**Seminarvortrag**

# Spinoren der Lorentzgruppe

Juli 2003

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Grundbegriffe

## 1.1 Tensoren und Spinoren

In der klassischen Physik sind die *Tensoren* die grundlegenden Größen. Es gibt sie in verschiedenen Stufen:

- Skalare: $m$
- Vektoren: $\boldsymbol{a}$
- Tensoren: $\hat{J}$
- Tensoren höherer Stufen

Mit diesen lassen sich physikalische Gesetze formulieren (Tensorgleichungen):

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \qquad \boldsymbol{L} = \hat{J}\boldsymbol{\omega}$$

In der Quantentheorie tauchen neue Objekte auf: *Spinoren.* Auch diese treten in verschiedenen Stufen auf. Die eigentlichen Spinoren sind die Spinoren 1. Stufe. Im Zusammenhang mit den Spinoren benötigen wir die sog. *Pauli-Matrizen.* Da diese im Vortrag immer wieder benötigt werden, sind sie hier noch einmal aufgelistet:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## 1.2 Lorentzgruppe

Die *Lorentztransformationen* sind gegeben durch:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

In der Darstellung durch die *Casimir-Operatoren* haben die Lorentztransformationen folgende Gestalt:

$$\Lambda = \exp\{-\mathrm{i}\,(\boldsymbol{\varphi} - \mathrm{i}\boldsymbol{\nu})\,\boldsymbol{T}_+\} \cdot \exp\{-\mathrm{i}\,(\boldsymbol{\varphi} - \mathrm{i}\boldsymbol{\nu})\,\boldsymbol{T}_-\}$$

Die *Vierer-Vektoren* treten in kovarianter und kontravarianter Schreibweise auf. Diese transformieren mit der Matrix $g_{\mu\nu}$:

$$x^\mu = (ct, \boldsymbol{x}) \qquad x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = (ct, -\boldsymbol{x})$$
$$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) = g^{\mu\nu}$$

# 2 Spinoren

## 2.1 Weyl-Spinoren

Als Darstellung wählen wir die einfachste *irreduzible Darstellung* der Lorentztransformationen. Aus den Spinoren werden später alle Spinoren der Quantenfeldtheorie gebildet.
Der sog. *Weyl-Spinor* ist wie folgt definiert:

$$\Psi'_{\mathrm{L}} = A_{\mathrm{L}}\Psi_{\mathrm{L}} \qquad \Psi'_{\mathrm{R}} = A_{\mathrm{R}}\Psi_{\mathrm{R}}$$

mit $A_{\mathrm{L}} = \Lambda^{(\frac{1}{2},0)} = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\boldsymbol{\varphi} - \mathrm{i}\boldsymbol{\nu}\right)\boldsymbol{\sigma}\right\}$
und $A_{\mathrm{R}} = \Lambda^{(0,\frac{1}{2})} = \exp\left\{-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\boldsymbol{\varphi} + \mathrm{i}\boldsymbol{\nu}\right)\boldsymbol{\sigma}\right\}$
Dabei ist jeweils ein Weyl-Spinor einer Fundamentaldarstellung zu geordnet. Aus den Weyl-Spinoren leiten wir zunächst *lorentz-invariante* Kombinationen her. Wie sich nachrechnen lässt (vgl. Vortrag), gibt es folgende Kombinationen:

$$\Phi^\dagger_{\mathrm{R}}\Psi_{\mathrm{L}} \qquad \Phi^\dagger_{\mathrm{L}}\Psi_{\mathrm{R}}$$

Als nächstes betrachten wir die Spinorkomponenten. Es gilt:

$$\begin{aligned}\Psi^\dagger_{\mathrm{R}}\Psi_{\mathrm{L}} \qquad &= \mathrm{i}\Psi^{\mathrm{T}}_{\mathrm{L}}\sigma^2\Psi_{\mathrm{L}} = (\psi_1, \psi_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \\ &= \psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1\end{aligned}$$

Je nach dem welche Zahlen man wählt, ergeben sich unterschiedliche Werte für die Invarianten:

- $c$-Zahlen: $\Psi^\dagger_{\mathrm{R}}\Psi_{\mathrm{L}} = 0$
- $a$-Zahlen: $\Psi^\dagger_{\mathrm{R}}\Psi_{\mathrm{L}} = 2\psi_1\psi_2$

Um ein nicht-triviales Ergebnis zu erhalten, sind die Spinorkomponenten nicht $c$-Zahlen, sondern $a$-Zahlen.
Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sind die $(2\times 2)$-Matrizen mit det=1. Es gibt also 6 freie Parameter. Für die Fundamentaldarstellung gilt:

$$\det A_{\mathrm{L,R}} = \mathrm{e}^0 = 1$$

da: $\det(\exp A) = \exp(\mathrm{Tr}A))$ und $\mathrm{Tr}\sigma^i = 0$.
Also existiert eine Abbildung von der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ auf die Lorentzgruppe.
Die Zuordnung „Vierervektor $\rightarrow$ $(2\times 2)$-Matrix“ hat folgende Gestalt:

$$x^\mu \rightarrow X = x^\mu\sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + \mathrm{i}x^2 \\ -x^1 - \mathrm{i}x^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}$$

bzw. die Rücktransformation

$$X \rightarrow x^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}X\tilde{\sigma}^\mu$$

Die Matrizen $X$ werden mit der Fundamentaldarstellung transformiert:

$$X \to X' = A_{\mathrm{L}} X A_{\mathrm{L}}^{\dagger}$$

Analog gilt dies auch für ein $\tilde{X}$ mit der rechten Fundamentaldarstellung.
Für die Lorentz-Transformationen gilt hiermit:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \tilde{\sigma}^{\mu} A_{\mathrm{L}} \sigma_{\nu} A_{\mathrm{L}}^{\dagger}$$

Es lassen sich weitere *lorentz-invariante* Kombinationen von Weyl-Spinoren bilden (Herleitung im Vortrag):

$$\Phi_{\mathrm{L}}^{\dagger} \tilde{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \Psi_{\mathrm{L}} \qquad \Phi_{\mathrm{R}}^{\dagger} \sigma^{\mu} \partial_{\mu} \Psi_{\mathrm{R}}$$

Insgesamt haben wir also vier invariante Kombinationen von Weyl-Spinoren. Diese benötigen wir zum Aufbau einer *Lagrange-Dichte* für Spinorfelder.

## 2.2 Dirac-Spinoren

Weyl-Spinoren gehen bei Spiegelung ineinander über, d.h. ein linkshändiger Spinor wird zu einem rechtshändigen und umgekehrt:

$$\Psi_{\mathrm{L}} \to \Psi_{\mathrm{R}} \qquad \Psi_{\mathrm{R}} \to \Psi_{\mathrm{L}}$$

Um dies zu verhindern, bilden wir aus zwei Weyl-Spinoren einen allgemeineren Spinor, der ein Paritätseigenzustand ist. Dies erreicht man durch die Bildung der direkten Summe $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Der sog. *Dirac-Spinor* ist wie folgt definiert:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{\mathrm{L}} \\ \Phi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$$

In dieser Form nennt man die Darstellung als *chirale Darstellung*. Unter Spiegelungen mit $P = \gamma_0$ transformiert der Dirac-Spinor wie folgt:

$$\begin{pmatrix} \Psi_{\mathrm{L}} \\ \Phi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Phi_{\mathrm{R}} \\ \Psi_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}$$

Die Projektionsoperatoren sind gegeben durch:

$$P_{\mathrm{L}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma_5)$$
$$P_{\mathrm{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma_5)$$

Die allgemeinen Lorentz-Transformationen $S = \Lambda^{(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})}$ lassen sich aus den Transformationen der linken und rechten Fundamentaldarstellungen zusammen setzen:

$$S = \begin{pmatrix} A_{\mathrm{L}} & 0 \\ 0 & A_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$$

Der *konjugierte Dirac-Spinor* wird definiert durch:

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0 = (\Phi_{\mathrm{R}}^\dagger, \Psi_{\mathrm{L}}^\dagger)$$

Mit dieser Definition gehen durch Summenbildung die vier lorentz-invarianten Kombinationen in die folgenden zwei Kombinationen über:

$$\begin{aligned} \Psi\bar{\Psi} &= \Phi_{\mathrm{R}}^\dagger \Psi_{\mathrm{L}} + \Psi_{\mathrm{L}}^\dagger \Phi_{\mathrm{R}} \\ \bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi &= \Phi_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \Phi_{\mathrm{R}} + \Psi_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \Psi_{\mathrm{L}} \end{aligned}$$

Die benutzten $\gamma$-Matrizen sind die gewöhnlichen aus der speziellen Relativitätstheorie. Sie lassen sich aber auch durch die obige Gleichung definieren, und haben folgende Form:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \tilde{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Die Matrizen haben u.a. die Eigenschaften:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbf{1}$$

Die $\gamma$-Matrizen bilden also eine *Clifford-Algebra*. Diese erzeugen damit Generatoren der 4-dim. Spinordarstellung:

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

## 2.3 Majorana-Spinoren und Ladungskonjugation

Der *Majorana-Spinor* ist ein spezieller Dirac-Spinor. Für ihn soll gelten:

$$\Psi_{\mathrm{M}} = \Psi_{\mathrm{M}}^{\mathrm{C}}$$

Dabei ist das C die *Ladungskonjugation*. Diese ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} \Psi_{\mathrm{L}} \\ \Phi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \Phi_{\mathrm{L}} \\ \Psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix} = \Psi^{\mathrm{C}}$$

und kann durch folgende Matrix $C$ beschrieben werden:

$$C = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sigma^2 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma^2 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^0$$

Die Eigenschaften dieser Matrix sind u.a.:

$$C = -C^{-1} = -C^\dagger = -C^{\mathrm{T}} = C^*$$

Der Majorana-Spinor hat folgende Gestalt, um die obigen Bedingungen zu erfüllen:

$$\Psi_{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} \Psi_{\mathrm{L}} \\ \Psi_{\mathrm{R}} \end{pmatrix}$$

Der Majorana-Spinor ist z.B. dazu geeignet, ungeladene fermionische Teilchen zu beschreiben.
Für den allgemeinen Dirac-Spinoren gilt

$$\Psi = \Psi^{\mathrm{CC}},$$

d.h. zweifache Ladungskonjugation ergibt wieder den ursprünglichen Spinor.

# 3 Spinorkalkül

Als Grundlage für die folgenden Vorträge des Seminars wird zunächst eine neue Notation eingeführt. Die sog. *Indexnotation* (gepunktete Schreibweise) stellt die Weyl-Spinoren so dar:

$$\Psi_\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \qquad \Psi_\mathrm{R}^\dagger = (\psi^1, \psi^2)$$
$$\Psi_\mathrm{R} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{\dot{1}} \\ \bar{\psi}^{\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad \Psi_\mathrm{L}^\dagger = (\bar{\psi}_{\dot{1}}, \bar{\psi}_{\dot{2}})$$

Es gilt die Summenkonvention:

$$\Psi_\mathrm{R}^\dagger \Psi_\mathrm{L} = \psi^A \psi_A = \psi^1\psi_1 + \psi^2\psi_2$$
$$\Psi_\mathrm{L}^\dagger \Psi_\mathrm{R} = \bar{\psi}_{\dot{A}} \bar{\psi}^{\dot{A}} = \bar{\psi}_{\dot{1}}\bar{\psi}^{\dot{1}} + \bar{\psi}_{\dot{2}}\bar{\psi}^{\dot{2}}$$

Dabei gelten folgende Rechenregeln:

- Heben und Senken der Summationsindizes:

$$\psi^A = \tilde{\varepsilon}^{AB}\psi_B \qquad \psi_A = \psi^B \tilde{\varepsilon}_{BA}$$
$$\bar{\psi}^{\dot{A}} = \bar{\psi}_{\dot{B}}\varepsilon^{\dot{B}\dot{A}} \qquad \bar{\psi}_{\dot{A}} = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\bar{\psi}^{\dot{B}}$$

  mit

$$(\tilde{\varepsilon}^{AB}) = (\tilde{\varepsilon}_{BA}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(\varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}) = (\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Das bedeutet Konsistenz, denn:

$$\psi^1 = -\psi_2 \qquad \psi^2 = \psi_1$$
$$\bar{\psi}^{\dot{1}} = -\bar{\psi}_{\dot{2}} \qquad \bar{\psi}^{\dot{2}} = \bar{\psi}_{\dot{1}}$$

- Kippen der Summationsindizes:

$$\phi^A\psi_A = -\phi_A\psi^A \qquad \bar{\phi}_{\dot{A}}\psi^{\dot{A}} = -\bar{\phi}^{\dot{A}}\psi_{\dot{A}}$$

- Spinorkomponenten sind $a$-Zahlen, d.h. Vertauschen zweier Komponenten liefert Minuszeichen.
- Komplexe Konjugation und hermitesche Konjugation sind identisch:

$$(\psi^1\psi^2)^* = (\psi^1\psi^2)^\dagger = \bar{\psi}^{\dot{2}}\bar{\psi}^{\dot{1}}$$

- Im Minkowskiraum ist das Skalarprodukt:

$$xy = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu y^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu y_\mu$$

Analog definiert man:

$$\begin{aligned} \phi\psi &= \phi^A \psi_A = \tilde{\varepsilon}^{AB} \phi_B \psi_A \\ \bar{\phi}\bar{\psi} &= \bar{\phi}_{\dot{A}} \bar{\psi}^{\dot{A}} = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} \bar{\phi}^{\dot{B}} \bar{\psi}^{\dot{A}} \end{aligned}$$

Außerdem analog für Vektoren:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^\mu \Psi_{\mathrm{R}} &= \phi \sigma^\mu \psi = \phi^A \sigma^\mu_{A\dot{B}} \bar{\psi}^{\dot{B}} \\ \Phi_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \Psi_{\mathrm{L}} &= \bar{\phi} \tilde{\sigma}^\mu \bar{\psi} = \bar{\phi}_{\dot{A}} \tilde{\sigma}^{\mu\dot{A}B} \psi_B \end{aligned}$$

Und Tensoren:

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{R}}^\dagger \sigma^{\mu\nu} \Psi_{\mathrm{L}} &= \phi \sigma^{\mu\nu} \psi = \phi^A (\sigma^{\mu\nu})_A^{\ B} \psi_B \\ \Phi_{\mathrm{L}}^\dagger \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \Psi_{\mathrm{R}} &= \bar{\phi} \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\psi} = \bar{\phi}_{\dot{A}} (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{A}}_{\ \dot{B}} \bar{\psi}^{\dot{B}} \end{aligned}$$

- Der Dirac-Spinor lautet dann:

$$\Psi_a = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \bar{\chi}^{\dot{A}} \end{pmatrix}$$

wobei $a = 1, \ldots, 4$.

- Mit einem zweiten Dirac-Spinor $\Phi_a = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \bar{\lambda}^{\dot{A}} \end{pmatrix}$ und $\bar{\Psi}\Phi = \bar{\Psi}_a \Phi_a$ gilt für den Lorentz-Skalar:

$$\bar{\Psi}\Phi = \chi\phi + \bar{\psi}\bar{\lambda} = (\bar{\Phi}\Psi)^\dagger$$

In der *chiralen Darstellung* ergeben sich dann:

- $\gamma$-Matrizen:

$$\gamma^\mu_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{A\dot{B}} \\ \tilde{\sigma}^{\mu\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5_{ab} = \begin{pmatrix} -\delta_A^B & 0 \\ 0 & \delta^{\dot{A}}_{\dot{B}} \end{pmatrix}$$

- $$(\gamma^\mu \gamma_5)_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{A\dot{B}} \\ -\tilde{\sigma}^{\mu\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix}$$

- Spintensor:

$$\Sigma^{\mu\nu}_{ab} = \begin{pmatrix} (\sigma^{\mu\nu})_A^{\ B} & 0 \\ 0 & (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{A}}_{\ \dot{B}} \end{pmatrix}$$

- Ladungskonjugation:

$$C_{ab} = \begin{pmatrix} -\tilde{\varepsilon}_{AB} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} \end{pmatrix}$$