DAS WESS-ZUMINO-MODELL.

von

Alexander Trzeciak

(Ausarbeitung zum Seminarvortrag vom 23.07.2003)

Seminar über Kern- und Teilchentheorie

SS 2003: Symmetrie und Supersymmetrie

Leitung:

Prof. Dr. P. Boschan, Prof. Dr. G. Münster,

Prof. Dr. M. Stingl,

Dr. J. Heitger, R. Peetz

Institut für Theoretische Physik

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Für Nien Tze.

Was ist das Ziel dieses Vortrags?

Aus der herkömmlichen Feldtheorie ist bekannt, dass eines der obersten Ziele bei der Konstruktion eines neuen Modells bzw. einer neuen Theorie stets das Auffinden der zugehörigen Lagrangedichte darstellt, da diese alle Informationen über die Theorie enthält. Wir wollen hier supersymmetrische Feldtheorie betreiben. Dazu müssen wir eine supersymmetrische Lagrangedichte finden. Das ist eine Lagrangedichte, die so geartet ist, dass die zugehörige Wirkung invariant unter infinitesimalen SUSY-Transformationen ist: $\delta_\epsilon S = \int d^4x \delta_\epsilon \mathcal{L} = 0$ oder zumindest unter bestimmten Bedingungen $\delta_\epsilon S = \int d^4x \delta_\epsilon \mathcal{L} \longrightarrow 0$.

Das Wess-Zumino-Modell, das von Julius Wess und Bruno Zumino entdeckt wurde (1973), ist die einfachste supersymmetrische Feldtheorie.

Wir suchen eine Lagrangedichte, die sich unter infinitesimalen SUSY-Transformationen wie eine Viererdivergenz transformiert, so dass das Integral über die Raumzeit nach dem Gaußschen Integralsatz Oberflächenterme liefert. Diese Oberfläche kann dann so groß gewählt werden, dass sie sich weit draußen befindet, wo die Felder verschwinden:

$\delta_\epsilon S = \int d^4x \delta_\epsilon \mathcal{L} = \int d^4x \partial_\mu \Lambda^\mu = \text{Oberflächenintegral} \longrightarrow 0.$

Die supersymmetrische Lagrangedichte ist also "nur" invariant bis auf eine Viererdivergenz, doch das reicht für unsere Zwecke aus den oben geschilderten Gründen schon völlig aus.

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{WZ}$ des Wess-Zumino-Modells setzt sich aus drei Anteilen zusammen, nämlich dem kinetischen Term $\mathcal{L}_{kin}$, dem Massenterm $\mathcal{L}_m$ und dem Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_{int}$:

$\mathcal{L}_{WZ} = \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{int},$

wobei

$\mathcal{L}_{kin} = \Phi^\dagger(x,\theta,\bar\theta)\Phi(x,\theta,\bar\theta)|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta},$

$\mathcal{L}_m = -\frac{m}{2}\Phi^2(y,\theta)|_{\theta\theta\, y\to x} + HC$ und

$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{3}\Phi^3(y,\theta)|_{\theta\theta\, y\to x} + HC$ ist

mit einem sog. chiralen Superfeld Φ.

Weiter unten werde ich genauer erläutern, was ein Superfeld ist und was chirale, antichirale und Vektor-Superfelder sind.

An dieser Stelle sei bereits angemerkt: Der Begriff des Superfeldes stellt die Verallgemeinerung des Begriffes des Feldes auf den Superraum mit den neu hinzugefügten fermionischen Koordinaten dar.

Es ist $\Phi^\dagger$ ein antichirales Superfeld, $\Phi^\dagger \cdot \Phi$ ist dann als Produkt aus einem chiralen und einem antichiralen Superfeld ein Vektor-Superfeld und weil Produkte chiraler Superfelder wieder chirale Superfelder sind, sind auch Φ^2 und Φ^3 ebensolche.

Weiter ist m die Masse des Feldes und g die Kopplungskonstante.

Obiger Ansatz ist, was die Potenzen etc. angeht, von der herkömmlichen Feldtheorie her plausibel.

"HC" soll "hermitesch konjugiert" bedeuten, d.h. an der Stelle des "HC" steht der zuletzt aufgetauchte Term in hermitesch konjugierter Form. Dadurch ist gewährleistet, dass unsere Lagrangedichte insgesamt reell ist.

Da wir, wie bereits erläutert wurde, eine Lagrangedichte suchen, die sich unter infinitesimalen SUSY-Transformationen wie eine Viererdivergenz transformiert und da das bei Beschränkung auf die höchsten Komponenten von $\Phi^\dagger \cdot \Phi$, Φ^2 und Φ^3 der Fall ist, brauchen die jeweils anderen Komponenten nicht verwendet zu werden. Das soll mit der Schreibweise mit dem senkrechten Strich, also mit $|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$ bzw. $|_{\theta\theta,y\to x}$, verdeutlicht werden. Gehört ein Feld zur $(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})$-Komponente, so ist es vom D-Typ. Gehört es zur $(\theta\theta)$-Komponente, so ist es vom F-Typ.

Dabei wiederum bedeutet das "$y \to x$", dass wir einen Koordinatenwechsel von der komplexen Koordinate y zur reellen Koordinate x vollziehen. Wie man z.B. aus der Funktionentheorie weiß, ist im Komplexen vieles einfacher bzw. angenehmer als im Reellen. Auch im komplexen Superraum können wir oft leichter rechnen als im reellen Superraum. Wir müssen jedoch letztendlich wieder zu reellen Koordinaten übergehen.

Erinnerung an den Superraum und an das chirale Supermultiplett

Ich möchte erstens an den Vortrag von Fabian Kopei vom 18.06.03 erinnern: Es wurden die Grassmannzahlen vorgestellt und das Konzept des Superraums erläutert. Um zu neuen Erkenntnissen zu gelangen, fügen Physiker gelegentlich neue Dimensionen zu den zuvor betrachteten hinzu (vgl. z.B. Kaluza-Klein-Theorie oder Stringtheorie). Zu den vier bosonischen Koordinaten x^0,..., x^3, wie sie aus dem Minkowskiraum bekannt sind, wurden in unserem Fall der SUSY vier weitere hinzugefügt. Dies sind die fermionischen Koordinaten θ^1,..., θ^4. Man hat also schließlich die Koordinaten $(\underbrace{x^0, x^1, x^2, x^3}_{bosonisch}, \underbrace{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4}_{fermionisch}) \in \mathbb{R}^{4|4}$. Aus den fermionischen bildet man weiter zwei Paare und aus jedem Paar einen Weyl-Spinor. Diese beiden Weyl-Spinoren wollen wir θ und $\bar{\theta}$ nennen.

Zweitens möchte ich den Vortrag von Patrick Fritzsch vom 09.07.03 in Erinnerung rufen. Patrick Fritzsch stellte das chirale Supermultiplett vor. Wir werden im weiteren Verlauf dieses Vortrages sehen, dass dieses im Wess-Zumino-Modell realisiert ist.

Drittens möchte ich darauf hinweisen, dass leider aus terminlichen Gründen der Vortrag über Superfelder sowie der Vortrag über supersymmetrische Lagrangedichten ausfallen mussten. Dies stellt mich vor das didaktische (und Zeit-) Problem, eine supersymmetrische Feldtheorie, welche trivialerweise mit Superfelder zu tun hat, zu präsentieren und eine supersymmetrische Lagrangedichte zu konstruieren, ohne dass diese schon ausführlich abgehandelt worden wären. Daher möchte ich mir erlauben, die für diesen Vortrag relevanten Superfelder, und nur diese und nur in dem Maße, wie wir sie hier brauchen werden, einzuführen. Dies sind im Prinzip die chiralen Superfelder. Aus den o.g. Gründen brauchen wir von diesen wiederum glücklicherweise nur die höchsten Komponenten. Die an einem eingehenderen Studium der Superfelder interessierten ZuhörerInnen/LeserInnen verweise ich auf das ausgezeichnete Buch "Supersymmetrie" von Kalka und Soff.

Was sind Superfelder?

Mathematisch gesehen ist ein Superfeld eine von den Koordinaten des Superraumes abhängende analytische Funktion.

Es gibt skalare und Vektor-Superfelder. Zu den skalaren gehören die chiralen und die antichiralen.

Die Taylorentwicklung eines allgemeinen Superfeldes $\mathcal{F}(x,\theta,\bar{\theta})$ bricht auf Grund der Eigenschaft der Grassmannzahlen, dass ihre Quadrate Null sind, schnell ab:

$$\mathcal{F}(x,\theta,\bar{\theta}) = f(x)+\theta\varphi(x)+\bar{\theta}\bar{\chi}(x)+(\theta\theta)M(x)+(\bar{\theta}\bar{\theta})N(x)+\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}A_{\mu}(x)+(\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x)+(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\alpha(x)+(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})d(x).$$

Aus der Forderung, dass $\mathcal{F}$ ein Lorentzskalar sein soll, ergeben sich die Eigenschaften der sog. Komponentenfelder f, φ, $\bar{\chi}$, M, N, A_{μ}, $\bar{\lambda}$, α und d:

Wir haben:

1) vier komplexe skalare Felder: f(x), M(x), N(x), d(x),

2) zwei linkshändige Weyl-Spinorfelder: φ(x), α(x),

3) zwei rechtshändige Weyl-Spinorfelder: $\bar{\chi}$(x), $\bar{\lambda}$(x) sowie

4) ein komplexes Vektorfeld: A_{μ}(x).

Nicht jedes dieser Komponentenfelder taucht später im Wess-Zumino-Modell wirklich auf.

Linearkombinationen von mehreren Superfeldern sind wieder Superfelder. Somit liefern Superfelder eine lineare Darstellung der SUSY-Algebra. Doch diese lineare Darstellung ist reduzibel. Wir gelangen zu den irreduziblen Darstellungen, indem wir Zusatzforderungen an die Superfelder stellen, die kovariant, i.e. invariant gegenüber SUSY-Transformationen sein. Bei den Superfeldern, die einer solchen kovarianten Bedingung genügen, handelt es sich um sog. eingeschränkte Superfelder (constraint superfields).

Ein chirales Superfeld $\Phi(x,\theta,\bar{\theta})$ hat man, falls gilt: $\bar{D}_{\dot{A}}\mathcal{F} = 0$; ein antichirales Superfeld $\Phi^{\dagger}(x,\theta,\bar{\theta})$ hat man, falls gilt: $D_A\mathcal{F} = 0$; ein Vektor-Superfeld hat man, falls gilt: $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\dagger}$.

Dabei sind $\bar{D}_{\dot{A}}$ und D_A sog. kovariante Ableitungen.

Die kovarianten Ableitungen sind folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}
&D_A := \partial_A + i(\sigma^{\mu}\bar{\theta})_A\partial_{\mu},\\
&\bar{D}^{\dot{A}} := \bar{\partial}^{\dot{A}} + i(\tilde{\sigma}^{\mu}\theta)^{\dot{A}}\partial_{\mu},\\
&D^A := \tilde{\epsilon}^{AB}D_B,\\
&\bar{D}_{\dot{A}} := \epsilon_{\dot{A}\dot{B}}\bar{D}^{\dot{B}} = -\bar{\partial}_{\dot{A}} - i(\theta\sigma^{\mu})_{\dot{A}}\partial_{\mu} = -\bar{\partial}_{\dot{A}} + i(\tilde{\sigma}^{\mu}\theta)_{\dot{A}}\partial_{\mu}.
\end{aligned}$$

Wir wollen einen expliziten Ausdruck für das chirale Superfeld finden.

Wir betrachten die komplexe Raumkoordinate $y^{\mu} = x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}$. Die Anwendung von $\bar{D}_{\dot{A}}$ darauf ergibt, wie man leicht nachrechnet, Null, ebenso ist $\bar{D}_{\dot{A}}\theta B = 0$.

Im Komplexen ist vieles einfacher, so auch hier im komplexen Superraum. Die reellen Koordinaten $(x\theta, \bar{\theta})$ hängen mit den komplexen $(y, \theta, \bar{\theta})$ via $y^\mu = x^\mu + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$, $\theta'_A = \theta_A$ und $\bar{\theta}'_A = \bar{\theta}_A$ zusammen.

Somit erfüllt $\Phi(y, \theta)$ die Bedingung $\bar{D}_{\dot{A}}\Phi = 0$. Indem man die Form der kovarianten Ableitungen im komplexen Superraum bestimmt (leichtes Umrechnen) und auf Φ anwendet, erhält man schnell, dass Φ unabhängig von $\bar{\theta}$ sein muss (Kalka Soff, 10.2.1). Also ist das allgemeinste chirale Superfeld von der Form $\Phi(y.\theta)$.

Die Taylorentwicklung von $\Phi(y, \theta)$ lautet:
$\Phi(y, \theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y)$,
wobei der Faktor $\sqrt{2}$ aus traditionellen Gründen benutzt wird.

Das chirale Superfeld beinhaltet ein komplexes Skalarfeld φ, das Sleptonen und Squarks beschreibt, ein linkshändiges Weyl-Spinorfeld ψ zur Beschreibung von Leptonen und Quarks sowie ein komplexes Skalarfeld F als Hilfsfeld.

Wir setzen für y den Ausdruck $x + i\theta\sigma\bar{\theta}$ ein, d.h. wir begeben uns wieder in den reellen Superraum und machen erneut eine Taylorentwicklung: $\Rightarrow \Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \varphi(x + i\theta\sigma\bar{\theta}) + \sqrt{2}\theta\psi(x + i\theta\sigma\bar{\theta}) + (\theta\theta)F(x + i\theta\sigma\bar{\theta}) = \varphi(x) + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi(x) - \frac{1}{2!}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})(\theta\sigma^\nu\bar{\theta})\partial_\mu\partial_\nu\varphi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\sqrt{2}(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\theta\psi(x) + (\theta\theta)F(x)$.

An dieser Stelle benutzen wir die sog. Fierz-Umordnungen. Das sind Regeln, nach denen Skalarprodukte aufgespalten, umgeordnet und wieder zusammengefügt werden können (s. Kalka-Soff, 10.1.2). Dann ergibt sich:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \varphi + \sqrt{2}\theta\psi + (\theta\theta)F + i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi - \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\bar{\theta}) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\Box\varphi.$$

Für $\Phi^\dagger$ können wir eine analoge Rechnung durchführen oder einfacher den hermitesch-konjugierten Ausdruck von obigem Ausdruck bilden:

$$\Phi^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) = \varphi^* + \sqrt{2} \cdot \bar{\theta}\bar{\psi} + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^* - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu\varphi^* + \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\partial_\mu(\theta\sigma^\mu\bar{\psi}) - \frac{1}{4}\Box(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\varphi^*.$$

Produkte von skalaren Superfeldern sind wieder skalare Superfelder, wie man schnell nachrechnet.

Einfaches Nachrechnen ergibt Φ^2 und Φ^3:

$$\Phi^2 = \varphi^2 + 2\sqrt{2}\varphi(\theta\psi) + (\theta\theta)(2\phi F - \psi\psi),$$

$$\Phi^3 = \varphi^3 + 3\sqrt{2}\varphi^2(\theta\psi) + 3(\theta\theta)(\varphi^2 F - \varphi\psi\psi).$$

Für die höchsten Komponenten von Φ^2 und Φ^3 gilt also:

$\Phi^2|_{\theta\theta} = 2\varphi F - \psi\psi$ und $\Phi^3|_{\theta\theta} = 3(\varphi^2 F - \varphi\psi\psi)$.

Ein Produkt aus einem chiralen und einem antichiralen Superfeld ergibt ein Vektor-Superfeld, wie man leicht nachprüfen kann.

Die höchste Komponente von $\Phi^\dagger\Phi$ können wir auch schnell angeben:

$$\Phi^\dagger\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = -\frac{1}{4}(\varphi^*\Box\varphi + \varphi\Box\varphi^*) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + F^*F.$$

Wir können die erhaltenen Ausdrücke für $\Phi^\dagger\Phi|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}}$, $\Phi^2|_{\theta\theta}$ und $\Phi^3|_{\theta\theta}$ in die Wess-Zumino-Lagrangedichte

$\mathcal{L}_{WZ}$ einsetzen:

$\mathcal{L}_{WZ}$ =L$_{kin}$+L$_m$+L$_{int}$,

$\mathcal{L}_{kin} = \Phi^\dagger(x,\theta,\bar\theta)\Phi(x,\theta,\bar\theta)|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} = -\frac{1}{4}(\varphi^*\Box\varphi + \varphi\Box\varphi^*) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{i}{2}(\bar\psi\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi) + F^*F,$

$\mathcal{L}_m = -\frac{m}{2}\Phi^2(y,\theta)|_{\theta\theta\, y\to x} + HC = -\frac{m}{2}(2\varphi F - \psi\psi) = m(\frac{1}{2}\psi\psi - \varphi F) + HC,$

$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g}{3}\Phi^3(y,\theta)|_{\theta\theta\, y\to x} + HC = g(\varphi\psi\psi - \varphi^2 F) + HC.$

Hierzu sind zwei Erläuterungen zu geben:

1. Für $\mathcal{L}_{kin}$ können wir die Regel $u\Box v = \partial_\mu(u\partial^\mu v) - (\partial_\mu u)(\partial^\mu v)$ benutzen und mehrere Summanden zusammenfassen, so dass wir erhalten:

$\mathcal{L}_{kin} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{i}{2}(\bar\psi\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi) + F^*F.$

2. Der Koordinatenwechsel $y \to x = y - i\theta\sigma\bar\theta$ ist glücklicherweise nichts anderes als die einfache Ersetzung von y durch x, was man folgendermaßen schnell beweist, indem man f taylorentwickelt und ausnutzt, dass $\theta^3 = 0$ ist:

$(\theta\theta)f(y) = (\theta\theta)f(x - i\theta\sigma\bar\theta) = (\theta\theta)f(x) - i\,\underbrace{(\theta\theta)(\theta}_{=\theta^3=0}\sigma^\mu\bar\theta)\partial_\mu f(x) = (\theta\theta)f(x) \Rightarrow x = y$ q.e.d.

Wir erhalten damit für die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{WZ}$ des Wess-Zumino-Modells:

$\mathcal{L}_{WZ} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{i}{2}(\bar\psi\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi) + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar\psi\bar\psi) + g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar\psi\bar\psi) + F^*F - (m\phi + g\varphi^2)F - (m\varphi^* + g{\varphi^*}^2)F^*.$

Genauer gesagt ist dies die Off-shell-Lagrangedichte, da die Bewegungsgleichungen nicht mit einbezogen wurden (nicht auf der Energieschale).

Wie lautet die Lagrangedichte on-shell, i.e. auf der Energieschale, also unter Einbeziehen der Bewegungsgleichung, der Euler-Lagrange-Gleichung?

Aus der Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^*} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu F^*)} = 0$ folgt mit $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F^*} = F - m\varphi^* - g\varphi^{*2}$ (direkt oben abzulesen) und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu F^*)} = 0$ (auch klar) die folgende Bewegungsgleichung für das Hilfsfeld F:

$F = m\varphi^* + g\varphi^{*2}$ (für F^* gilt dann natürlich die Bewegungsgleichung $F^* = m\varphi + g\varphi^2$.

Nota bene: Das bedeutet, dass die Bewegungsgleichung für F (und damit auch die für F^*) rein algebraisch ist, d.h. es tauchen keinerlei Ableitungen auf, es ist keine Differentialgleichung.

Hilfsfelder beschreiben also keine Ausbreitung in Raum und Zeit.

Mit Hilfe der gefundenen algebraischen Gleichung für das Hilfsfeld F, das uns vorher in der Wess-Zumino-Lagrangedichte noch gestört hat, können wir dieses eliminieren.

Zuvor multiplizieren wir noch F* mit F:

$|F|^2 = F^*F = (m\varphi^* + g\varphi^{*2})(m\varphi + g\varphi^2) = m^2|\varphi|^2 + mg|\varphi|^2(\varphi + \varphi^*) + g|\varphi|^4.$

Einsetzen der gefundenen Ausdrücke für F, F^* und F^*F in die

Off-shell-Wess-Zumino-Lagrangedichte (Off-shell lagrangian:)

$\mathcal{L}_{WZ} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) + F^*F - (m\phi + g\varphi^2)F - (m\varphi^* + g\varphi^{*2})F^*$

liefert schließlich die

On-shell-Wess-Zumino-Lagrangedichte (On-shell Lagrangian):

$\mathcal{L}_{WZ} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2|\varphi|^2 - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) - mg|\varphi|^2(\varphi + \varphi^*) - g^2|\varphi|^4$

Wir wollen die obige Lagrangedichte (on-shell) des Wess-Zumino-Modells genauer betrachten:

1. Zeile: Diese Terme beschreiben die freie Bewegung des bosonischen Feldes $\varphi(x)$ der Masse m.

2. Zeile: Diese Terme liefern eine Beschreibung der freien Bewegung des fermionischen Feldes $\psi(x)$ mit der gleichen (!) Masse m. Auch diese Tatsache (gleiche Masse) ist neu gegenüber der herkömmlichen Feldtheorie.

Die durch φ und ψ beschriebenen Teilchen sind die Superpartner aus dem oben erwähnten chiralen Supermultiplett (s. Vortrag von Patrick Fritzsch vom 09.07.03):

$\psi(x)$: Lepton, Quark; $\varphi(x)$: Slepton, Squark.

3. Zeile: Hier stehen die Wechselwirkungsterme. Der Yukawa-Term $g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi})$ mit der Kopplungskonstante g bestimmt die Bose-Fermion-Wechselwirkung. Bei den Terme $-mg|\varphi|^2(\varphi+\varphi^*)$ und $-g^2|\varphi|^4$ handelt es sich um die Selbst-Wechselwirkung des komplexen bosonischen Feldes. Auch die Stärke dieser Wechselwirkung wird durch die Kopplungskonstante g bestimmt. Diese beiden Terme definieren das Superpotential.

Man erkennt also, wie geschickt Wess und Zumino die einzelnen Terme aufeinander abgestimmt haben, um zu einer supersymmetrischen Lagrangedichte zu gelangen.

Wir vollziehen einen Übergang zu Bispinoren und skalaren Feldern:

Im Folgenden wollen wir einen Bezeichnungswechsel vornehmen. Dieser wird uns ermöglichen, noch tiefere Einblicke in das supersymmetrische Wess-Zumino-Modell zu kriegen.

Dazu zerlegen wir das komplexe Feld $\varphi(x)$ in zwei reelle Felder A(x) und B(x) gemäß $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - iB)$.

Des Weiteren gehen wir von den beiden Weyl-Spinoren ψ und $\bar{\psi}$ über zu Bispinoren, konkret zu Majorana-Spinoren Ψ und $\bar{\Psi}$ gemäß $\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}$ und $\bar{\Psi} = (\psi, \bar{\psi})$.

Im Wess-Zumino-Modell setzt man $G := \frac{g}{\sqrt{2}}$.

Wir erhalten eine weitere, kompakte Formulierung der Wess-Zumino-Lagrangedichte:

$\Rightarrow \mathcal{L}_{WZ} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m^2 A^2] + \frac{1}{2}[(\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m^2 B^2] - \frac{1}{2}\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\Psi + G\bar{\Psi}(A + i\gamma_5 B)\Psi - mGA(A^2 + B^2) - \frac{G^2}{2}(A^2 + B^2)^2.$

Man fordert, dass diese Lagrangedichte bei Paritätstransformationen invariant bleibt. Daraus ergeben sich zusätzliche Eigenschaften für die reellen Felder A und B.

Damit insbesondere der Yukawa-Term $Y = G\bar{\Psi}(A - i\gamma_5 B)\Psi$ paritätsinvariant bleibt, muss A ein skalares Feld (Lorentzskalar und paritätsinvariant), B ein sog. pseudoskalares Feld sein (Lorentzskalar und Vorzeichenwechsel bei Spiegelung):

$PA(x) = A(x)$ und $PB(x) = -B(x)$.

FAZIT: Im Wess-Zumino-Modell ist das chirale Supermultiplett realisiert.

Das Modell von Julius Wess und Bruno Zumino beinhaltet nämlich:

ein reelles skalares Feld: $A(x)$ mit $A = A^*$, ein reelles pseudoskalares Feld: $B(x)$ mit $B = B^*$, ein Majorana-Spinorfeld: $\Psi(x)$ mit $\Psi = C\bar{\Psi}^T$.

Die bosonischen Felder A und B beschreiben Spin 0-Teilchen und das fermionische Spinorfeld beschreibt Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen.

Setzen wir die Kopplungskonstante gleich Null, so ergibt sich natürlich

das freie Wess-Zumino-Modell:

$\mathcal{L}_{WZ\,frei} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m^2 A^2 + (\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m^2 B^2 - \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi]$.

Behauptung: A und B sind Klein-Gordon-Felder und das Spinorfeld genügt der Dirac-Gleichung.

Beweis: Betrachte die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Komponentenfelder $\Phi_i \in \{A, B, \Psi, \bar{\Phi}\}$:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} = 0$.

Es ist $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A} = -m^2 A$ und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A)} = \partial_\mu A$.

Daher folgt direkt:

$(\Box + m^2)A = 0$ (Klein-Gordon-Gleichung) und analog
$(\Box + m^2)B = 0$ (Klein-Gordon-Gleichung)

mit dem Wellenoperator $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$.

Für das fermionische Feld $\bar{\Psi}$ können wir an der Lagrangedichte direkt ablesen:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} = -\frac{1}{2}(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi$ und
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = 0$
$\Rightarrow (i\partial\!\!\!/ - m)\Psi = 0$ (Dirac-Gleichung).

Für Ψ gilt: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = -\frac{1}{2}m\bar{\Psi}$ und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu$.

$\Rightarrow \bar{\Psi}(\overleftarrow{i}\partial\!\!\!/ - m) = 0$ (adjungierte Dirac-Gleichung).

Es gilt noch das wichtigste Charakteristikum des Wess-Zumino-Modells zu zeigen: Die gefundene Wess-Zumino-Lagrangedichte ist wirklich invariant unter infinitesimalen SUSY-Transformationen.

Vorüberlegung: Die Transformationen $\delta A = \bar{\eta}\Psi$, $\delta B = -i\bar{\eta}\gamma_5\Psi$ und $\delta\Psi = (i\partial\!\!\!/ + m)(A - i\gamma_5 B)\eta$ sind äquivalent zu den bekannten SUSY-Transformationen $\delta\varphi = \sqrt{2}\epsilon\psi$ und $\delta\Psi = i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu\varphi + \sqrt{2}m\varphi^*\epsilon$.

Beweis: Bemerkung: Der Transformationsparameter η ist hier ebenfalls ein Majorana-Spinor. Wir wählen hier erneut die chirale Darstellung: $\eta = \begin{pmatrix} \epsilon \\ \bar{\epsilon} \end{pmatrix}$, $\bar{\eta} = \eta^\dagger\gamma_0 = (\epsilon, \bar{\epsilon})$.

$\delta A = \bar{\eta}\Psi = (\epsilon, \bar{\epsilon})\begin{pmatrix} \epsilon \\ \bar{\epsilon} \end{pmatrix} = \epsilon\psi + \bar{\epsilon}\bar{\psi}$,
$\delta B = -i\bar{\eta}\gamma_5\Psi = -i(\epsilon, \bar{\epsilon})\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = -i(\epsilon, \bar{\epsilon})\begin{pmatrix} -\psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = i\epsilon\psi - i\bar{\epsilon}\bar{\psi}$, somit

$\delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta A - i\delta B) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon\psi + \bar{}\bar{\psi} + \epsilon\psi - \bar{}\bar{\psi} = \sqrt{2}\epsilon\varphi$.

Es ist $\partial\!\!\!/ = \partial_\mu\gamma^\mu = \partial\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu\partial_\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu & 0 \end{pmatrix}$.

Damit berechnen wir:

$\delta\Psi = (i\partial\!\!\!/ + m)(A - i\gamma_5 B)\eta = \begin{pmatrix} m & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A + iB & 0 \\ 0 & A - iB \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \epsilon \\ \bar{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\varphi^* & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \epsilon \\ \bar{\epsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & i\sigma^\mu\partial_\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\varphi^*\epsilon \\ \sqrt{2}\varphi\bar{\epsilon} \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} m\varphi^*\epsilon + i\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\epsilon}\varphi \\ m\varphi\bar{\epsilon} + i\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\epsilon\varphi^* \end{pmatrix}$.

Die erste Komponente davon ergibt $\delta\Psi = i\sqrt{2}\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu\varphi + \sqrt{2}m\varphi^*\epsilon$. q.e.d.

Also sind die Transformationen $\delta A = \bar{\eta}\Psi$, $\delta B = -i\bar{\eta}\gamma_5\Psi$ und $\delta\Psi = (i\partial\!\!\!/ + m)(A - i\gamma_5 B)\eta$ wirklich äquivalent zu den bekannten infinitesimalen SUSY-Transformationen.

Invarianz der Wirkung des Wess-Zumino-Modells unter infinitesimalen SUSY-Transformationen :

Eine Symmetrietransformation lässt die Wirkung $S = \int d^4x\mathcal{L}$ wie gesagt invariant, falls die Änderung der Lagrangedichte die Form einer Viererdivergenz besitzt: $\mathcal{L} = \partial_\mu\Lambda^\mu \longrightarrow 0$.

Dass dies für die gefundene Wess-Zumino-Lagrangedichte erfüllt ist, bleibt zu zeigen.

Wie lautet die Variation der Lagrangedichte des Wess-Zumino-Modells?

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu A)\delta(\partial^\mu A) - m^2 A\delta A + (\partial_\mu B)\delta(\partial^\mu) - m^2 B\delta B - \underbrace{\frac{1}{2}(\delta\bar{P}si)(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi}_{=0\, wegen Dirac-Gleichung} - \tfrac{1}{2}\bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\delta\Psi.$$

Es ist $\delta(\partial^\mu) = \partial^\mu(\delta A)$ und für B gilt das Analoge.

Dann können wir gemäß $\delta A = \bar{\eta}\Psi$, $\delta B = -i\bar{\eta}\gamma_5 B$ und $\delta\Psi = (i\partial\!\!\!/ + m)(A - i\gamma_5 B)\eta$ einsetzen.

Ausnutzen der Dirac- und der Klein-Gordon-Gleichung führt schließlich zu:

$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \underbrace{\bar{\eta}[\partial^\mu(A - i\gamma_5 B)]\Psi}_{=:\Lambda}$, d.h. es handelt sich bei $\delta\mathcal{L}$ wirklich um eine Viererdivergenz.

Zusammenfassung:

Wir haben das Konzept des Superfeldes kennengelernt.

Wir haben uns mit allgemeinen Eigenschaften supersymmetrischer Lagrangedichten beschätigt.

Wir haben eine spezielle supersymmetrische Lagrangedichte hergeleitet, nämlich die des Wess-Zumino-Modells.

Off-shell lautet sie:
$\mathcal{L}_{WZ} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) + F^*F - (m\phi + g\varphi^2)F - (m\varphi^* + g\varphi^{*2})F^*$.

On-shell lautet sie:
$\mathcal{L}_{WZ} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - m^2|\varphi|^2 - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}) + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + g(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) - mg|\varphi|^2(\varphi + \varphi^*) - g^2|\varphi|^4$.

Die zugehörige freie Wess-Zumino-Lagrangedichte ist gegeben durch:
$\mathcal{L}_{WZ\,frei} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m^2A^2 + (\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m^2B^2 - \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi]$.

Die kompakte Form der Wess-Zumino-Lagrangedichte mit Bispinoren und skalaren Feldern lautet: $\Rightarrow \mathcal{L}_{WZ} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu A)(\partial^\mu A) - m^2A^2] + \frac{1}{2}[(\partial_\mu B)(\partial^\mu B) - m^2B^2] - \frac{1}{2}\bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\Psi + G\bar{\Psi}(A + i\gamma_5 B)\Psi - mGA(A^2 + B^2) - \frac{G^2}{2}(A^2 + B^2)^2$.

Wir haben gesehen, dass im Wess-Zumino-Modell auf geniale Weise das chirale Supermultiplett realisiert ist und die Wirkung des Wess-Zumino-Modells invariant unter infinitesimalen SUSY-Transformationen ist, somit das Wess-Zumino-Modell wirklich ein SUSY-Modell ist.

Wir haben somit die einfachste supersymmetrische Feldtheorie kennengelernt.

Es gibt weitere interessante SUSY-Modelle. Von großer Bedeutung im Zusammenhang mit supersymmetrischer Feldtheorie etc. sind auch die Supergravitation (SUGRA) und die Superstringtheorie (s. Vortrag vom 30.07.2003).

Literatur:

Kalka, H., G. Soff. *Supersymmetrie*. B. G. Teubner Stuttgart 1997.