4. Seminarvortrag am 28.5.2003
Sonja Overesch

In diesem Abschnitt geht es darum, daß man zwei und mehrere verschiedene Quantensysteme über die Supersymmetrie verknüpfen kann. Kennt man eines dieser Systeme, so kann man die anderen vollständig berechnen.

1 Kopplung der Supersymmetriepartner

Der supersymmetrische Hamiltonoperator H_s hat die Form einer diagonalen 2×2 - Matrix:

$$H_s = \frac{1}{2}\left[-\frac{\hbar}{m}\frac{d^2}{dx^2} + W^2\right] - \frac{\hbar}{\sqrt{m}}\frac{dW}{dx}\frac{\sigma^3}{2} =: \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

H_1 und H_2 sind Hamiltonoperatoren zweier verschiedener Systeme, welche über die Supersymmetrie gekoppelt sind, sie werden Supersymmetriepartner genannt:

$$H_1\psi_n^{(1)} = E_n^{(1)}\psi_n^{(1)} \qquad\qquad H_2\psi_n^{(2)} = E_n^{(2)}\psi_n^{(2)} \tag{2}$$

Es gelten folgende weitere wichtige Zusammenhänge:

$$H_s = \begin{pmatrix} B^+B^- & 0 \\ 0 & B^-B^+ \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Also

$$H_1 = B^+B^- \qquad\qquad H_2 = B^-B^+, \tag{4}$$

wobei

$$B^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W(q) \mp \frac{\imath p}{\sqrt{m}}\right) \tag{5}$$

mit den Orts- und Impulsoperatoren q und p. Auch die Partnerpotentiale lassen sich über das Superpotential darstellen:

$$V_1(x) = \frac{1}{2}\left(W^2 - \frac{\hbar}{\sqrt{m}}W'\right) \qquad V_2(x) = \frac{1}{2}\left(W^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{m}}W'\right) \tag{6}$$

1.1 Gebundene Zustände

Bei exakter Supersymmetrie (es sei im folgenden immer das System 1 dasjenige, das den Grundzustand bei $E = 0$ hat) und gebundenen Zuständen hat die Kopplung zwischen den Eigenzuständen und Eigenwerten folgende Gestalt:

$$E_1^{(0)} = 0 \qquad E_n^{(2)} = E_{n+1}^{(1)} \tag{7}$$

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(1)}}} B^- \psi_{n+1}^{(1)} \qquad \psi_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} B^+ \psi_n^{(2)} \tag{8}$$

Die Energiewerte sind also aufgrund der exakten Supersymmetrie verschoben. Die unteren Indizes entsprechen der Knotenanzahl der Wellenfunktion, deswegen kann man sich B^+ und B^- als Erzeuge- bzw. Vernichteoperatoren von Knoten vorstellen.

Diese Vorstellung gilt nicht mehr bei gebrochener Supersymmetrie. In diesem Fall hat keines der Systeme den Grundzustand bei $E = 0$, so daß die Energien identisch sind, es gilt folgende Umrechnung:

$$E_n^{(2)} = E_n^{(1)} \tag{9}$$

$$\psi_n^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(1)}}} B^- \psi_n^{(1)} \qquad \psi_n^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(2)}}} B^+ \psi_n^{(2)} \tag{10}$$

Hat man das erste System gegeben,so kann man über dessen Grundzustandswellenfunktion $\psi_0^{(1)} \equiv \psi_0$ auf das Superpotential schließen:

$$W = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{\psi_0'}{\psi_0} = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \ln \psi_0. \tag{11}$$

1.2 Bestimmung des SUSY-Partners zu einem beliebigen Hamiltonoperator H

Mit den oben angestellten Überlegungen kann man zu jedem beliebigen Hamiltonoperator H einen Supersymmetriepartner konstruieren. Hierbei beschränken wir uns auf den Fall exakter Supersymmetrie. Zusammengefaßt erhält man:

$$\boxed{\begin{array}{c}
H \text{ beliebiger Hamiltonoperator mit } E_0 \geq 0 \\
\Downarrow \\
H_1 := \text{H - } E_0 \\
\Downarrow \\
\text{Superpotential } W = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{\psi_0^`}{\psi_0} = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \ln \psi_0 \\
\Downarrow \\
\text{Partnerpotential } V_2 = \frac{1}{2}\left(W^2 + \frac{\hbar}{\sqrt{m}} W^`\right), \qquad H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V_2 \\
\Downarrow \\
\text{Eigenfunktionen zu } H_2
\end{array}}$$

1.3 Streuzustände

Im Fall der Streuzustände hat man kontinuierliche Energien. Fordert man

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{d}{dx} W(x) = 0,$

so liegen Streuzustände genau dann vor,wenn gilt

$W_+ := \lim_{x\to\infty} W(x) < \infty$ oder $W_- := \lim_{x\to-\infty} W(x) < \infty.$

Die Reflexionskoeffizienten R_1 und R_2 und die Transmissionskoeffizienten T_1 und T_2 der Partnersysteme sind ebenfalls gekoppelt:

$$R_1 = \frac{W_- + \imath\sqrt{2E - W_-^2}}{W_- - \imath\sqrt{2E - W_-^2}} R_2 \tag{12}$$

$$T_1 = \frac{W_+ - \imath\sqrt{2E - W_+^2}}{W_- - \imath\sqrt{2E - W_-^2}} T_2. \tag{13}$$

Entscheidend ist, daß die Reflexions- und Transmissionswahrscheinlichkeiten beider Systeme identisch sind:

$$| R_1 |^2 = | R_2 |^2 \tag{14}$$

$$| T_1 |^2 = | T_2 |^2 \tag{15}$$

Ist insbesondere eines der beiden Potentiale konstant, also reflexionslos, so kann man sofort schließen, daß das andere Potential ebenfalls reflexionslos ist.

2 Supersymmetrieketten

2.1 Konstruktion

Bislang sind wir vom 1. System ausgegangen und haben dazu den Supersymmetriepartner konstruiert. Nimmt man das 2. System als neues Ausgangssystem, so kann man dazu einen weiteren Supersymmetriepartner konstruieren, indem man das gleiche Verfahren auf H_2 anwendet. Setzt man dieses Verfahren induktiv fort, so gelangt man zu den sogenannten Supersymmetrieketten.
Der k-te Schritt (bei exakter Supersymmetrie) sieht dabei folgendermaßen aus:

Energien

$$E_n^{(k)} = E_{n+1}^{(k-1)} = ... = E_{n+k-1}^{(1)} \tag{16}$$

Potentiale

$$V_k = V_1 - \frac{\hbar^2}{m} \frac{d^2}{dx^2} \ln (\psi_0^{(1)} \cdots \psi_0^{(k-1)}) \tag{17}$$

Hamiltonoperatoren

$$H_k = B_k^+ B_k^- + E_{k-1}^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_k \tag{18}$$

Superpotentiale

$$W_k = -\frac{\hbar}{\sqrt{m}} \frac{d}{dx} \ln \psi_0^{(k)} \tag{19}$$

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$B_k^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_k \mp \frac{\hbar}{\sqrt{m}}\frac{d}{dx}\right) \tag{20}$$

Wellenfunktionen

$$\psi_n^{(k)} = N_n^{(k)}\, B_{k-1}^{-} \,\cdots\, B_1^{-}\psi_{n+k-1}^{(1)} \tag{21}$$

$$\psi_{n+k-1}^{(1)} = N_n^{(k)}\, B_1^{+} \,\cdots\, B_{k-1}^{+}\psi_n^{(k)} \tag{22}$$

Dabei ist $N_n^{(k)}$ eine geeignete Normierungskonstante. Wichtig ist, daß bei exakter Supersymmetrie jeder Hamiltonoperator innerhalb dieser Kette genau einen gebundenen Zustand weniger besitzt als der vorherige. Hat man insbesondere ein endliches Potential V_1, so liegen ab einem bestimmten Punkt keine gebundenen Zustände mehr vor.

2.2 Forminvarianz

2.2.1 Harmonischer Oszillator

Es gibt eine Klasse von Potentialen, die sich in der Supersymmetrie auszeichnen: die sogenannten forminvarianten Potentiale. Wir betrachten nur den Fall der Translation, das bedeutet, daß sich die Potentiale innerhalb der Kette nur um konstante Werte unterscheiden, sie sind also Kopien des 1. Potentials, die verschoben sind. Ein Beispiel ist der Harmonische Oszillator. Hier gilt:

$$V_k = \underbrace{\frac{m\omega^2}{2}x^2 - \frac{\hbar\omega}{2}}_{V_1} + (k-1)\hbar\omega$$

Die genaue Definition von Forminvarianz ist:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Zwei Potentiale } V_1 \text{ und } V_2 \text{ heißen forminvariant} \\ \Leftrightarrow V_2(x, a_1) = V_1(x, a_2) + R(a_1)\end{array}}$$

für geeignete Parameter a_1, a_2 und einen von x unabhängigen Restterm R(a_1). Bei Forminvarianz kann man das Eigenwertspektrum auf rein algebraischem Weg lösen, da sich in diesem Fall die Berechnung der Kette erheblich vereinfacht:

Potentiale

$$V_k(x, a_1) = V_1(x, a_k) + \sum_{i=1}^{k-1} R(a_i) \tag{23}$$

Energien

$$E_0^{(1)} = 0 \qquad E_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} R(a_k), \quad n \geq 1 \tag{24}$$

2.2.2 Rosen-Morse-Potential

Ein weiteres Beispiel ist das Rosen-Morse-Potential:

$$V_1 = \frac{1}{2}\left[A^2 - \frac{A\left(A + \frac{\hbar\alpha}{\sqrt{m}}\right)}{\cosh^2 \alpha x}\right] \tag{25}$$

mit dem Superpotential der Form

$$W = a_1 \frac{\hbar\alpha}{\sqrt{m}} \tanh \alpha x. \tag{26}$$

Das k-te Potential mit $k = a_1 + 1$ ist konstant, also reflexionslos, womit nach Abschnitt 1.3 bewiesen ist, daß Rosen-Morse-Potentiale reflexionslos sind. Außerdem kann man daraus ablesen, daß a_1 genau der Anzahl der gebundenen Zustände im ersten System entspricht.

2.2.3 Isotroper Oszillator

Ein drittes wichtiges Beispiel ist der isotrope Oszillator mit dem effektiven Potential

$$V_{eff} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}. \tag{27}$$

Durch Lösen der radialen Schröedingergleichung erhält man die Grundzustandswellenfunktion und kann damit die Supersymmetriekette berechnen. Betrachtet man die Potentiale V_1 und V_2 und berücksichtigt, daß die Forminvarianzbedingung gelten muß, so kann man folgende Identifikationen vornehmen:

$$a_1 = l \qquad a_2 = f(a_1) = l + 1 \qquad R(a_1) = 2\hbar\omega$$

Damit haben wir ohne Lösen der Eigenwertgleichungen das Spektrum vollständig bestimmt:

$$E_{nl} = \hbar\omega \left(2n + l + \frac{3}{2}\right) \tag{28}$$

3 Zusammenfassung

Ist ein System bekannt, so kann man mit Hilfe der Supersymmetrie sofort eine ganze Kette von Systemen beschreiben, umgekehrt kann man ein System über die Supersymmetriekette, die darauf aufbaut, charakterisieren. Hat man Streuzustände, nutzt man die Gleichheit von Reflexions- und Transmissionskwahrscheinlichkeiten aus. Wenn Forminvarianz vorliegt, kennt man außerdem ohne zu rechnen automatisch qualitativ alle Potentiale der Kette und kann die Berechnungen erheblich vereinfachen, indem man den algebraischen Zusammenhang ausnutzt.