Seminar über Teilchen- und Kerntheorie:

Symmetrie und Supersymmetrie

Die Lorentz- und die Poincare-Gruppe

Ausarbeitung zum Seminarvortrag vom 25. Juni 2003

Adrian Baule

1 Die Lorentzgruppe

Alle linearen Koordinatentransformationen im Minkowskiraum welche das Skalarprodukt $x_\mu x^\mu = x_0^2 - \vec{x}^2$ invariant lassen, heissen *Lorentztransformationen*:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

Sie entsprechen der Symmetrie einer isotropen Raum-Zeit und bilden die Lorentzgruppe.

1.1 Gruppenstruktur

Das obige Kriterium für die Gruppenelemente kann vektorunabhängig formuliert werden:

$$x'_\mu x'^\mu = g_{\mu\nu} x'^\nu x'^\mu = g_{\mu\nu}(\Lambda^\nu_\sigma x^\sigma)(\Lambda^\mu_\rho x^\rho) = g_{\rho\sigma} x^\sigma x^\rho$$

Daraus folgt $g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu}\Lambda^\nu_\sigma \Lambda^\mu_\rho$ bzw. $g = \Lambda^T g \Lambda$,die sog. *Pseudoorthogonalität.*

Aus dieser Beziehung erhält man folgende Eigenschaften:

- Inverses Element: $\Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^T g$ (Das Einselement ist δ^μ_ν).
- $det\Lambda = \pm 1$ und $|\Lambda^0_0| \geq 1$. Damit ist die Lorentzgruppe nicht einfach zusammenhängend, sondern besteht aus vier getrennten Zweigen. Wir behandeln hier den Fall $det\Lambda = +1$ und $|\Lambda^0_0| > 1$, die sog. *eigentliche orthochrone* oder *spezielle* Lorentzgruppe, die als einziger Zweig eine Untergruppe bildet.
- Die 16 Matrizeneinträge von Λ werden durch 10 Bedingungen eingeschränkt (Symmetrie in den Indizes ρ und σ). Damit ergeben sich 6 freie Parameter.

  Gewöhnliche Drehungen der Raumkoordinaten lassen die Länge von Dreiervektoren und damit auch von Vierervektoren invariant,

  $$\Lambda_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

  wobei R die orthogonale 3×3 Drehmatrix ist. Wir haben damit 3 Parameter $0 \leq \phi_i \leq 2\pi$

  Die anderen 3 Parameter beschreiben Geschwindigkeitstransformationen ("Boosts"), welche Zeit- und Raumkoordinaten miteinander mischen, z.B. in x-Richtung:

  $$\Lambda_B = \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\nu & -\sinh\nu & 0 & 0 \\ -\sinh\nu & \cosh\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

  mit der sog. *Rapidität* $\vec{\nu} = \frac{\vec{v}}{v} artanh(v)$. Der Parameterbereich ist hier $-\infty < \nu_i < \infty$ und daher bildet die Lorentzgruppe keine kompakte Gruppe.

1.2 Lie-Algebra

Da die Lorentzgruppe eine kontinuierliche Gruppe ist, können die Transformationen durch Generatoren dargestellt werden:

$$\Lambda = \exp\{-i(\vec{\phi}\vec{J} + \vec{\nu}\vec{K})\}$$

Dabei sind die Generatoren der Drehung die bekannten Drehimpuloperatoren J^i. Die Generatoren der Boosts erhält man auf bekannte Weise:

$$K^i = \frac{1}{i}\frac{\partial \Lambda^i_B}{\partial \nu}|_{\nu=0}$$

Die gesuchten Kommutatorbeziehungen (Lie-Algebra) können dann aus den J^i und K^i berechnet werden. Es ergeben sich drei Gleichungen:

$$[J^i, J^j] = i\epsilon^{ijk} J^k$$

$$[J^i, K^i] = i\epsilon^{ijk} K^k$$

$$[K^i, K^j] = -i\epsilon^{ijk} J^k$$

Die erste Gleichung ist die bekannte Lie-Algebra der SU(2) Gruppe. Die beiden anderen drücken aus, dass sich $\vec{K}$ wie ein Dreiervektor transformiert und dass die Hintereinanderausführung zweier Boosts in verschiedenen Richtungen eine Drehung bewirkt.

1.3 Irreduzible Darstellungen

Alle Darstellungen einer Gruppe können aus einer endlichen Anzahl irreduzibler Darstellungen gebildet werden. Zu ihrer Bestimmung vereinfachen wir zunächst die Struktur der Lorentzalgebra, indem wir zwei neue Operatoren definieren:

$$A^i = \frac{1}{2}(J^i + iK^i), \qquad B^i = \frac{1}{2}(J^i - iK^i)$$

Wir erhalten damit die Kommutatorbeziehungen

$$[A^i, A^j] = i\epsilon^{ijk} A^k$$

$$[B^i, B^j] = i\epsilon^{ijk} B^k$$

$$[A^i, B^j] = 0$$

Diese Operatoren erfüllen also jeder für sich die SU(2)-Liealgebra. Die Lie-Algebra der Lorentzgruppe ist damit lokal isomorph zu SU(2)$\otimes$SU(2). Analog zur Drehgruppe haben wir daher die Casimiroperatoren $\vec{A}^2$ mit Eigenwerten

$a(a+1)$ und $\vec{B}^2$ mit EW $b(b+1)$ $(a, b = 0, 1/2, 1, ...)$.
Die irreduzible Darstellung ist endlichdimensional (Dimension $(2a+1)(2b+1)$) und nichtunitär als Folge der Nicht-Kompaktheit der Lorentzgruppe.
Die EW (a, b) liefern die Klassifizierung der Darstellungen mit zugehörigem Spin $j = a + b$ (aus $\vec{J} = \vec{A} + \vec{B}$). Die einfachsten Darstellungen sind:

- $(0, 0)$: Lorentzskalare mit Dim.1 und Spin 0.
- $(1/2, 0)$: linkshändige Weyl-Spinoren mit Dim.2 und Spin 1/2.
- $(0, 1/2)$: rechtshändige Weyl-Spinoren mit Dim.2 und Spin 1/2. Unter einer Paritätstransformation gehen links- und rechtshändige Weyl-Spinoren ineinander über.
- $(1/2, 1/2)$: Vierervektoren mit Dim.4 und Spin 1.

2 Die Poincaregruppe

Die Poincaregruppe ist die Gruppe der Lorentztransformationen und Translationen im Minkowskiraum:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

Sie entspricht damit den Symmetrien einer homogenen und isotropen Raum-Zeit.

2.1 Gruppenstruktur

Wie die Lorentzgruppe teilt sich auch die Poincaregruppe in vier Zweige auf, die durch $det\Lambda = \pm 1$ und $|\Lambda^0_0| \geq 1$ charakterisiert sind. Die Anzahl der freien Parameter ist 10: 6 für Lorentztransformationen und 4 für Translationen.

Multiplikation: die Hintereinanderausührung zweier Poincaretransformationen $x \to x_1 \to x_2$ ergibt

$$x_2 = \Lambda_2 x_1 + a_2 = \Lambda_2(\Lambda_1 x + a_1) + a_2 = \Lambda_2\Lambda_1 x + \Lambda_2 a_1 + a_2$$

Also $(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$ (*semidirektes Produkt*).

Inverses Element: $(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$, Einselement: (1,0)

2.2 Lie-Algebra

Die Generatordarstellung der Poincaregruppe ist:

$$(\Lambda, a) = \exp\{-\frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} - ia_\mu P^\mu\}$$

Dabei werden im antisymmetrischen Tensor $\omega_{\rho\sigma}$ die Parameter $\vec{\phi}$ und $\vec{\nu}$ zusammengefasst und in $M^{\rho\sigma}$ die Generatoren der Lorentzgruppe: $J^k = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk}M^{ij}$ und $K^i = M^{0i}$.
Der Generator für Translationen ist der Energie-Impuls Operator P^μ.

Man erhält die Kommutatorbeziehungen:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = ...$$

$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho)$$

Die erste Gleichung ist der bekannte Kommutator für den Impuls: Translationen in beliebige Richtungen vertauschen. Über den $M^{\rho\sigma}$ Tensor kann die Lorentzalgebra in einer Gleichung ausgedrückt werden (Gleichung 2), deren Form aber nicht weiter benötigt wird. Die Beziehung zwischen P^μ und $M^{\rho\sigma}$ wird hier ohne Herleitung angegeben (siehe Kalka/Soff S.284).

2.3 Irreduzible Darstellungen

Wie die Lorentzgruppe hat auch die Poincaregruppe den Rang 2 (definiert als Anzahl gleichzeitig miteinander kommutierender Generatoren) und damit zwei unabhängige Casimir-Operatoren:

- $P_\mu P^\mu$: P^μ ist ein Vierervektor, sein Skalarprodukt also invariant unter Lorentztransformationen (d.h. vertauscht mit $M^{\rho\sigma}$).

- $W_\mu W^\mu$: mit dem *Pauli-Lubanski-Vektor* $W_\mu := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}$
  W_μ ist ein Vierervektor nach seiner Indexstruktur (entsteht aus Kontraktion von Tensoren) und vertauscht daher mit $M^{\rho\sigma}$. Zudem gilt:

  $$[P_\mu, W_\nu] = \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}P^\lambda[P_\mu, M^{\rho\sigma}] = \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}P^\lambda(\delta^\nu_\mu P^\sigma - \delta^\sigma_\mu P^\rho) = 0$$

  $\epsilon_{\nu\lambda\rho\sigma}$ ist jeweils antisymmetrisch in den Indizes, während Produkte von P^ν mit sich symmetrisch sind. Die Summe verschwindet damit in beiden Termen.

Die Eigenwerte der beiden Casimir-Operatoren klassifizieren wie oben die irreduziblen Darstellungen. Diese sind stets unendlich dimensional (Impulseigenwerte sind unbeschränkt) und unitär.
Die EW von $P_\mu P^\mu$ sind physikalisch: $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2$. Man unterscheidet die beiden Fälle:

- $m > 0$: wir können stets eine Transformation in das Ruhesystem vornehmen mit $P^\mu = m\delta_0^\mu$. Wir haben dann

  $$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} m \delta_0^\mu M^{\rho\sigma}$$

  und daraus $W_0 = 0$, $W_k = \frac{1}{2} m \epsilon_{ijk} M^{ij} = m S_k$ (der Drehimpuls im Ruhesystem ist der Spin).
  Der Eigenwert von W_μ im massiven Fall ist damit $-m^2 s(s+1)$ mit $s = 0, 1/2, 1, ...$. Die Darstellung wird also durch eine Masse m und einen Spin s charakterisiert. Da dies auch die fundamentalen Eigenschaften der Elementarteilchen sind, kann man sie als irreduzible Darstellungen der Poincaregruppe bezeichnen.

- $m = 0$: es gilt $P_\mu P^\mu = 0$ und $P^\mu W_\mu = 0$, wir beschränken uns zudem auf den Fall $W_\mu W^\mu = 0$. Daraus leitet sich die Proportionalität ab

  $$W_\mu = h P_\mu$$

  bzw. $h = \frac{W_0}{P_0}$ mit $W_0 = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} P^i M^{jk} = \vec{P}\vec{S}$ (s.o.) und $P_0^2 = \vec{P}^2$. Die Proportionalitätskonstante ist damit:

  $$h = \frac{\vec{P}\vec{S}}{|\vec{P}|} = \pm s$$

  Die sog. *Helizität* h ist anschaulich die Projektion des Teilchenspins auf die Bewegungsrichtung. Masselose Teilchen werden also durch den Wert ihrer Helizität eindeutig charakterisiert.

Während massive Teilchen 2s+1 Spin-Freiheitsgrade haben, besitzen masselose Teilchen nur 2 Helizitäts-Freiheitsgrade. Daraus erklärt sich die Tatsache, dass man Photonen nur mit Spin ± 1 vorfindet. Diese Eigenschaften der Elementarteilchen konnten allein aus der Untersuchung der Poincaregruppe hergeleitet werden.