Superzahlen

Fabian Kopei

18.06.2003

1 Definition der Superzahlen

Zur Beschreibung von Fermionen und Bosonen in einer klassischen Feldtheorie werden Zahlen benötigt, die „größer“ sind, als komplexe Zahlen. Insbesondere will man, dass gewisse Zahlen kommutieren und antikommutieren. Mit den Superzahlen kann man solche Modelle bilden.
Definition: Eine Grassmann-Algebra λ_N ist eine assoziative Algebra mit Einselement und N Generatoren ζ^a, $a = 1, \dots, N$, die antikommutieren:

$$\zeta^a \zeta^b = -\zeta^b \zeta^a (a, b = 1, \dots, N)$$

Haben wir unendlich viele Generatoren $\zeta^a, a \in \mathbb{N}$, so nennen wir die Elemente von λ_∞ Superzahlen.
Jede Superzahl lässt sich in der Form

$$z = c_0 + c_a \zeta^a + \frac{1}{2!} c_{ab} \zeta^a \zeta^b + \dots$$

($c_{a_1 \dots a_n}$ in den Indizes total antisymmetrisch) schreiben. Wir nennen $z_B := c_0$ den Körper, $z_S := z - z_B$ die Seele der Superzahl. Eine Superzahl z ist genau dann invertierbar, wenn der $z_B \neq 0$.
Ein wichtiger Unterschied zur Definition der Grassmann-Algebra in der Mathematik, die man zum Beispiel zur Definition von Differentialformen verwendet, ist, dass hier unendliche Summen zugelassen werden. Eine konstruktive (und damit existenzsichernde) Definition der Grassmann-Algebra kann man folgendermaßen erreichen: Sei $V := \mathbb{C}\{\zeta^1, \zeta^2, \dots\}$ der freie Vektorraum über der Basis $\{\zeta^1, \zeta^2, \dots\}$. Die Algebra der nichtkommutativen Reihen über $\{\zeta^1, \zeta^2, \dots\}$ ist dann definiert durch

$$\mathbb{C} << \zeta^1, \zeta^2, \cdots >> := \prod_{i=0}^{\infty} \bigotimes_{k=0}^{i} V$$

mit $\bigotimes_{k=0}^{0} V := \mathbb{C}$. Das Produkt von $v, w \in \mathbb{C} << \zeta^1, \zeta^2, \cdots >>$ ist definiert durch $v \cdot w := v \otimes w$. Dann ist $\lambda_\infty = \mathbb{C} << \zeta^1, \zeta^2, \cdots >> / (v^2)$, wobei (v^2) das von allen $v^2, v \in \mathbb{C} << \zeta^1, \zeta^2, \cdots >>$ erzeugte zweiseitige Ideal ist.
Für $N < \infty$ hat der Unterraum von λ_N, der aus Summen von Elementen der Form

$$c_{a_1 \dots a_k} \prod_{i=1}^{k} \zeta^{a_i}$$

besteht, die Dimension $\binom{N}{k}$. Wir erhalten damit für den gesamten λ_N die Dimension

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} = (1+1)^N = 2^N .$$

Wir zerlegen die Superzahl in einen geraden und in einen ungeraden Anteil:

$$q = c_0 + \frac{1}{2!} c_{ab} \zeta^a \zeta^b + \dots$$

$$\theta = c_a \zeta^a + \frac{1}{3!} c_{abc} \zeta^a \zeta^b \zeta^c + \dots$$

Die ungeraden Zahlen ($q = 0$) bezeichnet man als a-Zahlen oder Grassmann-Zahlen. Sie antikommutieren untereinander, insbesondere gilt $\theta^2 = 0$. Die geraden Superzahlen kommutieren mit allen Superzahlen, sie heißen auch c-Zahlen. Diese Unterteilung in ungerade und gerade Zahlen ist die physikalisch wichtigste Eigenschaft der Superzahlen. Die geraden bzw. ungeraden Superzahlen werden in physikalischen Modellen mit bosonischen bzw. fermionischen Zuständen in Beziehung gesetzt.
Wir definieren die komplexe Konjugation auf den Generatoren durch $(\zeta^a \dots \zeta^b)^*$ $=: \zeta^b \dots \zeta^a$ und setzen sie mit Hilfe der normalen Konjugation auf alle Superzahlen fort. Es gilt:

$$(z+w)^* = z^* + w^* \quad (zw)^* = w^* z^*$$

Mit Superzahlen will man nun ähnlich rechnen, wie mit komplexen Zahlen. Deshalb versucht man die für komplexe Zahlen bekannten Definition der linearen Algebra und der Analysis so auf Superzahlen zu erweitern, dass die charakteristischen Eigenschaften der jeweiligen Definition erhalten bleiben.

2 Lineare Algebra mit Superzahlen

Defintion: Ein Supervektorraum ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum S mit einer linearen Rechts- und Linksmultiplikation durch Superzahlen, die folgenden Axiomen genügt:

$$(\alpha X)\beta = \alpha(X\beta) \quad (X \in S, \alpha, \beta \in \lambda_\infty) \tag{1}$$

$$\alpha X = X\alpha \quad (X \in S, \alpha \; \mathbf{c}-\text{Zahl}) \tag{2}$$

Außerdem müssen zu jedem Supervektor X eindeutig bestimmte Supervektoren U und V existieren, $X = U + V$, $\alpha U = U\alpha$, $\alpha V = -V\alpha$ für alle $a-$Zahlen α. U heißt dabei gerader, V ungerader Anteil von X. Verschwindet der gerade bzw. der ungerade Anteil, heißt der Vektor c-Vektor bzw. a-Vektor. Zudem muss es noch eine komplexe Konjugation geben mit $X^{**} = X$, $(X+Y)^* = X^* + Y^*$ und $(\alpha X)^* = X^* \alpha^*$. Ein Vektor X heißt reell, wenn $X^* = X$.
Eine bezüglich der Linksmultiplikation linear unabhängige Erzeugendenmenge heißt Basis des Supervektorraums. Ein Supervektorraum muss keine Basis haben. So ist ein mit einer a-Zahl multiplizierter Supervektorraum wieder ein Supervektorraum, der aber keine Basis besitzt. Wenn er eine endliche Basis hat ist die Dimension aber eindeutig bestimmt. Besitzt ein Supervektorraum

eine Basis, so hat er auch eine Standardbasis, das heißt eine Basis, die nur aus reellen c- und rein imaginären a-Vektoren besteht. Deren Anzahl ist ebenfalls eindeutig bestimmt. In dieser Basis ist jeder reelle c-Vektor darstellbar als $(q^1, \ldots, q^m, \theta^1, \ldots, \theta^n)$, wobei die q^i reelle c-Superzahlen, die θ^i reelle a-Superzahlen sind.
Eine Supermatrix vom c-Typ ist eine Matrix, die c-Vektoren wieder auf c-Vektoren abbildet. Ist

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

so müssen hierfür die Einträge in A und D c-Superzahlen sein, in B und C dagegen a-Superzahlen. Wir definieren die Superspur dieser Matrix als

$$\mathrm{str} M = \mathrm{tr} A - \mathrm{tr} D.$$

Das Minuszeichen braucht man, damit die für die normale Spur bekannte Beziehung $\mathrm{str}(M_1 M_2) = \mathrm{str}(M_2 M_1)$ sich auch auf die Superspur überträgt. Die Superdeterminante einer c-Matrix ist definiert durch

$$\mathrm{sdet} M = \exp(\mathrm{str} \log M).$$

Über die Jordansche Normalform kann man zeigen, dass diese Formel auch für normale komplexe Matrizen gilt. Der Logarithmus ist dabei über die Reihe

$$\log(E + L) = L - \frac{L^2}{2} + \frac{L^3}{3} - \ldots,$$

wobei E die Einheitsmatrix ist, definiert. Auch mit dieser Definition überträgt sich wieder eine charakteristische Eigenschaft der Determinante auf die Superdeterminante: Die Superdeterminante ist multiplikativ:

$$\mathrm{sdet}(M_1 M_2) = \mathrm{sdet} M_1 \mathrm{sdet} M_2.$$

Man erhält die Formel

$$\mathrm{sdet} M = [\det A][\det(D - CA^{-1}B)]^{-1} = [\det D]^{-1}[\det(A - BD^{-1}C)]^{-1}$$

Die Supertransposition einer c-Matrix definieren wir durch

$$M^S = \begin{pmatrix} A^T & -C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}.$$

Es gilt: $(M_1 M_2)^S = M_2^S M_1^S$.

3 Analysis mit Superzahlen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion. Dann definieren wir die superanalytische Funktion F durch

$$F(z) = F(z_B + z_S) := f(z_B) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_B) z_S^n. \tag{3}$$

Die k-te Ableitung von F an der Stelle z wird definiert durch

$$F^{(k)}(z) := f^{(k)}(z_B) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n+k)}(z_B) z_S^n.$$

Für a-Zahlen θ gilt wegen $\theta^2 = 0$:

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\theta^n = f(0) + f'(0)\theta$$

Für $z = q + \theta$ gilt $F(q+\theta) = f(q) + f'(q)\theta$.
In Erweiterung der obigen Definition nennen wir deshalb jede Funktion der Form

$$f(q+\theta) = f_0(q) + f_1(q)\theta,$$

mit

$$f_i(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f_{a_1 \ldots a_n}(q) \zeta^{a_n} \cdots \zeta^{a_1},$$

wobei $f_{a_1 \ldots a_n}$ nach (3) superanalytisch ist, superanalytisch.
Allgemeiner betrachtet man die geraden und ungeraden dynamischen Variablen $(q^1(t), \ldots, q^n(t), \theta^1(t), \ldots, \theta^m(t))$ im Superraum $\mathbb{R}^{n|m}$ der reellen Vektoren in einem Superraum mit n reellen c-Basisvektoren und m rein imaginären a-Basisvektoren:

$$f(q^1, \ldots, q^n, \theta^1, \ldots, \theta^m) = \sum f_{a_1 \ldots a_k}(q^1, \ldots, q^n) \theta^{a_1} \cdots \theta^{a_k} \tag{4}$$

Auch hier ist die Reihe wieder endlich, da jedes a_i nur 0 oder 1 sein kann. So kann man zum Beispiel die Funktion $\sin(q^1+\theta^1)\cos(q^2+\theta^2)$ darstellen durch

$$\begin{aligned} \sin(q^1+\theta^1)\cos(q^2+\theta^2) &= \sin(q^1)\cos(q^2) + \cos(q^1)\cos(q^2)\theta^1 \\ &\quad - \sin(q^1)\sin(q^2)\theta^2 - \cos(q^1)\sin(q^2)\theta^1\theta^2. \end{aligned}$$

Während man für kommutierende Superzahlen $\frac{\partial}{\partial q^i}$ durch die entsprechende partielle Ableitung der reellen Funktion definiert, muss man dies für antikommutierende Superzahlen neu definieren. Insbesondere will man Gleichungen wie $\delta F = \delta\theta^\alpha \frac{\partial F}{\partial \theta^\alpha}$. Da die $\delta\theta^\alpha$ nicht kommutieren, braucht man zwei verschiedene Ableitungen:

$$\delta F = \delta\theta^\alpha \frac{\partial F}{\partial^{\mathrm{L}} \theta^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial^{\mathrm{R}} \theta^\alpha} \delta\theta^\alpha$$

Dies erreicht man durch die Definitionen:

$$\frac{\partial^{\mathrm{L}}}{\partial \theta^\alpha} 1 = \frac{\partial^{\mathrm{R}}}{\partial \theta^\alpha} 1 = 0 \quad \frac{\partial^{\mathrm{L}}}{\partial \theta^\alpha} \theta^\beta = -\frac{\partial^{\mathrm{R}}}{\partial \theta^\alpha} \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta$$

Da die Funktionen durch (4) definiert ist, genügt diese Definition für lineare Terme, um beliegige Funktionen abzuleiten.
Die Integration im $\mathbb{R}_c$ ist über die Stammfunktion der reellen Funktion definiert. Für antikommutierende Zahlen muss man dagegen wie bei der Differentiation formale Definitionen machen:

$$\int d\theta = 0, \qquad \int \theta d\theta = 1$$

Für beliebige Funktion fordern wir die Linearität des Integrals. Bei der Integration über mehrere Variablen beginnt man mit dem größten Index. Insbesondere gibt es keine Integrationsgrenzen. Mit dieser Definition erhält man die Translationsinvarianz: Betrachten wir eine allgemeine Funktion $F(\theta) = a + b\theta$, so gilt

$$\begin{aligned} \int F(\theta+\eta)\, d\theta &= \int [a + b(\theta+\eta)]\, d\theta \\ &= b \\ &= \int F(\theta) \end{aligned}$$

Dadurch, dass ein Integral über eine Funktion, in der nicht alle Integrationsvariablen vorkommen, verschwindet, projeziert das Integral den letzten Koeffizienten aus der Reihenentwicklung heraus:

$$\int F(\theta)\, d\theta^n \cdots d\theta^1 = f_{12\ldots n}$$

Die Diracsche Deltadistribution wird charakterisiert durch die Beziehung

$$F(\theta)\delta(\theta - \tilde{\theta})\, d\theta = F(\tilde{\theta}).$$

Dies wird erfüllt durch den folgenden Ausdruck, der dann als Definition der Deltadistribution für a-Zahlen genommen werden kann:

$$\delta(\theta - \tilde{\theta}) = \theta - \tilde{\theta}$$

Literatur

[1] B. DeWitt: *Supermanifolds*, Cambridge 1984.

[2] K. Kalka, G. Soff: *Supersymmetrie*, Stuttgart, 1997.