Supersymmetrische Modelle in der Quantenmechanik

Die Supersymmetrie (SUSY) beschreibt die Transformation von bosonische in fermionische Zustände und umgekehrt. In der Quantenmechanik (QM) wird diese Transformation durch einen supersymmetrischen Operator **Q** vermittelt.

Bosonen sind Teilchen mit Spin 1, wogegen Fermionen der Spin ½ tragen. Bei Drehungen verhalten sich Bosonen daher wie Tensoren, während Fermionen sich wie Spinoren verhalten. Kurz gesagt, Bosonen und Fermionen sind total unterschiedliche Teilchen und eine Symmetrie zwischen diesen Teichen war lange nicht bekannt. Erst Mitte der 70er Jahre ist es mit der Entdeckung der SUSY gelungen diese beiden zueinander vollkommen fremden Bereiche zusammenzuführen.

Um diesen Formalismus näher zu beschreiben verwenden wir die aus der Quantentheorie bekannten Erzeuger und Vernichter.

Bosonen: Erzeuger: $b^+|n_B\rangle = \sqrt{n_B+1}|n_B+1\rangle$

Vernichter: $b^-|n_B\rangle = \sqrt{n_B}|n_B-1\rangle$

mit folgenden Kommutatorrelationen: $[b^-,b^+] = \mathbf{1}$ sowie $[b^+,b^+] = [b^-,b^-] = \mathbf{0}$

Durch wiederholtes Anwenden von b^+ auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ können wir uns jeden beliebigen Zustand erzeugen

$$|n_B\rangle = (n_B!)^{-1/2}(b^+)^{n_B}|0\rangle$$

Fermionen: Erzeuger: $f^+|n_F\rangle = \sqrt{n_F+1}|n_F+1\rangle$

Vernichter: $f^-|n_F\rangle = \sqrt{n_F}|n_F-1\rangle$

Es gilt: $f^+|0\rangle = |1\rangle, \quad f^-|1\rangle = |0\rangle, \quad f^-|0\rangle = f^+|1\rangle = \mathbf{0}$

Damit lassen sich im 2-dim Zustandsraum die beiden Fermioperatoren als 2x2-Matrizen darstellen:

$$f^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } f^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gelten folgende Antikommutatorrelationen: $\{f^-,f^+\} = \mathbf{1}$, $\{f^+,f^+\} = \{f^-,f^-\} = \mathbf{0}$
$[b,f] = 0$, da Bose- und Fermioperator in unterschiedlichen Räumen wirken.

SUSY-Operator

SUSY kann man nur in einem Modell studieren, welches sowohl Fermionen als auch Bosonen enthält. Das einfachste Modell ist daher der Zustandsraum, welcher von den Produktzuständen aufgespannt wird:

$$|n_B n_F\rangle = |n_B\rangle|n_F\rangle \quad \text{mit } n_B = 0, 1, \dots, \infty \qquad n_F = 0, 1$$

Somit sind bosonische Zustände durch $n_F = 0$ charakterisiert und fermionische durch $n_F = 1$

$\Rightarrow Q_+|n_B n_F\rangle \propto |n_B - 1, n_F + 1\rangle$ sowie $\Rightarrow Q_-|n_B n_F\rangle \propto |n_B + 1, n_F - 1\rangle$
Q_+ vernichtet damit ein Boson und erzeugt ein Fermion. Q_- erzeugt ein Boson und vernichtet ein Fermion, da n_F nur auf die Werte 0 und 1 beschränkt ist.

Es liegt nahe das Q_+ und Q_- Zweiteilchenoperatoren sind: $Q_+ = b^- f^+$ und $Q_- = b^+ f^-$

SUSY bedeutet : Bei jeder Transformation, welche die Q´s vermitteln, bleibt die Energie des Systems erhalten. Somit muss gelten: $[H_S, Q_\pm] = 0$. $H_S = \{Q_+, Q_-\}$ erfüllt diese Forderung. Damit ist das einfachste SUSY-Modell schon konstruiert. Da man allerdings gerne hermietsche Operatoren haben möchte, was Q_+ und Q_- nicht sind, definiert man sich zwei neue Operatoren Q_1 und Q_2:

$$Q_1 = Q_+ + Q_- \quad \text{und} \quad Q_2 = -i\,(Q_+ - Q_-)$$

Für sie gilt: $\{Q_1, Q_2\} = 0 \quad [H_S, Q_{1,2}] = 0$

Der harmonische Oszillator

Der Hamilton-Operator (HO) lautet:

$$H_B = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} Q^2$$

Es ist üblich anstelle von P und Q die zueinander adjungierten Erzeuger und Vernichter einzuführen:

$$b^\pm = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(Q \mp \frac{iP}{m\omega}\right)$$

Dies führt zum Teilchenzahloperator:

$$N_B = b^+ b^- = \frac{m\omega}{2\hbar}\left(Q^2 + \frac{P^2}{m^2\omega^2}\right) + \frac{i}{2\hbar}[Q, P] = \frac{H_B}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H_B = \hbar\omega\left(N_B + \frac{1}{2}\right)$$

Daraus ergeben sich dann die Energiewerte: $E_{n_B} = \hbar\omega(n_B + 1/2)$

Fermi-Oszillator:

Für den Fermi-Oszillator findet sich folgendes:

$$H_F = -\frac{\hbar\omega}{2}\left(f^- f^+ - f^+ f^-\right) = \hbar\omega\left(N_F - \frac{1}{2}\right) \qquad \Rightarrow E_{n_F} = \hbar\omega\left(n_F - \frac{1}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ Bose-Oszillator: $\quad H_B = \hbar\omega_B(b^+ b^- + \frac{1}{2})$

Fermi-Oszillator: $\quad H_F = \hbar\omega_F(f^+ f^- - \frac{1}{2})$

SUSY-Oszillator:

$$Q_+ = \sqrt{\hbar\omega}\cdot b^- f^+ \text{ und } \quad Q_- = \sqrt{\hbar\omega}\cdot b^+ f^-$$

Für den Hamilton-Operator folgt dann:

$$H_S = \hbar\omega\{b^- f^+, b^+ f^-\} = \ldots = \hbar\omega\{b^+ b^- + f^+ f^-\} = H_B + H_F$$

Das Eigenwertspektrum besitzt dann die einfache Form:

$$E = \hbar\omega(n_B + n_F)$$

Es treten also keine Nullpunktsenergien mehr auf.

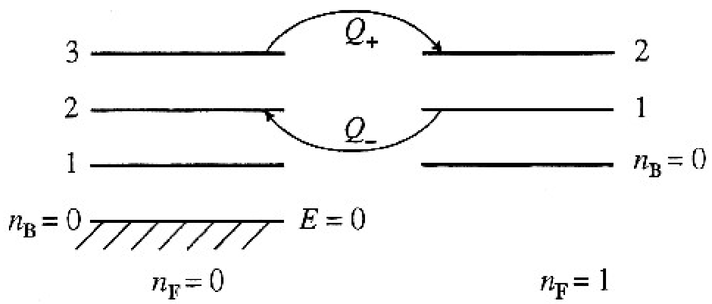

Abb. 1: Niedrigste Energei-EW des SUSY-Oszillators

Das Energiespektrum des SUSY-Oszillators offenbart uns bereits alle wichtigen Merkmale eines supersymmetrischen Systems. Das Niveauschema zeigt, dass es zu jedem Wert von n_B genau 2 Zustände gibt, einen mit $n_F = 0$ und einen mit $n_F = 1$. Die beiden Partnerzustände besitzen dieselbe Energie: $|n_B, 0\rangle$ und $|n_B - 1, 1\rangle$. Das System ist also 2-fach entartet. Nur der Grundzustand $|0,0\rangle$ mit E = 0 ist nicht entartet.

SUSY-Algebra:

Für Lie-Gruppen gilt: Endliche Transformationen lassen sich durch infinitisimale Transformationen zusammensetzen. Diese Generatoren bilden eine Lie-Algebra.
Lie-Gruppen $\rightarrow$ Kommutatoren
SUSY-Algebra beinhaltet noch zusätzlich Antikommutatoren
$[H_S,Q_i] = 0$ und $\{Q_i,Q_j\} = 2H_S\delta_{ij}$ bildet die einfachste SUSY-Algebra,
Q_i ist der SUSY-Generator.

Operatoren lassen sich in 2 Klassen unterteilen: gerade Operatoren (bosonisch) und ungerade Operatoren (fermionisch). Das Produkt zweier gerader sowie zweier ungerader Operatoren ist ein gerader Operator. Das Produkt zweier unterschiedlicher Operatoren ist ein ungerader Operator. Hier ist Q ungerade während, H gerade ist.

Nichtlineare Bose-Fermi-SUSY:

Wir betrachten nun den Fall das der bosonische und der fermionische Sektor miteinander wechselwirken. Als Forderung stellen wir das die SUSY erhalten bleibt.
Für den Hamilton-Operator gilt:
$H_S = B^-B^+f^+f^- + B^+B^-f^-f^+$ wobei B^+ und B^- Funktionen der bosonischen Einteilchenoperatoren $b^\pm$ sind.
Es gilt dann weiter $[H_S,H_F] = 0$ aber $[H_S,H_B] \neq 0$. Somit werden die Zustände nur noch durch n_F und E charakterisiert. Als Bezeichnung wird daher $|En_F\rangle$ gewählt und es gilt:
$H_S|En_F\rangle = E|En_F\rangle$ und $N_F|En_F\rangle = n_F|En_F\rangle$
Da n_F nur zwei Werte annehmen kann, zerfällt der Zustandsraum in 2 Klassen

$$|En_F\rangle = \begin{pmatrix} |E0\rangle \\ |E1\rangle \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Boson \\ Fermion \end{pmatrix}$$

Alle Operatoren erscheinen in dieser Darstellung als 2x2-Matritzen:

$$H_S = Q_1^2 = Q_2^2 = \begin{pmatrix} B^+B^- & 0 \\ 0 & B^-B^+ \end{pmatrix}$$

Das EW-Spektrum:

Wie bereits gesehen ist das EW-Spektrum nicht negativ und alle Zustände mit $E \neq 0$ sind zweifach entartet. Dies gilt auch im nichtlinearen Fall.

Das Superpotential:

Man ersetzt $b^\pm$ durch $B^\pm = \frac{1}{2}\left[W(Q) \mp \frac{iP}{\sqrt{m}}\right]$ mit W(Q) als Superpotential.
Beachte: W hat Dimension $[\text{Energie}]^{1/2}$ und darf daher nicht als eine Art potentielle Energie angesehen werden.

Damit lässt sich der Hamilton-Operator in folgender Form schreiben:

$$H_S = \frac{1}{2}\left(\frac{P^2}{2m} + W^2\right) - \frac{\hbar}{\sqrt{m}}\frac{dW}{dq}\frac{\sigma^3}{2}$$

Dies bildet das Gerüst für die supersymmetrische QM:

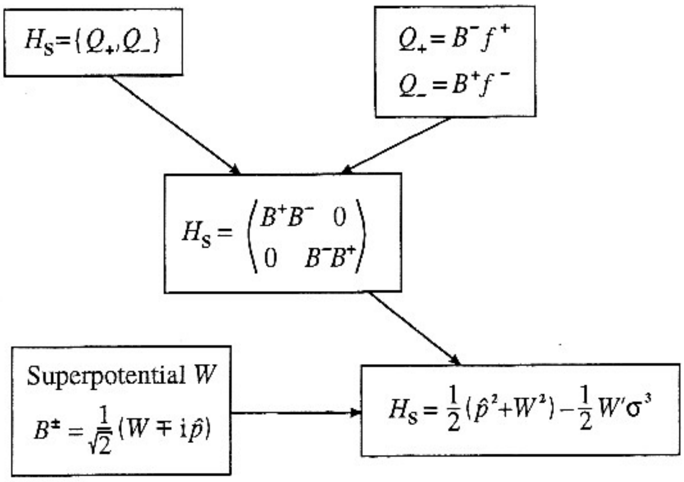

Abb. 2: Struktur des SUSY-Hamilton-Operators

<u>Der Grundzustand:</u>

$$H_S = \begin{pmatrix} B^+B^- & 0 \\ 0 & B^-B^+ \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}$$

Aufgrund seiner Diagonalgestalt zerfällt die Schrödinger-Gleichung in zwei einkomponentige Gleichungen. Dies bringt enorme Vorzüge. Anstatt eine DGL 2. Ordnung zu lösen, wie sie die Schrödinger-Gleichung darstellt, braucht man nur noch eine DGL 1.Ordnung zu lösen.
Die Lösungen sind:

$$\left.\begin{matrix} \Psi_0^{(1)}(x) \\ \Psi_0^{(2)}(x) \end{matrix}\right\} = C \cdot \exp\left[\mp \frac{\sqrt{m}}{\hbar}\int_0^x W(x')\,dx'\right]$$

Aber nicht jede Lösung der S.G. entspricht automatisch einem physikalischen Zustand, denn die Grundzustandswellenfunktion muss normierbar sein. Da sich der Definitionsbereich über die gesamte reelle Achse erstreckt, muss die Wellenfunktion im Unendlichen verschwinden.

$\Psi_0^{(1)}(x)$ ist Grundzustand bei E = 0, wenn $\int_{-\infty}^{0} W(x')\,dx' = -\infty$ und $\int_{0}^{+\infty} W(x')\,dx' = +\infty$

$\Psi_0^{(2)}(x)$ ist Grundzustand bei E = 0, wenn $\int_{-\infty}^{0} W(x')\,dx' = +\infty$ und $\int_{0}^{+\infty} W(x')\,dx' = -\infty$

Man erkennt, dass sich die beiden Forderungen ausschließen.
Man hat also insgesamt 3 Fälle zu unterscheiden.

1.) Es gibt nur einen Zustand mit E = 0 und er gehört zu H_1
2.) Es gibt nur einen Zustand mit E = 0 und er gehört zu H_2
3.) Es gibt keinen Zustand mit E = 0. Der Grundzustand liegt bei E > 0 und ist zweifach entartet.

Man bezeichnet Fall 1 und 2 als exakt und Fall 3 als gebrochen.

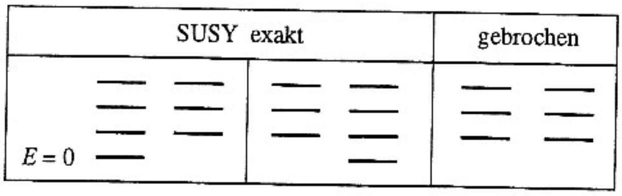

Abb. 3: E-Spektrum für exakte und gebrochene SUSY

<u>Exakte und gebrochene SUSY:</u>

Spontane Symmetriebrechung: [H,G] = 0 (G = Generator einer Transformation)
Der Grundzustand respektiert die Symmetrie nicht, also

$$G\left|0\right\rangle = 0 \Rightarrow exakt$$

$$G\left|0\right\rangle \neq 0 \Rightarrow gebrochen$$

Generator SUSY sind Q_1 oder Q_2
SUSY ist exakt wenn: $Q_1\left|0n_F\right\rangle = 0 \quad Q_2\left|0n_F\right\rangle = 0 \quad H_S\left|0n_F\right\rangle = Q^2\left|0n_F\right\rangle = 0$ $\Rightarrow$ EW E = 0
SUSY exakt $\Leftrightarrow$ Grundzustand E = 0

Dies kann man nun noch auf das Superpotential anwenden:

$$W_+ := \lim_{x\to\infty} W(x) \qquad W_- := \lim_{x\to-\infty} W(x)$$

$$\begin{array}{ll} W_- < 0 \text{ und } W_+ > 0 & \text{SUSY exakt} \\ W_- > 0 \text{ und } W_+ < 0 & \text{SUSY exakt} \\ W_\pm < 0 \text{ und } W_\pm > 0 & \text{SUSY gebrochen} \end{array}$$

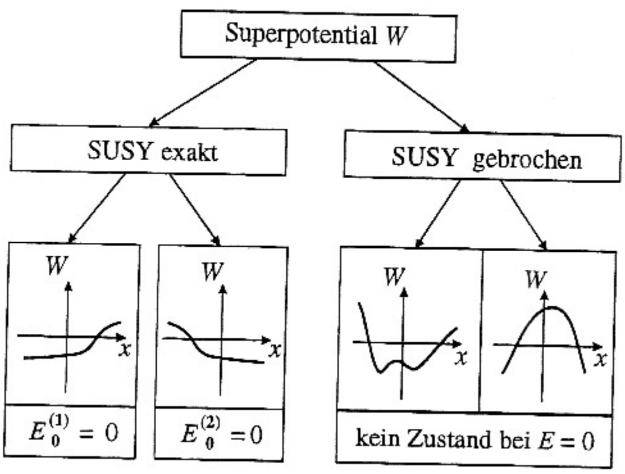

Abb. 4: Superpotentiale für exakte und gebrochene SUSY

Resumé:

1.) SUSY überführt fermionische in bosonische Zustände und umgekehrt. H bleibt invariant. E-Spektrum ist zweifach entartet außer im Grundzustand E = 0.

2.) Bei mathematischer Betrachtung bedient man sich der SUSY-Algebra. Im Gegensatz zur gewöhnlichen Lie-Algebra treten dabei Anti-Kommutatoren auf.

3.) SUSY wird im nichtlinearen Fall durch Superpotential beschrieben. Das Verhalten von W(x) entscheidet ob SUSY exakt ist oder gebrochen.