Seminar über Teilchen- und Kerntheorie — Symmetrie und Supersymmetrie

Supersymmetrische Erweiterung der Poincaré-Algebra

Patrick Fritzsch
fritzsch@uni-muenster.de

27.07.2003

Zusammenfassung

Dieser Text soll die schriftliche Darstellung meines Folien-Vortrages im Seminar über Teilchen- und Kerntheorie des SS 03 vom 09. Juli 2003 sein. Er stützt sich auf vorangegangene Vorträge in diesem Seminar, insbesondere auf den Vortrag "Die Lorentz-Gruppe und die Poincaré-Gruppe" sowie "Spinoren der Lorentzgruppe".

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Allgemeines

Wie in der Elementarteilchenphysik üblich werde ich durchgehend natürliche Einheiten

$$c = 1 = \hbar$$

verwenden. Der Text richtet sich wie der vorangegangene Vortrag hauptsächlich nach dem Buch [1]. Dieses Buch möchte ich an dieser Stelle nochmals empfehlen, da es zum Selbststudium umfangreich genug ist und viele Rechnungen und Beispiele enthält. Darum soll auch dieser Text keine reine Wiedergabe der entsprechenden Rechnungen sein, sondern nur die wichtigsten Ergebnisse zusammenfassen.
Die Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ hat hier die Signatur

$$(+1, -1, -1, -1)$$

und deren Inverse lautet wie üblich $g^{\mu\nu}$. Damit können wir das Skalarprodukt mit Summenkonvention schreiben als:

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \equiv x^\mu y_\mu$$

Griechische Indizes μ, ν, ... laufen über $0, 1, 2, 3$ und lateinische i, j, ... über $1, 2, 3$. Die Orientierung des Levi-Cevita-Symbols $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ sei festgelegt durch $\varepsilon_{0123} = +1$.

1.2 Die Poincaré-Gruppe

Eine Poincaré-Transformation P ist eine eigentlich-orthochrone Lorentz-Transfomation Λ gefolgt von einer Translation a. Die Poincarétransformierten Raumzeitkoordinaten $x^{\mu'}$ sind dann gegeben durch

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu + a^\nu$$

oder

$$x' = \Lambda x + a \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{d}x' = \Lambda \mathrm{d}x$$

mit der Invariante

$$\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}x' \cdot \mathrm{d}x'$$

Für eine solche Poincaré-Transformation schreiben wir

$$\mathrm{P} = (\Lambda, a)$$

Die Gesamtheit aller dieser Transformationen bilden die **Poincaré-Gruppe**

$$\mathcal{P} = \left\{ (\Lambda, a) \middle| \, \Lambda \in \mathrm{SO}(1,3), a \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

mit dem **Einselement**

$$(\mathbb{1}, 0)$$

und dem **Inversen**

$$(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a)$$

von (Λ, a), sowie der **Multiplikationsregel**

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

Da Λ_2 hier rechts im Vektorteil auftaucht, ist die Poincaré-Gruppe kein direktes, sondern ein halbdirektes (semidirect) Produkt von Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$ und Translationsgruppe $\mathcal{T}$

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} \overset{S}{\otimes} \mathcal{T}$$

mit $\Lambda \in \mathcal{L}$ und $a \in \mathcal{T}$. Damit ist nun aber auch die entsprechende Lie-Algebra ein halbdirektes Produkt aus Lorentz- und Translationsalgebra. Sie ist daher 10-dim. mit den 6 Generatoren $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ der Lorentz-Gruppe – drei Boosts und drei Drehungen – und den 4 Generatoren P_μ der Translationsgruppe. Die Poincaré-Algebra lautet schließlich

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$
$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\,(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho)$$
$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\,(g^{\mu\rho} M^{\sigma\nu} - g^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} + (\mu \leftrightarrow \nu))$$

Die Poincaré-Algebra besitzt die Casimir-Operatoren

$$P^2 = P_\mu P^\mu \qquad \text{und} \qquad W^2 = W_\mu W^\mu$$

Ersterer ist das Betragsquadrat des Viererimpulses und Letzterer des Pauli-Lubanski-Vektors, definiert durch

$$W_\mu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma}$$

Mit Hilfe dieser Operatoren können alle Einteilchenzustände $|z\rangle$ klassifiziert werden. Für massive Teilchen der Masse m und Spin s gilt:

$$\begin{aligned} P^2 \, |z\rangle &= m^2 \, |z\rangle \\ W^2 \, |z\rangle &= -m^2 s(s+1) \, |z\rangle \end{aligned}$$

Für masselose Teilchen hingegen ist $P^2 = 0 = W^2$. Sie sind daher festgelegt durch $m \equiv 0$ und ihrer **Helizität**:

$$h \, |z\rangle = \pm s \, |z\rangle$$

1.3 Physikalische Motivation

Das bis heute beste physikalische Modell, welchen den Physikern zur Naturbeschreibung vorliegt, ist das **Standardmodell** (SM). In ihm sind die Elementarteilchen, wie soeben gesehen, die irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe. Im SM sind drei der vier Grundkräfte vereinigt. Sie enthält eine Beschreibung der elektromagnetischen, der schwachen und der starken WW. Erstere ist eine $U(1)$-Eichtheorie, die QED; die schwache WW hat eine SU(2)-Eichgruppe und die starke WW, die QCD, liegt einer SU(3)-Eichgruppe zugrunde. Historisch ist man von diesen drei zunächst getrennt voneinander behandelbaren Theorien ausgegangen. Diese lassen sich zunächst trivial verbinden zu einer Theorie mit Eichgruppe

$$SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$$

welche aber offensichtlich keine neuen Erkenntnisse hervorbringen kann. Es kam daher der Gedanke auf, eine einzige Gruppe zu suchen, welche diese drei Eichgruppen in nichttrivialer Weise verbinden kann. Dies ist die Eichgruppe $SU(5)$, die dem SM zugrunde liegt und durch spontane Symmetriebrechung die richtige Produktgruppe übergehen kann.
Das SM hat sich bis heute in keinem Experiment wiederlegen lassen. Es bleiben dennoch offene Fragen und Probleme in der Theorie zurück:

- mindestens 19 offene Parameter müssen durch Experimente in die Theorie eingebunden werden
- Warum gibt es genau drei Genrationen von Quarks und Leptonen ?
- Frage nach Existenz und physikalischer Masse des Higgs-Bosons, welches den Elementarteilchen ihre Masse verleiht.
- Massen-Hierarchieproblem: da aus $SU(5)$ zwei Massenskalen mit einem Verhältnis von 12 Zehnerpotenzen folgen, muss in jeder Ordnung Störungstheorie diese Verhältnis 'von Hand' eingestellt werden (Finetuning)
- Was ist dunkle Materie ?
- Warum mehr Materie als Antimaterie im Universum ?
- ...

Diese Liste könnte noch lange erweitert werden, doch möchte ich an dieser Stelle anschließen an die Frage:

- Warum konvergieren die laufenden Kopplungen nicht?

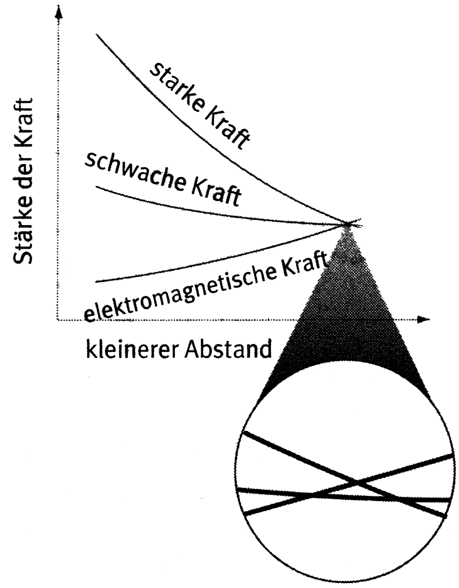


Abbildung 1: Konvergenz der laufenden Kopplungen des SM (Quelle: Brian Greene, 'Das elegante Universum')

Zunächst sei gesagt, dass die Stärke der Kopplung der einzelnen Kräfte energieabhängig ist. So lautet die Feinstrukturkonstante der QED nur bei einer Energie $E = 0$ gleich $\alpha = 1/137$. Wie im Bild zu erkennen ist, steigt sie für größere Energien bzw. kleinere Abstände an. Rechnungen haben nun gezeigt, dass im SM alle drei Kopplungen sich für eine sehr große Energie fast genau schneiden. Auf der Suche nach einer Begründung stellte man fest, dass in jeder supersymmetrischen Theorie diese Kopplungen sich genau in einem Punkt schneiden würden. Wir kommen also langsam zur Supersymmetrie.

Das Standardmodell wird durch innere Symmetriegruppen gebildet. Denen gegenüber stehen die Raumzeitsymmetrien, die durch die

Poincaré-Gruppe charakterisiert sind. Wieder sucht man eine nicht-triviale Vereinigung M dieser beiden Symmetriegruppen:

$$\begin{array}{ccccc} M & \supset & SU(5) & \otimes & P \\ & & \cup & & \\ & & SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1) & & \end{array}$$

Auf der Suche nach M gab es viele Rückschläge, so dass sich eine Fülle von 'No-Go-Theoremen', die immer nur spezielle nicht-triviale Vereinigungen auschließen konnten, hervortaten. Dies endete mit dem Coleman-Mandula-Theorem (Phys. Rev. 159 (1967) 1251), welches besagt dass es keine nicht-triviale Vereinigung von Raumzeitsymmetrien (nicht-kompakt) mit internen Symmetriegruppen (i.a. kompakt) geben kann.
Wie sich später herausstellte, waren die Voraussetzungen für diesen Beweis zu eng gefasst. Erweitert man nämlich den Begriff der Lie-Gruppen, deren Generatoren Kommutatorrelationen erfüllen mit Hilfe von Antikommutatoren, so können die Symmetrien auf nicht-triviale Weise erweitert werden und das Coleman-Mandula-Theorem wird hinfällig.
Dazu benötigen wir die

2 Graduierung

2.1 $\mathbb{Z}_n$ graduierte Algebra

Eine $\mathbb{Z}_n$ graduierte Algebra besteht aus einem Vektorraum

$$\mathbb{L} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{L}_i = \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{L}_{n-1}$$

als direktes Produkt von n Unterräumen $\mathbb{L}_i$ mit dem Produkt

$$u_j \circ u_k \in \mathbb{L}_{j+k \mod n}$$

für $u_i \in \mathbb{L}_i$. Ein Produkt mit diesen Eigenschaften heißt **Graduierung**. Dazu wollen wir zwei Beispiele betrachten.

- **n=1** : $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0$
  Wir haben nur einen Unterraum, also auch nur ein Produkt $\mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0 \rightarrow \mathbb{L}_0$. *Abbildung 2* soll veranschaulichen, dass die Verknüpfung eines Elementes von $\mathbb{L}_0$ mit einem weiteren Element von $\mathbb{L}_0$ im Sinne der Graduierung wieder Element von $\mathbb{L}_0$ ist. Der Raum $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0$ ist selbst eine Algebra, da das Produkt zweier Elemente einer Algebra immer selbst ein Element der Algebra sein muss.

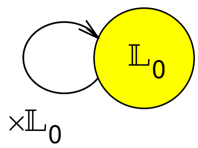


Abbildung 2: "Flussdiagramm" zur $\mathbb{Z}_1$-Graduierung

- **n=2** : $\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_1$
  Der Vektorraum besteht aus zwei Unterräumen, so dass insgesamt vier Produkte gebildet werden können:

$\searrow$	$\times\mathbb{L}_0$	$\times\mathbb{L}_1$
$\mathbb{L}_0$	$\mathbb{L}_0$	$\mathbb{L}_1$
$\mathbb{L}_1$	$\mathbb{L}_1$	$\mathbb{L}_0$

  Auch dies können wir uns wieder durch ein Bild veranschaulichen:

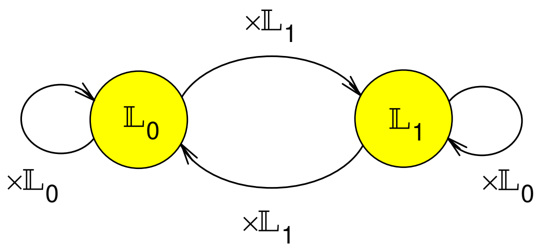


Abbildung 3: "Flussdiagramm" zur $\mathbb{Z}_2$-Graduierung

  Wir erkennen, dass beim Übergang von der $\mathbb{Z}_1$- zur $\mathbb{Z}_2$-Graduierung der bestehende Anteil von $\mathbb{Z}_1$ nicht verändert wird und lediglich die verbleibenden drei Produkte 'aufgesetzt' werden. Der Unterraum $\mathbb{L}_0$ bleibt also selbst eine Algebra. Der neue Unterraum $\mathbb{L}_1$ hingegen bildet selbst keine Algebra mehr, da das Produkt zweier seiner Elemente aus $\mathbb{L}_1$ herausführt.

Unser physikalischer Ausgangspunkt sind die uns vertrauten Lie-Algebren und *Abbildung 2* sieht einer Lie-Algebra schon sehr ähnlich. Um aus dieser Algebra eine Lie-Algebra zu konstruieren, müssen wir für das Produkt noch Antisymmetrie und die Jacobi-Identität fordern.

Damit ist das Produkt eindeutig als Kommutator identifiziert. Dies wollen wir nun allgemein tun:

2.2 $\mathbb{Z}_n$ graduierte Lie-Algebra

Wir fordern daher $\forall x_k \in \mathbb{L}_k$ mit $\mathbb{L} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{L}_k$:

- **Graduierung:**

$$x_j \circ x_k \in \mathbb{L}_{j+k \mod n}$$

- **Supersymmetrie:**

$$x_j \circ x_k = -(-)^{k \cdot j}\, x_k \circ x_j$$

- **Super-Jacobi-Identität:**

$$x_j \circ (x_k \circ x_l)(-)^{j \cdot l} + x_k \circ (x_l \circ x_j)(-)^{k \cdot j}$$
$$+ x_l \circ (x_j \circ x_k)(-)^{l \cdot k} = 0$$

Hier steht $(-)$ für -1 und k, j, l beziehen sich direkt auf den Unterraumindex der Algebra. Kurzum haben wir damit für

- **n=1** eine gewöhnliche Lie-Algebra mit

Graduierung	$\doteq$	Produkt $[A, B]$
SUSY	$\doteq$	Antisymmetrie
Super-Jacobi	$\doteq$	Jacobi-Identität

- **n=2** die 1. nicht-trivial grad. Lie-Algebra Für die verschiedenen Produkte von Elementen dieser Algebra gilt nun die Identifikation

$\mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0 \to \mathbb{L}_0$	$\doteq$	Kommutator $[,]$
$\mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_1$	$\doteq$	Kommutator $[,]$
$\mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_0$	$\doteq$	Antikommutator $\{,\}$

Wir haben damit auf einfache Art eine Algebra, die Kommutator- und Antikommutatorrelationen genügt, zur Hand, mit deren Hilfe wir das Coleman-Mandula-Theorem umgehen können.
Schreiben wir b für die Elemente von $\mathbb{L}_0$ und f für Elemente aus $\mathbb{L}_1$, so stellt sich die Situation wie in *Abb. 4* dar.
Diese Elemente müssen den 4 möglichen Super-Jacobi-Identitäten genügen. Diejenige mit drei b-Elementen entspricht der wohlbekannten Jacobi-Identität, wie auch die für zwei b- und ein f-Element. Für ein b- und zwei f-Elemente gilt

$$[b, \{f_1, f_2\}] + \{f_1, [f_2, b]\} -$$
$$- \{f_2, [b, f_1]\} = 0$$

für drei f-Elemente hingegen

$$\{f_1, \{f_2, f_3\}\} + \{f_2, \{f_3, f_1\}\} +$$
$$\{f_3, \{f_1, f_2\}\} = 0$$

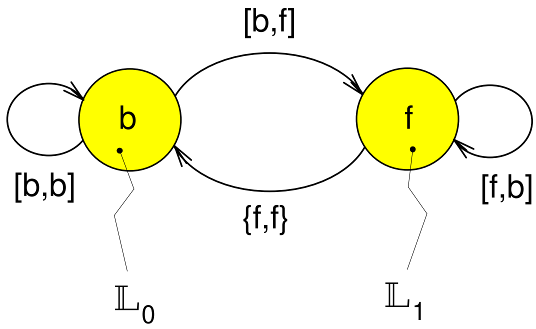


Abbildung 4: $\mathbb{Z}_2$ graduierte Lie-Algebra

Auf diese Weise lässt sich jede uns bis hierhin bekannte Lie-Algebra durch $\mathbb{Z}_2$-Graduierung erweitern. So findet sich in [1] die explizite Durchführung einer $\mathbb{Z}_2$-Graduierung der $SO(3)$-Lie-Algebra, also der Drehgruppe. Wir sind an der Graduierung der Poincaré-Algebra interessiert, da durch sie alle Elementarteilchen klassifiziert sind. Eine explizite Bestimmung findet sich wiederum in [1]. Ich möchte hier wie schon gesagt nur eine Skizze angeben.

2.3 Graduierung der Poincaré-Algebra

Unser Ausgangspunkt ist $\mathbb{L}_0$ als Poincaré-Algebra mit den Generatoren P^μ und $M^{\mu\nu}$. Uns fehlen noch die Generatoren, die den Unterraum $\mathbb{L}_1$ aufspannen. Wir definieren dazu die **SUSY-Generatoren**

$$Q_a$$

für $a = 1, \ldots, 4N$ und machen sofort die Einschränkung $N \equiv 1$ auf den einfachsten Fall. Für $N \geq 2$ spricht man von erweiterter Supersymmetrie. Außerdem sollen diese Generatoren folgenden Kommutatoren genügen:

$$[P^\mu, Q_a] = 0 \quad \text{und} \quad [M^{\mu\nu}, Q_a] = -\Sigma^{\mu\nu}_{ab} Q_b$$

Sie vertauschen also mit dem Viererimpuls, womit Translationsinvarianz für das Gesamtsystem gewährleistet bleibt. Außerdem transformieren sie sich unter homogenen Lorentz-Transformationen wie Spinoren, da darstellungsfrei

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$$

gilt. Durch letzteres Transformationsverhalten sichern wir uns eine physikalische Interpretation der Q_a als Spinoren, da die Supersymmetrie, wie wir in vorangehenden Vorträgen gehört haben, gerade eine Beziehung zwischen Fermionen und Bosonen ist und Bosonen bekanntlich Kommutatoren genügen. Es bleibt die Frage nach dem Antikommutator zwischen zwei SUSY-Generatoren. Wir wissen, dass das Ergebnis im bosonischen Sektor $\mathbb{L}_0$ liegen muss. Der allgemeinste Ansatz ist somit

$$\{Q_a, Q_b\} = h^\mu_{ab} P_\mu + k^{\mu\nu}_{ab} M_{\mu\nu}$$

Die Entwicklungskoeffizienten h^μ_{ab} bilden eine in (ab) symmetrische (4×4)-Matrix pro Lorentz-Index. Die Größe $k^{\mu\nu}_{ab}$ ist ebenfalls in (ab) symmetrisch und in $(\mu\nu)$ antisymmetrisch zu wählen, da $M_{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist. Beide sind darstellungsfrei wählbar mit Hilfe der Ladungskonjugation C:

$$h^\mu = a \cdot \gamma^\mu C \qquad k^{\mu\nu} = b \cdot \Sigma^{\mu\nu} C$$

mit reellen Konstanten $a, b \in \mathbb{R}$. Die Konstante b folgt aus der Super-Jacobi-Identität

$$0 = [P_\mu, \{Q_a, Q_b\}] + \\ + \{Q_a, [Q_b, P_\mu]\} - \{Q_b, [P_\mu, Q_a]\}$$

in der nur der erste Term beiträgt. Aus diesem folgt, dass b identisch verschwindet. Die Konstante a können wir uns sicher als einen Skalierungsfaktor des Viererimpulses vorstellen und ist daher frei wählbar. Wir setzen $a = -2$ und der Antikommutator lautet somit

$$\{Q_a, Q_b\} = -2(\gamma^\mu C)_{ab} P_\mu$$

Da die Q_a gerade 4 Freiheitsgrade im fermionischen Sektor darstellen, sollten wir sie aus physikalischer Sicht mit einem **Majorana-Spinor** identifizieren, der ebenfalls 4 Freiheitsgrade besitzt. In diesem Fall gilt bekanntlich

$$Q = C\overline{Q} \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{Q} = Q^T C$$

und für den Antikommutator folgt in dieser Schreibweise

$$\{Q_a, \overline{Q}_b\} = 2\gamma^\mu_{ab} P_\mu$$

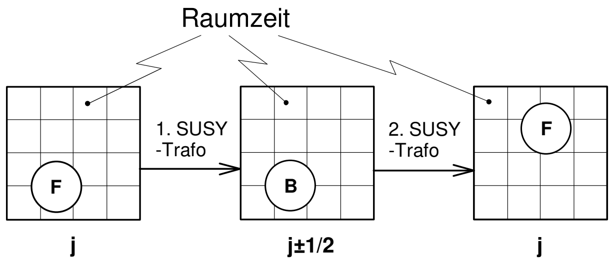
Damit haben wir schließlich die gesamte

2.4 Poincaré-Superalgebra

gefunden. Sie lautet

$$\begin{array}{lcl}
[P^\mu, P^\nu] & = & 0 \\
[P^\mu, M^{\rho\sigma}] & = & \mathrm{i}\; g^{\mu[\rho} P^{\sigma]} \\
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] & = & \mathrm{i}\left(g^{\mu[\rho} M^{\sigma]\nu} + g^{\nu[\rho} M^{\sigma]\mu}\right) \\
[P^\mu, Q_a] & = & 0 \\
[M^{\mu\nu}, Q_a] & = & -\Sigma^{\mu\nu}_{ab} Q_b \\
\{Q_a, \overline{Q}_b\} & = & 2\gamma^\mu_{ab} P_\mu
\end{array}$$

Die Indexklammern $[\rho \quad \sigma]$ sollen den antisymmetrischen Ausdruck der darin enthaltenen Indizes darstellen wie es in der Literatur üblich ist, jedoch ohne einen zusätzlichen Faktor.
Die kleinstmögliche Poincaré-Superalgebra besitzt somit 14 Generatoren. Wir erkennen, dass die Hintereinanderausführung zweier Susytransformationen eine Raumzeit-Translation ergeben. Dies ist nochmals in folgendem Bild ausgedrückt:



Dabei wird ein Fermion in ein Boson und wieder in ein Fermion verwandelt. Da Poincaré-Invarianz zur allgemeinen Relativitätstheorie führt, ist daher ein Zusammenhang zwischen Supersymmetrie und Gravitation zu erwarten. Stellen wir die SUSY-Generatoren in Weyl-Darstellung

$$Q_a = \begin{pmatrix} Q_A \\ \overline{Q}^{\dot{A}} \end{pmatrix}$$

dar mit $A, \dot{A} = \{1, 2\}$ und den zweikomponentigen Größen $Q, \overline{Q}$, so lautet die Poincaré-Superalgebra mit $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \vec{\sigma})$, $\widetilde{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\vec{\sigma})$ und $\Sigma^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \widetilde{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix}$ in indexfreier Notation

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
[Q, P^\mu] & = & 0 & [\overline{Q}, P^\mu] & = & 0 \\
[Q, M^{\mu\nu}] & = & \sigma^{\mu\nu} Q & [\overline{Q}, M^{\mu\nu}] & = & \widetilde{\sigma}^{\mu\nu} \overline{Q} \\
\{Q, \overline{Q}\} & = & 2\sigma^\mu P_\mu & \{\overline{Q}, Q\} & = & 2\widetilde{\sigma}^\mu P_\mu \\
\{Q, Q\} & = & 0 & \{\overline{Q}, \overline{Q}\} & = & 0
\end{array}$$

Für den Hamilton-Operator eines solchen Systems findet man

$$H := P^0 = \frac{1}{4}\left(Q_1 + \overline{Q}_{\dot{1}}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(Q_2 + \overline{Q}_{\dot{2}}\right)^2$$

d.h. das Energiespektrum ist positiv:

$$E \geq 0$$

da wegen $(Q_A)^\dagger = \overline{Q}_{\dot{A}}$ deren Summe $Q_A + \overline{Q}_{\dot{A}}$ hermitesch ist, die zugehörigen Eigenwerte reell und deren Quadrate positiv sind. Außerdem besitzt eine solche supersymmetrische Theorie die gleiche Anzahl von bosonischen und fermionischen Freiheitsgraden

$$n_B = n_F$$

Dies ist die Boson-Fermion-Regel.

3 Supersymmetrie

Wie in der Poincaré-Algebra suchen wir nun die SUSY-Teilchen als irreduzible Darstellungen der SUSY-Algebra.

3.1 SUSY-Teilchen

P^2 ist wie zuvor Casimir-Operator, W^2 hingegen nicht mehr. Der Grund dafür liegt offenbar darin, dass wir die Kommutatoralgebra um Antikommutatoren, also fermionische Größen, ergänzt haben. Um nun wieder einen zweiten Casimir-Operator zu erhalten, liegt es nahe, dies zu berücksichtigen. Dazu definieren wir den **Superspin**:

$$Y^\mu = W^\mu - \frac{1}{4}X^\mu$$

mit

$$X^\mu = Q\sigma^\mu\overline{Q}$$

der einer verallgemeinerten Drehimpulsalgebra

$$[Y_\mu, Y_\nu] = \mathrm{i}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\rho Y^\sigma$$

genügt. Im Ruhsystem mit $(P^\mu) = (m, 0, 0, 0)$ reduziert sich diese auf

$$\left[Y^i, Y^j\right] = \mathrm{i}\,m\,\varepsilon^{ijk}Y^k$$

und wir erkennen nach Umordnung für $m \neq 0$ tatsächlich die Drehimpulsalgebra $SO(3)$:

$$\left[\frac{Y^i}{m}, \frac{Y^j}{m}\right] = \mathrm{i}\,\varepsilon^{ijk}\frac{Y^k}{m}$$

Bekanntlich lassen sich die Werte dieser Drehimpulsalgebra klassifizieren nach $y = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ und der z-Komponente y^3 von $(\vec{Y}/m)$.
Unser neuer Casimir-Operator lautet nun

$$C^2 = C^{\mu\nu}C_{\mu\nu}$$

mit der Definition

$$C^{\mu\nu} = Y^\mu P^\nu - Y^\nu P^\mu$$

Für die massive Darstellung finden wir, dass alle Zustände durch

$$\begin{array}{rcll} P^\mu\,|Z\rangle & = & p^\mu & |Z\rangle \\ \vec{Y}^2\,|Z\rangle & = & m^2\,y(y+1) & |Z\rangle \\ Y^3\,|Z\rangle & = & m\,y^3 & |Z\rangle \\ W^3\,|Z\rangle & = & m\,s^3 & |Z\rangle \end{array}$$

festgelegt sind, da zusätzlich noch W^3 (Eigenwert s^3) mit allen Operatoren vertauscht. Die Zustände sind damit festgelegt durch folgenden vollständigen Variablensatz:

$$|Z\rangle := \left|p^\mu, y, y^3, s^3\right\rangle$$

Für eine explizite massive Darstellung benötigen wir noch **Vernichter**:

$$f_A^- := \frac{1}{\sqrt{2m}}\,Q_A$$

und **Erzeuger**:

$$f_A^+ := \frac{1}{\sqrt{2m}}\,\overline{Q}_{\dot{A}}$$

Ausgehend vom **Clifford-Vakuum**

$$f_A^-\,|\Omega\rangle = 0$$

können vier Zustände erzeugt werden, da es sich bei $f_A^\pm$ um fermionische Größen handelt, verschwinden höhere Potenzen. Sie lauten

$$|\Omega\rangle \qquad f_1^+\,|\Omega\rangle \qquad f_2^+\,|\Omega\rangle \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}f_1^+f_2^+\,|\Omega\rangle$$

Dies gibt am besten *Abbildung 5* wieder. Darin erkennen wir die Wirkung von f_1^+ und f_2^+. Ersterer erhöht und Letzterer verkleinert die z-Komponente des Spins um 1/2. Die Anwendung beider Operatoren auf das Clifford-Vakuum liefert zwar keine Veränderung der Eigenwerte, führt aber zu einem anderen Zustand, der vom Clifford-Vakuum selbst durch

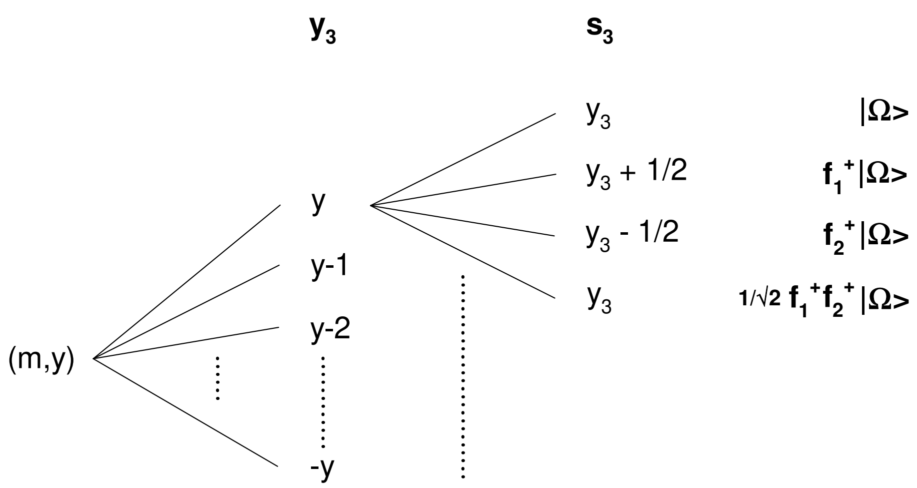


Abbildung 5: Das Supermultiplett

Anwendung der Vernichter unterschieden werden kann. Pro Supermultiplett, charakterisiert durch (m, y), gibt es $4(2y + 1)$ Zustände. Die Zahl der Elementarteilchen hat sich somit verdoppelt! Man spricht bei den neuen Teilchen von den SUSY-Partner der bekannten Elementarteilchen.
Das einfachste Supermultiplett liegt für den Fall $y_3 = 0$ vor. Man nennt es **Chirales-Supermultiplett**. In ihm ist das Clifford-Vakuum ein bosonischer Zustand, denn es ist

$$y = 0$$

Wie wir in *Abbildung 6* erkennen können, besitzt es zwei fermionische Freiheitsgrade, die ein Spin 1/2 Teilchen bilden, sowie ein skalares und pseudoskalares Teilchen. Es beschreibt daher Materiefelder wie Quarks und Leptonen mit folgender Zuordnung der SUSY-Partner

Fermi (Spin $\frac{1}{2}$)	Bose (Spin 0)
Quarks	Squarks
Leptonen	Sleptonen
Higgsinos	Higgs

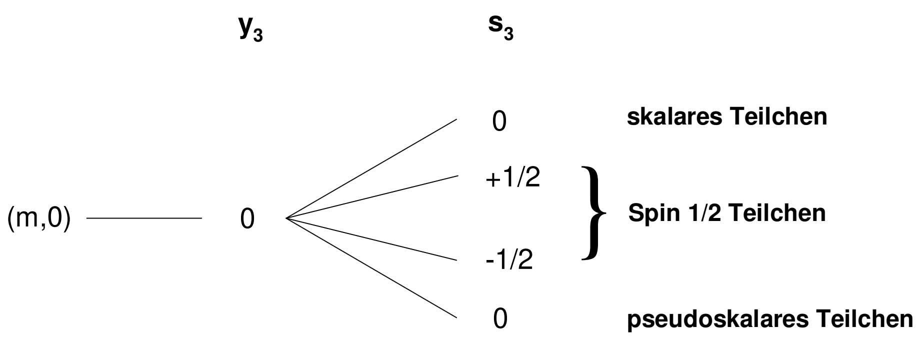


Abbildung 6: Das Chirale-Supermultiplett

Literatur

[1] **H. Kalka, G. Soff :** `Supersymmetrie`
Verlag H.G. Teubner , Stuttgart 1997

[2] **J.M. Figueroa-O'Farrill:** `BUSSTEPP Lectures on Supersymmetry`
Skript vom 21. September 2001 zu den 30./31. British Universities Summer Schools in Theoretical Elementary Particle Physics
arXiv: hep-th/0109172

[3] **A. Wipf:** `Introduction to Supersymmetry`
Skript, Friedrich-Schiller-Universität Jena,
http://hpcs3.tpi.uni-jena.de/˜wipf/lectures/susy/susy0.ps.gz bis *.../susy12.ps.gz*

[4] **I. Sachs:** `Lectures on Supersymmetry`
Skript, November 1997
DIAS-STP/97-27

[5] **A. Bilal:** `Introduction to Supersymmetry`
Skript vom 10. Januar 2001
arXiv: hep-th/0101055

[6] **D. Bailin, A. Love:** `Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory`
Graduate Student Series In Physics, IOP Publishing, Bristol, 1994

[7] **M. Kaku:** `Quantum Field Theory - An Introduction`

[8] **R.U. Sexl, H.K. Urbantke:** `Relativität, Gruppen, Teilchen`
Springer-Verlag, Wien, 1988

[9] **Gates, Grisaru, Roček, Siegel:** `SUPERSPACE or 1001 lessons in supersymmetry`
Front.Phys. 58 (1983) 1-548 , seit 2001 als Onlineversion
arXiv: hep-th/0108200

[10] **W. Siegel:** `Fields`
"The first free comprehensive textbook on quantum (and classical) field theory."
arXiv: hep-th/9912205

[•] Gut 80 % meines Vortrages gehen auf [1] zurück. Weitere Einblicke, ca. 15 %, habe ich mir aus [2] bis [5] verschafft. Die verbleibende Literatur habe ich nur zum Durchstöbern und Nachschlagen genutzt, teils mit, teils ohne Erfolg.