbewegtes Koordinatensystem**.

2.3 Hintergrundstrahlung

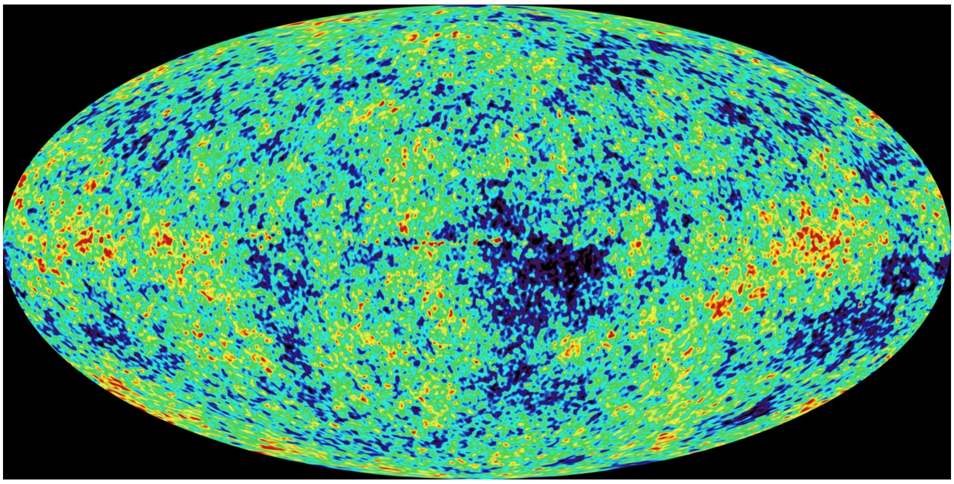

Abbildung 6: Vermessung der Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung durch den Satelliten WMAP (-200 - 200 μK)

Ein Lichtstrahl ($ds^2 = 0$) werde zum Zeitpunkt t_0 an der Stelle (r_L, ϕ_L, θ_L) emittiert und erreiche einen Beobachter an der Stelle r=0 zum Zeitpunkt t.
Die Wahl des Beobachterstandpunktes ist aufgrund der räumlichen Homogenität der Metrik frei. Für r=0 folgt: $d\phi = d\theta = 0$.
Setzt man nun die Bedingung $ds^2 = d\phi = d\theta = 0$ in die Robertson-Walker Metrik (17) ein so folgt:

$$dt^2 = R(t)^2 \frac{dr^2}{1-kr^2} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_L} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \tag{18}$$

Der Abstand d des Empfängers zum Ursprungsort des Lichtstrahls (r_L, ϕ_L, θ_L) zum Empfangszeitpunkt t ergibt sich über:

$$d(t) = \int_0^{r_L} \sqrt{g_{rr}}dr \Rightarrow d(t) = R(t) \int_0^{r_L} \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} \tag{19}$$

wobei die Komponente g_{rr} des metrischen Tensors aus der Robertson-Walker Metrik (17) mit $g_{rr} = \frac{R^2(t)}{1-kr^2}$ folgt. Mit (18) folgt schließlich:

$$d(t) = R(t) \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{R(t)} \tag{20}$$

Ist nun d für $t_0 \approx 0$ endlich so ist zu erwarten daß das beobachtbare Universum in der Vergangenheit von einem **Partikelhorizont** begrenzt ist, d.h. daß man aus einer Entfernung d in jeder Richtung noch jene Strahlung empfangen kann, welche frei wurde als Elektronen und Positronen aus dem thermischen Gleichgewicht mit den Photonen entkoppelten und das Universum für Strahlung transparent wurde.
Die Homogenität dieses mittlerweile insbesondere durch den Satelliten WMAP genau vermessenen Strahlenhintergrunds stellt eine bedeutende Bestätigung für das kosmologische Prinzip dar.

2.4 Kosmologische Rotverschiebung

Betrachtet man nun zwei aufeinanderfolgende Wellenberge des emittierten Lichtstrahls so gilt nach (20)

$$d = R(t) \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} = R(t) \int_{t_0+\delta t_0}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{R(t)} \tag{21}$$

da beide Wellenberge bei langsamer Änderung des kosmischen Skalenfaktors die selbe Distanz d zum Empfänger zurücklegen werden. Über Vertauschung der Integrationsgrenzen folgt:

$$0 = \int_{t_1}^{t_1+\delta t_1} \frac{dt}{R(t)} - \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)} - \frac{\delta t_0}{R(t_0)} \tag{22}$$

Drückt man δt nun über die Frequenz des Lichtstrahls aus

$$\delta t = \frac{1}{\nu} \tag{23}$$

so ergibt sich folgende wichtige Beziehung:

$$R(t_1)\nu_1 = R(t_0)\nu_0 \Rightarrow R(t)\nu(t) = const \tag{24}$$

Das Produkt aus kosmischem Skalenfaktor und Frequenz des Lichtstrahls bleibt also für alle Zeiten konstant. Bei einem expandierenden Universum etwa muß sich die Frequenz des Lichtstrahls mit dem Anwachsen des kosmischen Skalenfaktors verringern. Die **kosmologische Rotverschiebung** z_{kosm} ergibt sich schließlich über:

$$z = \frac{\lambda_{Empf\ddot{a}nger}}{\lambda_{Sender}} - 1 = \frac{\nu_0}{\nu_1} - 1 \Rightarrow z_{kosm} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} - 1 \tag{25}$$

Sie ist ausschließlich vom Verhältnis zwischen dem kosmischen Skalenfaktor zum Empfangszeitpunkt und dem kosmischen Skalenfaktor zum Emissionszeitpunkt bestimmt.

2.5 Hubbles Gesetz

Eine Taylorentwicklung des kosmischen Skalenfaktors nach der Zeit liefert

$$R = R(t_0)\left(1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0 H_0^2}{2}(t - t_0)^2 + ..\right) \tag{26}$$

wobei die Parameter H_0 und q_0 wie folgt definiert sind:

$$H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}, \;\; q_0 = \frac{\ddot{R}(t_0)R(t_0)}{\dot{R}^2(t_0)} \tag{27}$$

Für die kosmologische Rotverschiebung folgt:

$$z_{kosm}(t_0, t_1) = \frac{R(t_1)}{R(t_0)} - 1 \approx H_0(t_1 - t_0) + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2(t_1 - t_0)^2 \tag{28}$$

Nach (25) gilt weiter:

$$\frac{1}{R(t)} = \frac{1}{R(t_1)}(z_{kosm}(t, t_1) + 1) \tag{29}$$

Die Entfernung d zwischen dem Empfängsort und Ausgangsort eines Lichtstrahls zum Empfangszeitpunkt läßt sich nach (20) berechnen und mit obiger Beziehung zu folgendem Ausdruck umformen:

$$d = R(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} = R(t_1)\int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t_1)}(z_{kosm} + 1) \tag{30}$$

Über Einsetzen von (28) folgt weiter:

$$d = \int_{t_0}^{t_1} dt(1 + H_0(t - t_1) + ..) \approx (t_1 - t_0) + \frac{H_0(t_1 - t_0)^2}{2} \tag{31}$$

Formt man dies nun nach z_{kosm} um so folgt schließlich die **Rotverschiebungs-Abstands-Relation**:

$$z_{kosm} \approx H_0 d + \frac{1}{2}(1 + q_0)H_0^2 d^2 \tag{32}$$

Der erste Teil dieses Ausdrucks ist das bekannte Hubble-Gesetz wobei die Hubblekonstante nach (27) von der Expansionsgeschwindigkeit des Universums und der Größe des kosmischen Skalenfaktors bestimmt ist. Neueste Messungen ergeben eine **Hubblekonstante** von:

$$H_0 = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} = (72 \pm 8)\frac{km/s}{Mpc} \tag{33}$$

Gemäß Definition des Hubblekonstante folgt aus dem positiven Vorzeichen ein **expandierendes Universum**.

Der zweite Teil des Ausdrucks (32) wird hingegen von dem Parameter q_0 mitbestimmt. Dieser beinhaltet nach (27) auch die Information darüber ob das Universum beschleunigt bzw. verlangsamt expandiert und weist insbesondere das entgegengesetzte Vorzeichen der zweiten Ableitung des kosmischen Skalenfaktors nach der Zeit auf. Gemäß neuesten Beobachtung ergibt sich q_0 mit:

$$q_0 = \frac{-\ddot{R}(t)R(t)}{\dot{R}^2(t)} = -0.5 \pm 0.16 \tag{34}$$

Das negative Vorzeichen bedeutet eine **beschleunigte Expansion** des Universums.