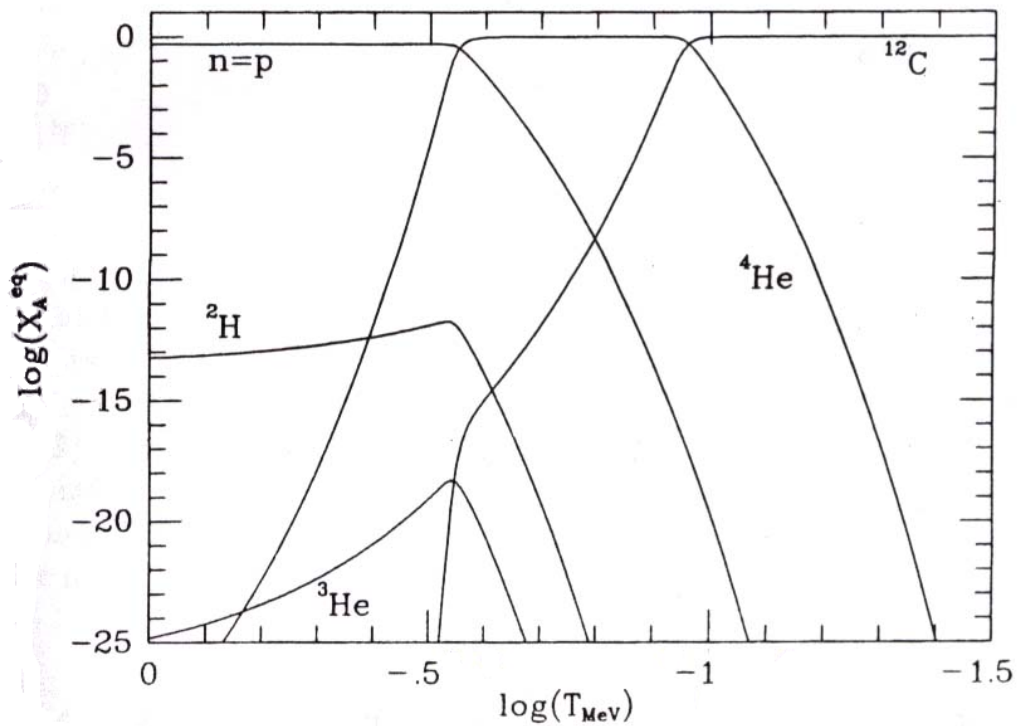


# Seminar Teilchen und Felder SS05

## Primordiale Nukleosynthese

Katharina Havermann\*



Münster, den 19. Juli 2005

\*k.havermann@uni-muenster.de

Die Nukleosynthese befasst sich mit dem Moment der Entstehung erster Elementatomkerne. Die stattfindenden Prozesse werden durch Element- bzw. Nukleonendichten im thermodynamischen und chemischen Gleichgewicht beschrieben. Für die Herleitung der in der Nukleosynthese verwendeten Teilchendichten wird das Modell der Quantengase herangezogen.

### Herleitung der Kerndichten

Für Teilchendichten gilt im Modell der Quantengase

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \langle n_p \rangle d^3p \text{ mit } \langle n_p \rangle = \left( e^{-\frac{1}{k_B T}(\epsilon_k - \mu)} \pm 1 \right)^{-1} \dagger$$

Photonen und Baryonen können als verschiedene Grenzfälle dargestellt werden. Der nichtrelativistische Grenzfall ( $E \propto m \gg T$ ) der Teilchendichte für Baryonen führt zur Vernachlässigung der Eins gegenüber der Exponentialfunktion. Variablentransformationen  $p = \sqrt{E^2 - m^2}$  und  $x = \frac{E}{m}$  und anschließende partielle Integration ergeben ein Integral einer Hankelfunktion  $K_2(z)$ . Dieses besitzt eine Asymptotik der Form  $K_2(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$ , die dann für die Dichte des Teilchens  $A$  auf

$$n_A = g \left( \frac{m_A T}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left( \frac{\mu - m}{T} \right)$$

führt. Photonen können als Bosegas mit  $m = 0$  und unbeschränkter Teilchenzahländerung betrachtet werden. Mithilfe des Dispersionsgesetz:  $\epsilon(|p|) = c|p| = \hbar c|k|$  und unter Betrachtung der in Abständen von  $\Delta k_{x,y,z} = \frac{2\pi}{L}$  im Impulsraum liegenden Zustände kann die mittlere Teilchendichte  $n = \frac{1}{V} \sum_k \langle n_k \rangle$  unter Berücksichtigung der Spinnmultiplizität in das Integral

$$n = \frac{1}{\pi^2 (\hbar c)^3} (k_B T)^3 \int_0^\infty dx \frac{x^2}{e^x - 1}$$

mit  $x = \frac{\epsilon}{k_B T}$  überführt werden. Der auftretende Integrand kann in eine Summe aus Integralen umgewandelt werden, die dann eine Darstellung der  $\zeta$ -Funktion ergeben. Man erhält somit für die gesuchte Photonendichte

$$n = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)$$

Zur Betrachtung von Kerndichten aus mehreren Nukleonen sind nun verschiedene Annahmen zu machen. Da die nuklearen Reaktionen im Vergleich zur Reaktionsrate schnell sind, gilt chemisches Gleichgewicht. Für das chemische Potential eines Kerns  $A$  mit der Massenzahl  $A$  und der Kernladungszahl  $Z$  ist also  $\mu_A = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n$  gegeben, ferner wird die Definition der Bindungsenergie  $B_A \equiv Zm_p + (A - Z)m_n - m_A \ddagger$  verwendet. Die Teilchendichte nimmt wegen des expandierenden Universums mit  $R^{-3}$  ab, weshalb die Einführung einer relativen Nukleonendichte sinnvoll ist. Dazu definieren wir die Nukleonendichte  $n_N = n_n + n_p + \sum_i (An_A)_i$ . Der Massenanteil eines bestimmten

Kerns  $A(Z)$  ist gegeben durch  $X_A \equiv \frac{n_A A}{n_N}$ . Weiterhin sei das Baryon-Photon-Verhältnis definiert als  $\eta = \frac{n_N}{n_\gamma}$ . Für die Photonendichte gilt  $n_\gamma = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} 2T^3$ . Einsetzen ergibt die Rekursionsformel

$$X_A = g_A [\zeta(3)^{(A-1)} \pi^{-\frac{1}{2}(A-1)} 2^{\frac{1}{2}(3A-5)}] A^{\frac{5}{2}} \left( \frac{T}{m_N} \right)^{\frac{1}{2}(A-1)} \eta^{(A-1)} X_p^Z X_n^{(A-Z)} \exp \left( \frac{B_A}{T} \right),$$

<sup>†</sup>g Faktor für Mehrfachbesetzungen eines Zustandes, z.B. durch Spin;  $\mu$  chemisches Potential;  $k_B$  Boltzmannkonstante;  $\epsilon_k$  Energie des  $k$ -ten Zustandes

<sup>‡</sup> $m_n, m_p$  Massen von Neutron und Proton

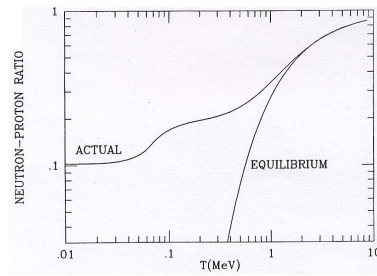


Abbildung 1: Gleichgewichts- und Ausfrierverhalten des Proton-Neutron-Verhältnisses

die neben  $n_n$  und  $n_p$  Abhängigkeiten von der Entropie  $\eta$  und dem Temperaturverlauf  $T$  enthält.

### Ausfrieren von Protonen und Neutronen als beeinflussender Parallelprozess

Mit dieser Formel kann nun der Verlauf der Nukleosynthese berechnet werden. Dabei sind mehrere, parallel zur Nukleosynthese ablaufende Vorgänge zu beachten. Sie wird zum einen durch das Ausfrieren des Neutron-Proton-Verhältnisses als auch durch die Entkoppelung der Neutrinos bei ca. 1 MeV und die Annihilation von Elektronen und Positronen bei ungefähr 0,3 MeV beeinflusst. Während der Einfluss der Leptonen auf die Reaktionsrate erst im Kapitel "Diskussion der theoretischen Ergebnisse" betrachtet werden soll, ist der Mechanismus des Ausfrierens der Baryonen als Reaktanden ein so beeinflussender Faktor, dass er hier einleitend behandelt wird. Bei Einsetzen der Nukleosynthese liegt ein strahlungsdominiertes Universum vor, Protonen und Neutronen befinden sich in chemischem Gleichgewicht  $\mu_n + \mu_\nu = \mu_p + \mu_e$  und über schwache Wechselwirkung auch im thermodynamischen Gleichgewicht. Einsetzen ergibt für das Verhältnis von Protonen und Neutronen direkt

$$\frac{n}{p} = \frac{n_n}{n_p} = \exp\left[-\frac{Q}{T} + \frac{(\mu_e - \mu_\nu)}{T}\right]$$

Hierfür läßt sich eine geeignete Näherung machen: Die Entropie  $\eta$  bezeichnet das Verhältnis von Baryonen und Photonen und deshalb gilt auch  $\eta \propto \frac{n_p}{n_\gamma}$ . Wegen der Ladungsneutralität gilt demnach auch  $\frac{n_p}{n_\gamma} = \frac{n_e}{n_\gamma}$ . Da nun  $\eta$  mutmaßlich bei  $10^{-10}$  liegt, ist davon auszugehen, dass auch das chemische Potential des Elektrons im Vergleich zur Temperatur klein ist, da sonst mehr Elektronen produziert worden wären. Demnach ist im Exponenten der Term  $\frac{\mu_e}{T}$  und mit gleicher Argumentation auch der Term  $\frac{\mu_\nu}{T}$  gegenüber  $Q = m_n - m_p = 1,293 \text{ MeV}$  zu vernachlässigen. Man kann somit annehmen, dass gilt

$$\frac{n}{p} = \frac{n_n}{n_p} = \exp\left[-\frac{Q}{T}\right]$$

Das so in guter Näherung beschriebene Gleichgewichtsverhalten weicht ab einem bestimmten Zeitpunkt jedoch stark von den tatsächlichen Verhältnissen ab (Abbildung (1)). Dieses Verhalten kommt dadurch zustande, dass beim Anstieg der Expansionsrate  $H$  über die Reaktionsrate  $\Gamma$  das sogenannte "Ausfrieren" des Proton-Neutron-Verhältnisses stattfindet. Als Näherung für die Reaktionsrate der schwachen Wechselwirkung erhält man aus der Fermitheorie der Strom-Strom-Wechselwirkung für die gegebenen Bedingungen  $T \gg Q, m_e$

$$\Gamma(pe \leftarrow \nu n) \approx G_F^5 T^5. \S$$

Nimmt man für die Expansionsrate  $H \approx 1,66 g_*^{\frac{1}{2}} \frac{T^2}{m_{Pl}}$  an, ergibt sich für das Verhältnis von

<sup>\S</sup> $G_F$  Fermikonstante

Expansions- und Reaktionsrate

$$\frac{\Gamma}{H} \approx \left( \frac{T}{0,8 \text{ MeV}} \right)^3$$

Bei einer Temperatur von weniger als 0,8 MeV ist also kein thermodynamisches Gleichgewicht gegeben.

### Vorüberlegungen und Abschätzungen zu erwarteten Kernbildungen

Die Kernbindungsenergien leichter Kerne liegen bei ungefähr 1 bis 8 MeV, weshalb signifikante Kernbildungen in diesem Bereich möglich erscheinen. Zu berücksichtigen ist jedoch noch die hohe Entropie. Hochenergetische Photonen sind in der Lage, durch Zerstörung entstehender Kerne signifikante Mengen zu verhindern. Allgemein gilt nach hergeleiteter Formel für eine beliebige Elementmenge  $X_A$

$$X_A \propto \left( \frac{T}{m_N} \right)^{\frac{1}{2}(A-1)} \eta^{(A-1)} X_p^Z X_n^{(A-Z)} \exp\left(\frac{B_A}{T}\right). \text{¶}$$

Zur Abschätzung nehme man  $X_A \propto X_n \propto X_p \propto 1$  an. Auflösen nach einer "Relevanztemperatur"  $T_{nuc}$  ergibt

$$T_{nuc} = \frac{\frac{B}{(1-A)}}{1,5 \ln \frac{m_N}{T} + \ln \mu^{-1}}$$

Man erhält beispielsweise für Deuterium 0,07 MeV,  ${}^3\text{He}$  0,11 MeV, für Heliumkerne 0,28 MeV und für Kohlenstoff  ${}^{12}\text{C}$  0,25 MeV.

### Elementbildung im Modell der Nukleosynthese

Zu Beginn der Nukleosynthese, deren Anfang ungefähr bei  $10^{-2} \text{ sec}$  angesetzt werden kann, ist kaum signifikante Elementbildung vorhanden. Die Temperatur liegt bei ungefähr 10 MeV. Es besteht noch Gleichgewicht von Protonen und Neutronen, so dass ihre Anteile  $X_n$  und  $X_p$  ungefähr bei  $\frac{1}{2}$  liegen. Die Anteile der leichtesten, und damit zuerst entstehenden, Elemente sind um mehr als 10 Größenordnungen kleiner. So erhält man für Deuterium  $6 \cdot 10^{-12}$ , für  ${}^3\text{He}$   $2 \cdot 10^{-23}$  und für Heliumkerne sogar nur  $2 \cdot 10^{-34}$ . Dies entspricht der Voraussage der obengemachten Näherung, die ja erst bei weniger als einem Zehntel der Temperatur Elementbildung vorhersagt. Während des Abkühlens ändert sich bis zu einer Temperatur von 1 MeV zunächst nur das Protonen- und Neutronenverhältnis auf ein Verhältnis von 6:1. Dies ist der obenbeschriebene Zeitpunkt des Ausfrierens, dem nur noch geringfügige Änderung auf 7:1 durch Neutronenzerfall folgt. Die hohe Entropie verhindert eine Kernbildung bis zu einer Temperatur von ca. 0,3 MeV, bei der nach obengemachter Näherung erste Elemente entstehen könnten. An dieser Stelle kommt der sogenannte Deuterium-Flaschenhals zum Tragen. Betrachtet man die erst möglichen Reaktionen  $p(n, \gamma)D$ ;  $D(D, n){}^3\text{He}$ ;  $D(p, \gamma){}^3\text{He}$ ;  $D(n, \gamma){}^3\text{H}$ , so wird deutlich, weshalb erst bei Temperaturen von ungefähr 0,07 MeV entsprechend  $T_{nuc}$  Elementbildung stattfindet. Die Weiterreaktionen zu Heliumkernen über  ${}^3\text{He}(D, p){}^4\text{He}$ ;  ${}^3\text{H}(D, n){}^4\text{He}$ ;  $D(D, \gamma){}^4\text{He}$  läuft erst mit Verzögerung ab, da die Reaktanden mit Dichten von weniger als  $10^{-2}$  vorhanden sind. Sobald die Dichten groß genug sind, werden alle Neutronen in energetisch günstiges Helium gebunden. Daraus resultiert eine Heliummenge von

$$X_4 \approx \frac{4n_4}{n_N} = \frac{4 \frac{n_n}{2}}{(n_n + n_p)} = \frac{2 \left(\frac{n}{p}\right)_{nuc}}{1 + \left(\frac{n}{p}\right)_{nuc}}$$

---

¶  $m_N$  Masse eines Nukleons

Die Entstehung schwerer Elemente ist stark unterdrückt. Faktoren sind hierbei fehlende stabile Kerne der Massen 5 und 8 und die bei größeren Kernen stärker werdende Coulombbarriere. Die Reaktionsrate wird von ihr in der Form  $\Gamma \propto \exp \left[ -2 \left( \bar{A} (Z_1 Z_2)^2 \right)^{\frac{1}{3}} T^{-\frac{1}{3}} \right]$  beeinflusst. Geringe Kerndichten verhindern zudem 3  $\alpha$ -Reaktionen, die in Sternen die Produktion schwerer Elemente ermöglichen. Dies hat zur Folge, dass die Anteile  $\frac{D, {}^3\text{He}}{H}$  bei  $10^{-5} - 10^{-4}$  ausfrieren, da ihre Dichten dann zu gering sind zur "Weiterverbrennung" und somit den Prozess der Nukleosynthese bei  $t \approx 3 \text{ min}$  beenden.

### Diskussion der theoretischen Ergebnisse

Die Aussagekraft der von den Algorithmen erzielten Ergebnisse ist vornehmlich von den gegebenen physikalischen Parametern abhängig. Der numerische Fehler der verwendeten Fortranprogramme liegt mittlerweile bei weniger als 1%. Die verwendeten Wirkungsquerschnitte sind ebenfalls hinreichend bekannt, so dass der Zeitpunkt des Ausfrierens den wesentlichsten Effekt auf die Elementmengen hat. Somit sind die Halbwertszeit des Neutrons und durch die Expansionsrate die Anzahl der relativistischen Teilchen relevant. Ferner ist die Entropie  $\eta$  zu berücksichtigen. Für die Halbwertszeit des Neutrons ist die Abhängigkeit  $\Gamma \propto \frac{T^5}{\tau_n^{\frac{1}{2}}(n)}$  gegeben. Aus  $\left(\frac{\Gamma}{H}\right) = \left(\frac{T}{T_F}\right)$  kann man direkt  $T_F \propto \tau_n^{\frac{1}{3}}$  ersehen. Eine längere Lebensdauer des Neutrons verursacht somit eine höhere Ausfrieretemperatur. Da zu diesem Zeitpunkt das Neutron-Proton-Gleichgewicht noch günstiger für die Neutronen war, ist daraus eine höhere Heliummenge zu folgern. Auch die relativistischen Freiheitsgrade gehen über die Expansionsrate in die Berechnungen ein. Aufgrund der Abhängigkeit der Expansionsrate  $H$  von den relativistischen Freiheitsgraden  $g_*$  der Form  $H \propto g_*^{\frac{1}{2}} \frac{T^2}{m_p t}$  folgt, dass mehr relativistische Teilchen die Expansionsrate erhöhen und mit obengenannter Argumentation mehr Helium erzeugen. Die bekannten Leptonen sind in den Berechnungen enthalten. Interessant sind Betrachtungen weiterer unbekannter Teilchen. Es ist berechenbar, dass ein weiteres leichtes Teilchen die Heliummenge kaum beeinflussen würde. Die Entropie  $\eta$  ist abhängig von der Zahl der relativistischen Teilchen, kann nach  $e^+e^-$ -Annihilation aber als konstant angesehen werden. Da für den Anteil eines beliebigen Teilchens gilt  $X_A \propto \eta^{(A-1)}$ , ergäbe ein größerer Wert für  $\eta$  eine frühere Elementerzeugung und damit wiederum mehr  ${}^4\text{He}$ . Für die Reaktanden  $D, {}^3\text{He}$  liegt Antiproportionalität zu  $\eta$  vor, da die Reaktionsrate, dieser Elemente zu  ${}^4\text{He}$  proportional zu  $\eta$  ist. Besonders aufschlussreich ist die  $\eta$ -Abhängigkeit von Lithium-Produktion. Bei  $\eta \approx 3 \cdot 10^{-10}$  liegt eine Senke der Elementmenge vor, verantwortlich sind zwei verschiedene Produktionsprozesse, die zur Überproduktion führen. Für  $\eta \leq 3 \cdot 10^{-4}$  dominiert  ${}^4\text{He}({}^3\text{H}, \gamma){}^7\text{Li}$ , für größere Werte ist  ${}^4\text{He}({}^3\text{He}, \gamma){}^7\text{B}, e^-){}^7\text{Li}$  dominant (Abbildung (2)).

Die experimentelle Überprüfung gestaltet sich oft schwierig, da anstelle der primordialen kosmischen Mengen nur lokale Messungen heutiger Mengen möglich sind. Man verwendet neben spektroskopischer Methoden Staub von Meteoriten und auch Helligkeitsmessungen von Sternen, deren Lichtstärke vom chemischen Potential abhängig sind. Für Deuterium sind Werte im Bereich von  $(1 - 4) \cdot 10^{-5}$  mit guter Genauigkeit gemessen worden, die wegen der leicht stattfindenden Reaktion gemäß  $D(p, \gamma){}^3\text{He}$  zu  ${}^3\text{He}$  als Untergrenze zu betrachten sind. Da dieser Zerstörungsmechanismus der einzig relevante ist, bietet sich eine Betrachtung der Summe Deuterium und  ${}^3\text{He}$  an. Um zusätzliche Erzeugungseffekte zu berücksichtigen, führt man einen Faktor  $f_a$ . Man erhält somit  $\left[\frac{(D+{}^3\text{He})}{H}\right]_p \leq (1 - f_a) \left(\frac{D}{H}\right)_{pre-\odot} + f_a \left[\frac{(d+{}^3\text{He})}{H}\right]_{pre-\odot}$ , woraus dann  $\left[\frac{(d+{}^3\text{He})}{H}\right]_p \leq 8 \cdot 10^{-5}$  folgt. Für die Summe ergibt sich  $\eta < 4 \cdot 10^{-10}$

${}^7\text{Li}$  wird durch Spaltung, verursacht durch kosmische Strahlung, und in verschiedenen stellaren Pro-

---

<sup>||</sup>  $A$  reduzierte Masse,  $Z_i$  Ladungszahlen

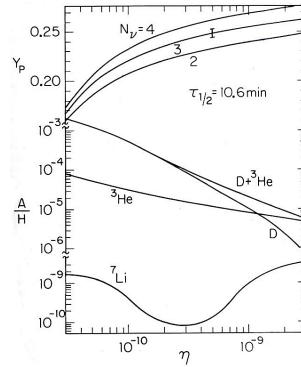


Abbildung 2: Das Elementmengenverhältnis in Abhängigkeit von der Entropie  $\eta$

zessen, z.B. Supernovae, erzeugt; es wird aber auch leicht wieder zerstört. Bei Betrachtung von metallarmen Pop-II-Sternen kann durch Korrelation von Sternenmasse und Lithiummenge Zerstörung des Lithiums ausgeschlossen werden. Man erhält einen genau in der Senke liegenden Wert von  $\eta = (1 - 7) \cdot 10^{-10}$ .

Helium wird in Sternen erzeugt, trotzdem können über Korrelation mit Metallen, die gleichzeitig erzeugt werden, relativ genaue Wert ermittelt werden. Der Vergleich der genannten Messungen eignet sich zum Konsistenztest. Lithium,  ${}^3\text{He}$  und Deuterium ergeben für  $\eta$  einen Wert von  $\eta \geq 4 \cdot 10^{-10}$ . Unter Annahme von  $\tau_{\frac{1}{2}}(n) \geq 10,3$  min und dreier Neutrinospezies folgt für den  ${}^4\text{He}$ -Anteil  $Y_p = 0,238$ , es besteht genaueste Übereinstimmung von Theorie und Experiment.

### Vergleich von Theorie und Beobachtung

Innerhalb der gegebenen Grenzen von  $2 \leq N_{nu} \leq 4$ ,  $10,3\text{min} \leq \tau_n \leq 10,7\text{min}$  und  $3 \cdot 10^{-10} \leq \eta \leq 7 \cdot 10^{-10}$  ist das Modell konsistent. Das Modell würde nicht mehr stimmige Ergebnisse liefern, wenn der  ${}^4\text{He}$ -Anteil sich als  $\leq 0,22$  herausstellen würde. Erklärbar wäre dies über PopIII-Sterne, erhöhte Anisotropie oder Neutrinoentartung, die obengemachte Näherung für den Ausfrierzeitpunkt ungünstig machen würde.

### Primordiale Nucleosynthese als Test für das Standardmodell

Unter der Annahme, dass das Standardmodell gültig ist, können mithilfe der Nucleosynthese die Bedingungen des frühen Universums erforscht werden. Legt man für  $\eta$  die Grenzen  $3 \cdot 10^{-10} \leq \eta \leq 7 \cdot 10^{-10}$  zugrunde, ergibt sich daraus  $0,015 \leq \Omega_B \leq 0,16$ . Aus Dynamik-Beobachtungen ist für die Baryondichte  $\Omega_0 = 0,2 \pm 0,1$  schließbar, davon sind nur ungefähr 10% leuchtend. Daraus folgt zum einen, dass nichtleuchtende Materie existieren muss, zum anderen folgt unter der Annahme  $\Omega_0 > 0,15 - 2$ , dass nichtbaryonische Materie für die Differenz zwischen  $\Omega_0$  und  $\Omega_B$  verantwortlich ist. Es existieren dazu verschiedenste Theorien, unter anderem massive Neutrinos oder verschiedene Lösungen der Feldgleichungen, die nicht beobachtet werden. Eine andere Quelle von Kandidaten ist die Theorie der Supersymmetrie, bei der zu jedem Boson auch ein Fermion existieren muss. Abschließend ist zu sagen, dass die Nucleosynthese bisher Voraussagen in einem Wertebereich von mehr als 10 Größenordnungen in guter Übereinstimmung mit Experiment macht und damit neben der Festlegung der Anzahl der Neutrinos fundamentale Schlussfolgerungen auf  $\Omega_B$  zulässt.