

Phasenübergänge

Spontane Symmetriebrechung und ihre Spuren

Michael Köpf

19. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	SSB und Wiederherstellung der Symmetrie	2
2.1	Spontane Symmetriebrechung	2
2.2	Wiederherstellung der Symmetrie	2
2.3	Phasenübergänge erster und zweiter Ordnung	3
3	Rechenbeispiel: Elektroschwache Symmetriebrechung	3
4	Spuren spontaner Symmetriebrechung in der Vakuumstruktur	6
4.1	Domain Walls	6
4.2	Kosmische Strings	7
4.3	Magnetische Monopole	7

1 Einleitung

Phasenübergänge mit spontaner Symmetriebrechung sind für die Theorie der Elementarteilchen von großer Bedeutung, da Bosonen und Fermionen durch sie ihre Masse erhalten. Im Folgenden wird zuerst der Begriff der Spontanen Symmetriebrechung (SSB) definiert. Danach wird beschrieben, wie ein Phasenübergang mathematisch zu beschreiben ist. Im Anschluss daran wird als konkretes Beispiel der Phasenübergang der elektroschwachen Symmetriebrechung behandelt. Zuletzt wird dann auf die wichtige Frage eingegangen, welche messbaren Spuren bei Phasenübergängen mit SSB zurückbleiben. Den Ergebnissen dieser Überlegungen werden dann tatsächliche Messdaten gegenübergestellt.

2 SSB und Wiederherstellung der Symmetrie

2.1 Spontane Symmetriebrechung

Was man unter spontaner Symmetriebrechung zu verstehen hat, lässt sich anhand eines einfachen Modells beschreiben. Dazu betrachtet man die Lagrangedichte \mathcal{L} eines reellen Skalarfeldes

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi),$$

wobei das Potential durch

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4$$

gegeben ist. Aufgrund der symmetrischen Form des Potentials ist \mathcal{L} symmetrisch unter der diskreten Transformation $\phi \rightarrow -\phi$. $V(\phi)$ besitzt ein lokales Maximum in $\phi = 0$ und zwei äquivalente Minima in $\phi = \sigma_\pm = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$. Eine Quantentheorie muss um einen stabilen Grundzustand, den Vakuum Erwartungswert (VEW) konstruiert werden. Dieser muss in einem stabilen Extremum des Potentials, also einem Minimum von $V(\phi)$ liegen. Die Natur muss sich deshalb für eines der beiden völlig äquivalenten Minima in $\phi = \sigma_\pm$ entscheiden. Sobald ein Minimum als VEW ausgezeichnet ist, ist die Spiegelsymmetrie des Systems gebrochen. Immer dann, wenn eine Symmetrie der Lagrangedichte vom Vakuum nicht eingehalten wird, spricht man von *spontaner Symmetriebrechung*.

2.2 Wiederherstellung der Symmetrie

Als einfaches Modell zur Beschreibung der Wiederherstellung gebrochener Symmetrien bei hohen Temperaturen betrachten wir den Effekt einer endlichen Temperatur auf die Bewegung eines Teilchens. Ausgehend vom Potential $V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \sigma^2)^2$ erstellen wir eine naive Theorie um den VEW $\langle \phi \rangle = 0$. Aus der Krümmung des Potentials im Vakuumzustand lässt sich die Masse des physikalischen Bosons der Theorie berechnen:

$$m^2 = V''(0) = -\lambda \sigma^2 \Rightarrow .$$

Man erhält also eine imaginäre Masse. Die entsprechenden Lösungen für ϕ sind exponentiell wachsende bzw. fallende Funktionen, die solange wachsen bzw. fallen, bis sie ein Potentialminimum in $\pm \sigma$ erreicht haben. Nun sei ϕ in Kontakt mit einem Wärmebad. Dieses dämpft das exponentielle Wachstum von ϕ . Mathematisch lässt sich dieser Effekt durch Einführung einer zu ϕ gehörenden Plasma-Masse $m_{\text{Plasma}}^2 = a\lambda T^2$ ausdrücken. Anstelle der tatsächlichen Masse von ϕ setzen wir dann eine effektive Masse m_T , für die $m_T^2 = -\lambda \sigma^2 + m_{\text{Plasma}}^2$ gilt, in das Potential ein und erhalten so

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} \{ \phi^4 + 2 \cdot (aT^2 - \sigma^2) \phi^2 + \sigma^4 \}.$$

Das Potential ist nun T abhängig, wobei das T in einem ϕ^2 -Term steht. Deshalb muss nun auch $\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$ von T abhängen. Man erhält

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}(0) = \lambda (aT^2 - \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} \text{Max. für} & T < T_C \\ \text{Min. für} & T > T_C \end{cases},$$

wobei $T_C = \sigma/\sqrt{a}$ gilt. $\langle \phi \rangle = 0$ ist also ein stabiler Vakuumzustand für Temperaturen $T > T_C$. In diesem Temperaturbereich ist die Symmetrie wieder hergestellt. Will man diesen Vorgang streng mathematisch beschreiben, so lässt man den Effekt des Wärmebades in Quantenkorrekturen höherer Ordnung des klassischen Potentials einfließen. Man betrachtet dann nicht mehr das Potential, sondern die Dichte der freien Energie von ϕ , $V_T(\phi)$. Mit Einschleifen-Quantenkorrekturen gilt

$$V_T(\phi) = V(\phi) + \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left[1 - \exp \left[-\sqrt{x^2 + M^2/T^2} \right] \right],$$

$$\text{mit } V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 + \frac{1}{64\pi^2}M^4 \ln \left(\frac{M^2}{\mu^2} \right) \quad \text{und} \quad M^2(\phi) = -m^2 + 3\lambda\phi^2.$$

$V_T(\phi)$ ist also die Summe aus dem effektiven Einschleifen-Potential bei $T = 0$, $V(\phi)$, und temperaturabhängigen Quantenkorrekturen, die durch ein Funktional, welches mit Faktor T^4 eingeht, ausgedrückt werden. Um die Temperaturabhängigkeit besser darzustellen, entwickelt man $V_T(\phi)$ für große T in Potenzen von T und erhält

$$V_T(\phi_c) = V(\phi_c) + \frac{\lambda}{8}T^2\phi_c^2 - \frac{\pi^2}{90}T^4 + \dots$$

Wieder gibt es einen T -abhängigen ϕ^2 -Term, so dass die Krümmung des Potentials auch in diesem Fall von T abhängig ist. Damit ergibt sich für $\phi = 0$

$$\frac{\partial^2 V_T}{\partial \phi_c^2}(0) = -m^2 + \frac{\lambda}{4}T^2 \begin{cases} < 0 \text{ für } T < \frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \\ > 0 \text{ für } T > \frac{2m}{\sqrt{\lambda}} \end{cases}.$$

Es gibt also erneut eine kritische Temperatur T_C , oberhalb derer in $\phi = 0$ ein globales Minimum vorliegt. Die Symmetrie ist also für $T > T_C$ wieder hergestellt.

2.3 Phasenübergänge erster und zweiter Ordnung

Man unterscheidet zwischen Phasenübergängen erster und zweiter Ordnung. Charakteristisch für einen Phasenübergang erster Ordnung ist das Auftreten einer Potentialbarriere zwischen den lokalen Minima. Wir betrachten im Folgenden den Ablauf eines solchen Phasenüberganges. Dabei vollziehen wir die Entwicklung nach, die im Universum wahrscheinlich tatsächlich stattgefunden hat. Wir gehen von sehr hohen Temperaturen, also dem Zustand kurz nach dem Urknall, aus, und verfolgen die Entwicklung des Potentials mit fortschreitender Abkühlung des Universums. Abbildung 1 zeigt, wie sich das Potential mit fallender Temperatur verändert. Für sehr hohe T liegt typischerweise ein quadratisches Potential vor. Sinkt T auf eine Temperatur T_2 , so flacht das Potential ab und bildet ein lokales Minimum in $\phi \neq 0$, also ein nichttriviales Minimum aus. Sinkt die Temperatur weiter, bis auf die kritische Temperatur T_C , so sind die Minima zwar entartet, jedoch immer noch durch eine Potentialbarriere getrennt. Das führt dazu, dass das nichttriviale Minimum bei noch tieferen Temperaturen zwar energetisch günstiger liegt, der Phasenübergang $\langle \phi \rangle = 0 \rightarrow \langle \phi \rangle = \sigma$ aber nur durch Tunneln stattfinden kann. In diesem Temperaturbereich spricht man auch von einem unterkühlten Universum. Erst unterhalb einer Temperatur $T_2 < T_C$ verschwindet die Barriere schließlich ganz und der Übergang kann kontinuierlich stattfinden. Im Gegensatz dazu gibt es bei Phasenübergängen zweiter Ordnung keine Potentialbarriere, so dass der Übergang in das nichttriviale Minimum kontinuierlich erfolgen kann, sobald eine kritische Temperatur T_C unterschritten ist.

3 Rechenbeispiel: Elektroschwache Symmetriebrechung

Nachdem wir in den vorangegangenen Abschnitten den allgemeinen Mechanismus der Phasenübergänge besprochen haben, wenden wir uns jetzt dem konkreten Beispiel der elektroschwachen Symmetriebrechung zu. Bei diesem Phasenübergang bricht ein komplexes $SU(2)$ -Dublett von Skalarfeldern Φ

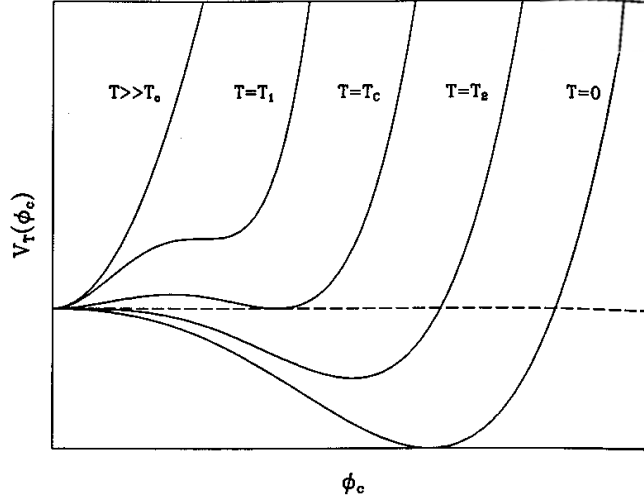


Abbildung 1: Potentialverlauf bei einem Phasenübergang erster Ordnung

eine $SU(2) \otimes U(1)$ -Symmetrie zu einer $U(1)$ -Symmetrie. Φ lässt sich durch vier reelle Skalarfelder ausdrücken:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi + i\phi_3 \end{pmatrix}.$$

Das Potential ist gegeben als

$$V(\phi) = -m^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2.$$

Man sieht, dass $V(\Phi)$ nur von $\Phi^\dagger \Phi = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi^2 + \phi_3^2)/2$ abhängig ist. D.h. die Richtung des Minimums im Φ -Raum ist beliebig. O.B.d.A. wählen wir die ϕ -Richtung. Betrachtet man dann das Potential in Φ -Richtung, so erhält man wieder genau das Potential aus dem einfachen Beispiel in Abschnitt 2.1:

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4.$$

Die Minima, und damit die möglichen VEW, des Potentials sind durch $\langle \phi \rangle^2 = \frac{m^2}{\lambda} = \sigma^2$ gegeben. Um den Verlauf des Phasenüberganges zu beschreiben, betrachten wir nun wieder das effektive Einschleifen-Potential bei $T = 0$ um dann zusammen mit temperaturabhängigen Quantenkorrekturen die Dichte der freien Energie aufzustellen. Da W - und Z -Eichbosonen sowie Fermionen bei der elektroschwachen SSB eine Masse erhalten, kommen entsprechende zusätzliche Terme im effektiven Einschleifen-Potential zu stande:

$$\begin{aligned} V(\phi_c) &= -\frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4 \\ \text{Skalar-Loops} &+ \frac{1}{64\pi^2} (-m^2 + 3\lambda\phi_c^2)^2 \ln \left(\frac{-m^2 + 3\lambda\phi_c^2}{\mu^2} \right) \\ \text{Eichbosonen} &+ \frac{3}{1024\pi^2} [2g^4 + (g^2 + g'^2)^2] \phi_c^4 \ln \left(\frac{\phi_c^2}{\mu^2} \right) \\ \text{Fermionen} &- \frac{3}{64\pi^2} h_t^4 \phi_c^4 \ln \left(\frac{\phi_c^2}{\mu^2} \right) \end{aligned}$$

Dieses komplizierte Potential lässt sich für unsere Zwecke stark vereinfachen. Zum einen betrachten wir V für eine Higgs-Masse $M \lesssim 100$ GeV, wodurch die Skalar-Loops vernachlässigbar werden.

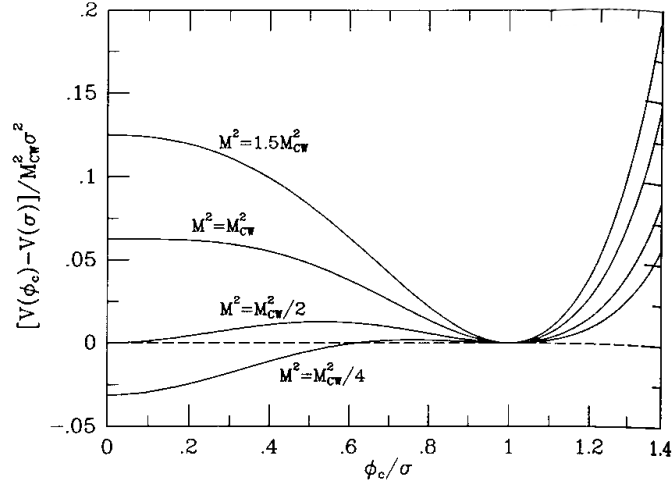


Abbildung 2: Das effektive Einschleifen-Potential bei $T = 0$ für verschiedene Verhältnisse von Higgsmasse und Coleman-Weinberg-Masse

Dann können wir die Einflüsse der Bosonen und Fermionen in einem Faktor B zusammenfassen und erhalten so

$$V(\phi_c) = -\frac{1}{2}(2B + \lambda)\sigma^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4 + B\phi_c^4 \ln\left(\frac{\phi_c^2}{\sigma^2}\right) \quad (1)$$

mit

$$B = 1,75 \cdot 10^{-4} - 5,19 \cdot 10^{-4} (M_t/100 \text{ GeV})^4.$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass die Renormalisierungskonstante μ in ihrer Größenordnung dem Problem angepasst und gleich σ gesetzt werden kann. $m^2 = (\lambda + 2B)$ konnte gesetzt werden, da wir wissen das V in $\pm\sigma$ ein Minimum besitzt, also $V'(\sigma) = 0$ und $V''(\sigma) > 0$ gilt. Das zum reduzierten Potential 1 gehörige Quadrat der Higgs-Masse M lässt sich aus der Krümmung von $V(\phi)$ bestimmen zu

$$M^2 = V''(\sigma) = (2\lambda + 6B)\sigma^2.$$

Abbildung 2 zeigt das effektive Einschleifen-Potential bei $T = 0$ für verschiedene Higgs-Massen, wobei als Vergleichsgröße die sog. Coleman-Weinberg-Masse M_{CW} herangezogen wird. Diese geht aus 1 für $m = 0$ hervor und beträgt

$$M_{CW} = \sqrt{8B}\sigma,$$

ist also von B und damit von der Masse des Top-Quarks abhängig. Um den Ablauf des Phasenüberganges zu beschreiben, betrachten wir nun das Potential bei einer endlichen Temperatur T . Wie im einfachen Beispiel in Abschnitt 2.2 betrachten wir auch hier wieder die Dichte der freien Energie. Zusätzlich zum effektiven Einschleifen-Potential bei $T = 0$ erhalten wir Korrekturen in Form der Funktionale

$$F_{\pm}[X(\phi_c)] = \pm \int_0^{\infty} dx x^2 \ln \left[1 \mp \exp \left[-\sqrt{x^2 + X(\phi_c)}/T \right] \right],$$

wobei F_+ für Bosonen- und F_- für Fermionen-Schleifen eingesetzt wird. Insgesamt erhält man so das effektive Potential

$$V_T(\phi_c) = V(\phi_c) + \frac{T^4}{2\pi^2} \{ 6F_+[g^2\phi_c^2/4] + 3F_+[(g^2 + g'^2)\phi_c^2/4] + F_+[M^2(\phi_c)] + 12F_-[h_t^2\phi_c^2/2] \}.$$

Da der Phasenübergang, wie weiter oben erwähnt, von der Higgs-Masse M abhängig ist, betrachten wir diesen nun für M verschiedener Größenordnungen. Im Bereich $1 \text{ TeV} \gtrsim M \gtrsim 100 \text{ GeV}$ wird

das Potential $V_T(\phi)c$ von Skalar-Loops dominiert. Der Phasenübergang ist in diesem Fall von zweiter Ordnung und verläuft genauso wie im einfachen Beispiel aus 2. Die kritische Temperatur beträgt $T_C \simeq 500$ GeV. Im Bereich $100 \text{ GeV} \gtrsim M > M_{CW}$ ist der Phasenübergang schwach von erster Ordnung. Allerdings ist die Tunnelrate so gering, dass nur $T_2 < T_C$, also die Temperatur, bei der die Potentialbarriere gänzlich verschwindet, von Interesse ist. Diese beträgt

$$\Rightarrow T_2^2 = \frac{8M^2}{1,32 + 2,65 (M_t/100 \text{ GeV})^2}.$$

Bei noch geringerer Higgs-Masse, im Bereich $M_{CW} \geq M \geq M_{CW}/\sqrt{2}$ ist der Übergang stark von erster Ordnung, d.h. die Potentialbarriere verschwindet nie. Der Übergang muss also in jedem Fall durch Tunneln stattfinden. Liegt die Higgs-Masse unterhalb von $M \leq M_{CW}/\sqrt{2}$, so wird der triviale Grundzustand bei allen Temperaturen stabil sein. Das Universum wird in diesem Fall für alle Zeiten im symmetrischen Zustand bleiben, so dass die elektroschwache Symmetrie niemals gebrochen wird. Das steht offensichtlich in starkem Widerspruch zur Realität.

Insgesamt lässt sich die Higgs-Masse aus diesen Überlegungen durch

$$M \gtrsim 1,1 M_{CW}$$

nach unten hin abschätzen.

Die inzwischen experimentell ermittelte Top-Quark Masse von ca. 170 GeV entspricht einer imaginären Coleman-Weinberg-Masse. Da allerdings nur das Quadrat M_{CW}^2 von Interesse ist, bedeutet dies lediglich, dass das Quadrat der Higgs-Masse in jedem Falle größer als M_{CW}^2 und damit der Phasenübergang von zweiter Ordnung sein wird.

4 Spuren spontaner Symmetriebrechung in der Vakuumstruktur

Alle vorangegangenen Überlegungen waren rein theoretischer Natur. Es stellt sich nun die Frage, ob sich die theoretisch vorhergesagten Phasenübergänge mit tatsächlichen Messdaten in Übereinstimmung bringen lassen. Welche Spuren werden eventuell stattgefundenen Phasenübergänge mit SSB im Universum hinterlassen haben? Eine mögliche Antwort hierauf ist, dass die Übergänge möglicherweise nicht perfekt verlaufen sind, so dass Rückstände falschen Vakuums in Form so genannter topologischer Defekte im Universum zurück geblieben sind. Im folgenden werden wir auf drei mögliche topologische Defekte genauer eingehen, und zwar auf Domain Walls, kosmische Strings und magnetische Monopole. Es sei allerdings angemerkt, dass es eine Vielzahl weiterer denkbarer topologischer Defekte gibt.

4.1 Domain Walls

Wir gehen wieder von einer diskreten Symmetriebrechung wie in Abschnitt 2.1 aus, so dass es zwei mögliche VEW, nämlich $+\sigma$ und $-\sigma$ gibt. Stellt man sich den Raum nun in zwei Bereiche unterteilt vor, wobei in einem der Bereiche der VEW $\langle\phi\rangle = -\sigma$ und im anderen Bereich $\langle\phi\rangle = +\sigma$ vorliegt, so folgt aus der Stetigkeit von ϕ , dass irgendwo zwischen beiden Bereichen ein falsches Vakuum mit $\langle\phi\rangle = 0$ vorliegen muss. Eben diesen Raumbereich falschen Vakuums bezeichnet man als *Domain Wall*. Diese Objekte haben erstaunliche gravitative Eigenschaften. So findet man durch Lösen der Poisson-Gleichung, dass eine unendlich ausgedehnte Domain-Wall abstoßend auf massebehaftete Teilchen wirkt. Eine sphärische, also endliche Domain-Wall wirkt hingegen aus Entfernung wie ein Partikel der Masse $m \sim 4\pi R^2 \eta$. Domain Walls entstehen nicht einzeln sondern in einem Netzwerk. Das liegt daran, dass die Wahl eines VEW während des Übergangs eine endliche Korrelationslänge ξ besitzt. Die VEW zweier Punkte mit Abstand $D \gtrsim \xi$ sind demnach nicht korreliert und liegen mit 50% Wahrscheinlichkeit in verschiedenen Vakua. Diese Bereiche verschiedener VEW sind jeweils durch Domain Walls getrennt. In dem entstehenden Netzwerk sind

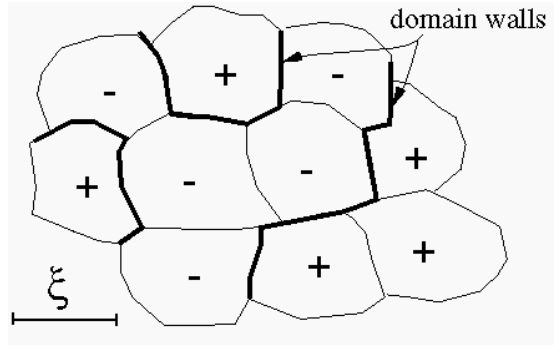


Abbildung 3: Zwischen unkorrelierten Bereichen mit verschiedenen VEW (+,-) entsteht ein Netzwerk von Domain Walls

sowohl endliche als auch unendliche Domain Walls vorhanden. Eine Domain Wall der Größe H_0^{-1} hat eine Masse der Größenordnung $M_W \sim \eta H_0^{-2}$, was einem Faktor $10^{10} \sqrt{\lambda} (\sigma/100 \text{ GeV})^3$ mal der Gesamtmasse im heutigen Hubble-Volumen entspricht. Das und die Tatsache, dass Domain Walls zu Fluktuationen im CMBR von der Größenordnung $\delta T/T \simeq G\eta H_0^{-1} \simeq 10^{10} \sqrt{\lambda} (\sigma/100 \text{ GeV})^3$ führen, lässt schließen, dass entweder das σ ausgesprochen klein ist, oder dass die Existenz von Domain Walls mit unseren tatsächlichen Beobachtungen nicht verträglich ist.

4.2 Kosmische Strings

Um zu erklären was kosmische Strings sind, betrachten wir das abelsche Higgs-Modell. Dabei handelt es sich um eine spontan gebrochene $U(1)$ -Eichsymmetrie. Die Phase des VEW ist unbestimmt, da das Potential $V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \sigma^2)^2$ mit $\langle |\Phi| \rangle = \frac{\langle \phi \rangle}{\sqrt{2}}$ nur von $|\Phi|$ abhängt. Wir nehmen einen positionsabhängigen Phasenfaktor $\exp[i\theta(\vec{x})]$ an. Da Φ an jeder Stelle einen eindeutig bestimmten Wert haben muss, muss auf jedem geschlossenen Pfad $\Delta\theta = n \cdot 2\pi$ gelten. Kontrahieren wir einen solchen gedachten Pfad mit $\Delta\theta = 2\pi$ auf einen Punkt, so kann der Übergang $\Delta\theta = 2\pi \rightarrow \Delta\theta = 0$ nicht stetig verlaufen. In einem Punkt auf dem Pfad ist θ deshalb nicht definiert und dort liegt ein falsches Vakuum mit $u(\Phi) = 0$ vor. Dieser Punkt ist Teil einer Röhrenstruktur falschen Vakuums, die aufgrund ihrer Form als *kosmischer String* bezeichnet wird. Ein solcher String muss entweder geschlossen oder unendlich sein. Andernfalls wäre es möglich, den gedachten Pfad so zu kontrahieren, dass man den Bereich falschen Vakuums umgeht. Das Gravitationsfeld eines unendlichen Strings ist, wie der Physiker Vilenkins berechnete, eine konische Singularität. Das führt zu dreierlei Effekten: Unendliche Strings wirken als Gravitationslinsen, führen zu Fluktuationen im CMBR und ziehen String-Wellen hinter sich her. Letztere sind besonders interessant, da sie eine mögliche Erklärung für die Strukturbildung im Universum liefern. Bewegt sich ein unendlicher String durch den Raum und passiert massebehaftete Teilchen, so werden diese aufgrund der konischen Raumstruktur um den String beschleunigt und in einer durch die Bewegungsrichtung des Strings bestimmten Ebene verdichtet. Diese Verdichtungen wirken möglicherweise als Keimzellen der Strukturbildung.

4.3 Magnetische Monopole

Um die Entstehung magnetischer Monopole zu erklären, geht man von einer $SO(3)$ -Eichtheorie aus, die von einem Higgs-Triplett Φ^a zu einer $U(1)$ -Symmetrie spontan gebrochen wird. Man hat es dabei wieder mit einem Potential zu tun, dessen VEW lediglich betragsmäßig festgelegt ist. Ein mögliche Lösung, die in diesem Modell auftreten kann ist die so genannte "Hedgehog"-

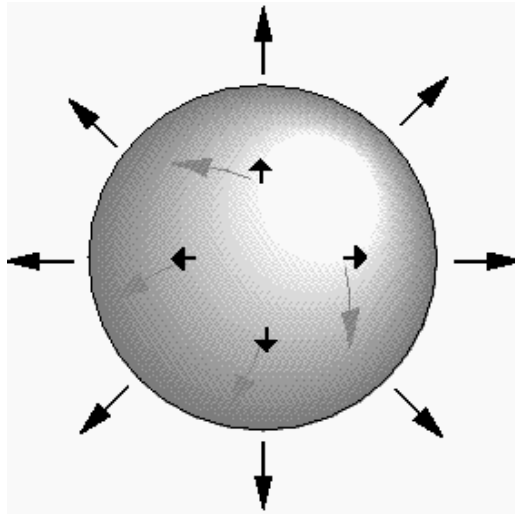


Abbildung 4: Die Feldlinien der sogenannten Hedgehog-Lösung sind radial nach außen gerichtet.

Konfiguration

$$\begin{aligned}\Phi^a(r, t) &\rightarrow \sigma \hat{r} \\ A_\mu^a(r, t) &\rightarrow \epsilon_{abc} \hat{r}_b / er.\end{aligned}$$

Für $r \rightarrow 0$ muss Φ verschwinden, so dass in einem Bereich der Größenordnung σ^{-1} ein VEW ungleich σ , also ein falsches Vakuum vorliegt. Betrachtet man das magnetische Feld der Hedgehog-Lösung, so stellt man fest, dass es das Feld eines Monopols ist. Die Feldlinien zeigen wie Stacheln aus dem Zentrum heraus und begründen den Namen "Hedgehog" (Igel).

Die Existenz magnetischer Monopole hat kosmologische gesehen weitreichende Konsequenzen. Große Vereinigungs-Theorien sagen magnetische Monopole zwingend voraus. Allerdings liegt die theoretisch berechnete heutige Monopol-Massendichte bei $10^{11} \cdot \rho_0$ und ist offensichtlich nicht mit tatsächlichen Beobachtungen verträglich. Das bedeutet, dass GUTs und das Standardmodell zurück extrapoliert bis 10^{-34} s, dem vermuteten Zeitpunkt der GU, nicht kompatibel sind. Zu guter letzt sei noch erwähnt, dass magnetische Monopole ein zwar unwahrscheinlicher, aber immerhin möglicher Kandidat für die Dunkle Materie im Universum sind.