Seminar über Kern- und Teilchentheorie (SS 2002):

Quantenelektrodynamik

Leitung:

Prof. Dr. G. Münster,

Prof. Dr. H.-H. Stingl,

Dr. J. Heitger,

Dipl.-Phys. R. Peetz

Seminarvortrag von
Alexander Trzeciak

1. Relativistische Kinematik der Kollision zweier Teilchen

2. Die Heisenbergsche Streumatrix und der Streuquerschnitt

Zusammenfassung:
Im ersten Teil dieses Vortrags wird die relativistische Kinematik zweier Teilchen diskutiert. Es wird eine Einführung in die Streutheorie gegeben. Weiter wird der Ansatz von Møller und Mandelstam zur Beschreibung der relativistischen Kollision zweier Teilchen vorgestellt, bei dem gewisse relativistisch invariante Variablen (Mandelstamvariablen) eingeführt werden. Die Streukanäle werden erläutert. Die Zusammenhänge zwischen Laborsystem und Schwerpunktsystem werden aufgezeigt. Des Weiteren wird der sog. Dalitzplot, ein wichtiges Hilfsmittel in der Hochenergiephysik beleuchtet.
Im zweiten Teil des Vortrages wird die von Heisenberg und Wheeler eingeführte S-Matrix vorgestellt - im Zusammenhang mit einem asympotisch angelegten Streuformalismus. Es werden die Matrixelemente für das Problem der Streuung eines Elektrons an einem schweren Kern berechnet. Für die Übergangswahrscheinlichkeit, den Fluss, den Streuquerschnitt und den differentiellen Streuquerschnitt werden Formeln hergeleitet. Die Mottsche Streuformel wird erläutert und ihre Grenzfälle - einen stellt die Rutherfordsche Streuformel dar - diskutiert. Die T-Matrix wird definiert. Es werden Verallgemeinerungen der Definitionen von S- und T-Matrix vorgenommen. Die Unitaritätsrelation der S-Matrix wird bewiesen und das sog. optische Theorem erwähnt.

Die in dem Vortrag gezeigten Abbildungen und Fotos wurden in dieser Ausarbeitung bewusst weggelassen, um einen konziseren Text zu erhalten und das File nicht sonderlich groß werden zu lassen.

1. Relativistische Kinematik der Kollision zweier Teilchen

Warum beschäftigt man sich mit Streutheorie?

Streuversuche, in welchen Teilchen an anderen Teilchen oder an stationären Potentialen gestreut werden, stellen den wichtigsten experimentellen Zugang zur Welt der Quantenmechanik dar.
• Dies lässt schon an der Geschichte der frühen Atomphysik erkennen:
Rutherfordversuch: Entdeckung des Atomkerns durch α-Teilchen-Streuung an Goldfolien;
Franck-Hertz-Versuch:
Nachweis von Energieniveaus durch e$^-$-Hg-Gas-Streuung;
wieder Rutherford:
Nachweis der Kernstruktur mit

$$\alpha +^{14} N \rightarrow p +^{17} O.$$

• In der Elementarteilchenphysik bzw. Hochenergiephysik (sehr wichtiger physikalischer Industriezweig) sind Streuexperimente die hauptsächliche Erzeugungsstätte von Teilchen für weitere Versuche, so z.B. die Pionenerzeugung: $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$.

Überblick über die Streutheorie

• Die **nichtrelativistische ST** ist unter Transformationen der **Galilei-Gruppe** invariant.
• Die **relativistische ST** ist unter Transformationen der **Poincaré-Gruppe** invariant, sie ist Gegenstand der **Quantenfeldtheorie**.
• Der grundsätzliche Unterschied dieser Unterteilung liegt in der folgenden Tatsache:
Die Möglichkeit, Teilchen zu erzeugen und zu vernichten, ist der relativistischen Streutheorie vorbehalten.
• Eine weitere Unterscheidung kann durch Einteilung der Streuprozesse in **Ein- u. Mehrkanalstreuung** erfolgen.
Def. Kanal: Ein Kanal ist eine Gruppe möglicher Endprodukte, z.B. im Prozess
$\alpha +^{14} N \rightarrow \alpha +^{14} N$ bzw.
$p +^{17} O$ bzw.
$\alpha + \alpha +^{10} B$
sind jeweils $\alpha +^{14} N$, $p +^{17} O$ und $\alpha + \alpha +^{10} B$ ein Kanal.
• Die Einkanalstreuung ist streng genommen eine (oft gute) Näherung: So entstehen i.a. bei Streuexperimenten weiche Photonen durch Bremsstrahlung.

1. Relativistische Kinematik der
Kollision zweier Teilchen
• Erinnerung an die Vorlesung(en) und Lehrbücher über die Spezielle Relativitätstheorie sowie den Vortrag von Adrian Baule (1. Vortrag dieses Seminars):
Kenntnisse in der Speziellen Relativitätstheorie wie z.B. Lorentz-Transformation, Vierervektoren und Skalarprodukte im Minkowskiraum und Tensorkalkül werden als bekannt vorausgesetzt.
• Die Formeln, die in diesem Vortrag hergeleitet werden, sind u.a. wichtig für den Vortrag über Møller-Streuung (von David Kleinhans, 6. Vortrag dieses Seminars).
Foto von Albert Einstein und seinem Freund Kurt Gödel: Während Einstein die Physik revolutionierte, revolutionierte Kurt Gödel die Logik und damit die Mathematik. Der geniale Kurt Gödel (einer der bedeutendsten Wissenschaftler überhaupt) kannte sich auch sehr gut mit Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie aus. Er schuf ein Modell eines Universums, in dem Zeitschleifen und somit Zeitreisen möglich wären.

• Untersucht werden soll im Folgenden die Kinematik einer **2-Teilchen-Reaktion** der Form

$$a + b \longrightarrow c + d. \tag{1}$$

• Teilchen b ruhe vor dem Stoß im Laborsystem.
• Die **Viererimpulse** der Teilchen im Laborsystem sind:

$$p_a,\, p_b,\, p_c,\, p_d.$$

• Genauer haben wir:

$$p_a = \begin{pmatrix} E_L \\ \mathbf{p}_L \end{pmatrix},\, p_b = \begin{pmatrix} m_b \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},\, p_c = \begin{pmatrix} E_c \\ \mathbf{p}_c \end{pmatrix},\, p_d = \begin{pmatrix} E_d \\ \mathbf{p}_d \end{pmatrix}. \tag{2}$$

(E_L ist die **Laborenergie des Projektils** und
$\mathbf{p}_L$ ist der **Laborimpuls des Projektils**.)

• Der **Streuwinkel im Laborsystem** sei der Winkel zwischen den Impulsen der Teilchen a und c:

$$\cos\vartheta_L = \frac{\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_c}{|\mathbf{p}_a|\,|\mathbf{p}_c|}. \tag{3}$$

• Es gilt die **Viererimpulserhaltung:**

$$p_a + p_b = p_c + p_d. \tag{4}$$

•Es soll ein **Übergang zum Schwerpunktsystem** mit den entsprechenden Viererimpulsen $p_a^*,\, p_b^*,\, p_c^*,\, p_d^*$ vorgenommen werden.
Hierzu: •(**Def**.**Schwerpunktsystem**)$\wedge$ **Impulserhaltung** $\Rightarrow$:

$$\mathbf{p}_a^* + \mathbf{p}_b^* = \mathbf{p}_c^* + \mathbf{p}_d^* = 0. \tag{5}$$

•**Schwerpunktsenergie** $=: \sqrt{s}$

•Weiter gilt die **Energieerhaltung:**

$$E_a^* + E_b^* = E_c^* + E_d^* = \sqrt{s}. \tag{6}$$

•Gleichung (5) $\Rightarrow$ Im Schwerpunktsystem laufen die Teilchen nach der Kollision mit **Impulsen gleichen Absolutbetrages**

$$|\mathbf{p}_c^*| = |\mathbf{p}_d^*| \tag{7}$$

diametral auseinander.

• Für den **Streuwinkel im Schwerpunktsystem** haben wir:

$$\cos\vartheta^* = \frac{\mathbf{p}_a^* \cdot \mathbf{p}_c^*}{|\mathbf{p}_a^*|\,|\mathbf{p}_c^*|}. \tag{8}$$

•Unser **nächstes Ziel** ist es, Variablen, die die Streuung im **Schwerpunkt-** und im **Laborsystem** beschreiben, miteinander in Beziehung zu setzen.

•Dazu folgen wir einem Ansatz von **Møller** und **Mandelstam**:

Einführung gewisser relativistisch invarianter Variablen s, t, u (Mandelstamvariablen)

Genaueres zu t und u soll später bemerkt werden, zunächst betrachten wir unser schon eingeführtes $\sqrt{s}$ bzw. s:

•**s = Quadrat der Schwerpunktsenergie** soll eine dieser relativistisch invarianten Variablen sein.

1. Gln. (5) und (6) ⇒ **s = das Quadrat der Schwerpunktsenergie** lässt sich als Quadrat des Vierervektors $p_a^* + p_b^*$ schreiben.
2. Eine Auswertung im **Laborsystem** ist ebenfalls möglich.
3. s ist offensichtlich relativistisch invariant.

$$\mathbf{p}_a^* + \mathbf{p}_b^* = 0 \wedge E_a^* + E_b^* = \sqrt{s} \Rightarrow s = (p_a^* + p_b^*)^2 = (p_a + p_b)^2 \tag{9}$$

(ausgenutzt wurde die Invarianz des Skalarprodukts).

•$Viererimpulserhaltung \wedge Gl.(9) \Rightarrow$

$$s = (p_c^* + p_d^*)^2 = (p_c + p_d)^2 \tag{10}$$

•Gl. (9) ⇒ die gesuchte Beziehung zwischen der Schwerpunktsenergie und der Energie E_L des Projektils im Laborsystem (vgl. (2)):

$$s = (p_a + p_b)^2 = p_a^2 + 2(p_a, p_b) + p_b^2 \tag{11}$$

bzw.

$$s = m_a^2 + 2E_L m_b + m_b^2 \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow E_L = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b^2} \tag{13}$$

•Hierzu betrachten wir ein **Bsp. mit Protonen und Antiprotonen**:
Diese befinden sich in einem Speicherring und sollen mit jeweils 270 GeV kollinear aufeinander zu laufen.
Für die Schwerpunktenergie gilt somit:

$$\sqrt{s} = 540\, GeV.$$

•**Wir stellen uns die Frage:** Welche Energie müsste ein Antiproton in der Streuung an einem ruhenden Proton im Labor haben, um dieselbe Schwerpunktsenergie in der Kollision zu erreichen?

•Wir können die **Antwort** mit Formel (13) geben:
Proton und Antiproton haben dieselbe Masse von etwa 1 GeV, somit folgt:

$$E_L = \frac{540^2 - 1^2 - 1^2}{2 \cdot 1^2}\, GeV = \frac{540^2 - 2}{2}\, GeV \tag{14}$$

$\approx 1,5 \cdot 10^5\, GeV.$

•**Eine weitere Frage, die wir beantworten können, sit die folgende:** Wie groß ist der Betrag des Impulses von Teilchen a im Laborsystem?

•Wieder können wir die **Antwort** unter Benutzung von Gl. (13) finden:
$|\mathbf{p}_L| = \sqrt{E_L^2 - m_a^2} =$

$$= \frac{1}{2m_b}[(s - m_a^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2]^{\frac{1}{2}} = \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2m_b}[s^2 - m_a^4 - m_b^4 - 2sm_a^2 - 2sm_b^2 - 2m_a^2 m_b^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Dies ist ein in kinematischen Rechnungen häufig vorkommender Ausdruck, daher führen wir für ihn eine abkürzende Schreibweise ein und untersuchen ihn genauer.

•Definition der Funktion w: $\mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ mit

$$w(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz)^{\frac{1}{2}} = \tag{17}$$

$$= [x - (\sqrt{y} + \sqrt{z})^2]^{\frac{1}{2}} \cdot [x - (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Bem.: w ist offensichtlich symmetrisch in ihren drei Variablen x, y, z.

• Unser **unser nächstes Ziel**ist es, mit Hilfe von s die **Energien und Impulse der Teilchen im Schwerpunktsystem** auszudrücken.
• Der Vierervektor $p_a^* + p_b^*$ hat nur eine Energiekomponente; Gl. (6)⇒:

$$E_a^* = \frac{(p_a^*, p_a^* + p_b^*)}{\sqrt{s}} = \tag{19}$$

$$\frac{(p_a, p_a + p_b)}{\sqrt{s}} = \tag{20}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}}(p_a^2 + (p_a, p_b)) = \tag{21}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{s}}(p_a^2 + \frac{1}{2}(p_a^2 + p_b^2)^2 - \frac{1}{2}p_a^2 - \frac{1}{2}p_b^2) \tag{22}$$

$$\Rightarrow E_a^* = \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}}. \tag{23}$$

Benutzt wurde die Invarianz des relativistischen Skalarprodukts.

• Formeln für E_b^*, E_c^* und E_d^* ergeben sich analog:

$$E_b^* = \frac{s + m_b^2 - m_a^2}{2\sqrt{s}}, \tag{24}$$

$$E_c^* = \frac{s + m_c^2 - m_d^2}{2\sqrt{s}}, \tag{25}$$

$$E_d^* = \frac{s + m_d^2 - m_c^2}{2\sqrt{s}}. \tag{26}$$

• Für $|\mathbf{p}_a^*|$, $|\mathbf{p}_b^*|$, $|\mathbf{p}_c^*|$ und $|\mathbf{p}_d^*|$ folgt damit:
$|\mathbf{p}_a^*| = |\mathbf{p}_b^*| = \sqrt{(E_a^*)^2 - m_a^2} =$
$(\frac{(s+m_a^2-m_b^2)^2}{4s} - m_a^2)^{\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{s}} w(s, m_a^2, m_b^2) \tag{27}$$

und

$$|\mathbf{p}_c^*| = |\mathbf{p}_d^*| = \tag{28}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{s}} w(s, m_c^2, m_d^2). \tag{29}$$

• **Einführung von zwei weiteren invarianten Variablen t und u:**

$$t := (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2 \tag{30}$$

und

$$u := (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2. \tag{31}$$

•Aber nota bene: s, t, u sind nicht unabhängig voneinander.
In 2-Teilchenreaktion vom Typ der Gl. $a + b \longrightarrow c + d$ gibt es (zumindest für spinlose Teilchen) nur zwei unabhängige kinematische Variable.

•**Zur Variablen t:**

$$t \propto \cos\vartheta^*, \tag{32}$$

wobei ϑ^* **Streuwinkel im Schwerpunktsystem**,
denn es gilt:

$$t = (p_a^* - p_c^*)^2 = \tag{33}$$

$= \mathrm{m}_a^2 + m_c^2 - 2(p_a^*, p_c^*) = (33)$

$$= m_a^2 + m_c^2 - 2(E_a^* E_c^* - |\mathbf{p}_a^*|\,|\mathbf{p}_c^*| \cos\vartheta^*) = \tag{34}$$

$= m_a^2 + m_c^2 - \frac{1}{2s}(s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_c^2 - m_d^2) + \frac{1}{2s} w(s, m_a^2, m_b^2)\, w(s, m_c^2, m_d^2) \cos\vartheta^*$
• Der **einziger Unterschied zwischen Variablen u und t** liegt darin, dass die Rolle von Teilchen c und d vertauscht ist.

•Teilchen c und d laufen im Schwerpunktsystem **diametral entgegengesetzt** auseinander. $\Rightarrow$ Der entsprechende **Streuwinkel** zwischen a und d beträgt: $\pi - \vartheta^*$.
$\Rightarrow$ für u:

$$u = (p_a^* - p_d^*)^2 = \tag{35}$$

$$= m_a^2 + m_d^2 - \frac{1}{2s}(s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_d^2 - m_c^2) - \tag{36}$$

$\frac{1}{2} w(s, m_a^2, m_b^2)\, w(s, m_c^2, m_d^2) \cos\vartheta^*$.

•**Addition der Formeln (34) und (36) für t und u** ergibt:

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \tag{37}$$

•**Frage:** Welches ist der **physikalisch erlaubte Bereich** (kinematische Schranken, Grenzen) in den verschiedenen **kinematischen Variablen** (s, ϑ^*, t, u)?

• Wir können eine **kinematische Schranke für s** angeben:
Es ist klar, dass die Reaktion $a + b \longrightarrow c + d$ nur ablaufen kann, wenn die **Schwerpunktsenergie größer als die Summe der Massen** der Teilchen im Anfangs- und Endzustand ist:

$$\sqrt{s} \geq m_a + m_b \tag{38}$$

und

$$\sqrt{s} \geq m_c + m_d. \tag{39}$$

• Wir können leicht **kinematische Schranken für den Streuwinkel ϑ^* im Schwerpunktsystem** finden:

$$0 \leq \vartheta^* \leq \pi \tag{40}$$

$$\Rightarrow -1 \leq \cos\vartheta^* \leq 1. \tag{41}$$

• Damit ergeben sich schon die **kinematischen Schranken für t**:
Hier wollen wir uns auf den (von den Rechnungen her einfacheren) **Hochenergiegrenzfall** beschränken:

$$s \gg m_a^2,\, m_b^2,\, m_c^2,\, m_d^2. \tag{42}$$

Gln. (34) und (36) ergeben den erlaubten Bereich bei fest vorgegebenem s wie folgt:

$$t \approx -\frac{f}{2}(1-\cos\vartheta^*) \tag{43}$$

$$0 \geq t \geq -s \tag{44}$$

$$u \approx -\frac{f}{2}(1+\cos\vartheta^*) \tag{45}$$

$$0 \geq u \geq -s \tag{46}$$

•**Gekreuzte Reaktionen** Mit der Reaktion $a+b \longrightarrow c+d$ eng verwandt sind die sog. gekreuzten Reaktionen:

$$a + \overline{c} \longrightarrow \overline{b} + d, \tag{47}$$

$$a + \overline{d} \longrightarrow \overline{b} + c, \tag{48}$$

$$a \longrightarrow \overline{b} + c + d. \tag{49}$$

• Die letzte Gleichung beschreibt natürlich den Zerfall des Teilchens a in drei Teilchen.

Für diesen Zerfall muss selbstverständlich gelten:

$$m_a \geq m_b + m_c + m_d. \tag{50}$$

• Auch bei den gekreuzten Reaktionen lassen sich invariante Variablen (hier s', t', u') einführen. Dies geschieht in der folgenden Weise:

$$s' = (p_a + p_{\overline{c}})^2, \tag{51}$$

$$t' = (p_a - p_{\overline{b}})^2, \tag{52}$$

$$u' = (p_a - p_{\overline{d}})^2. \tag{53}$$

• In diesem Zusammenhang ist die **Substitutionsregel oder Kreuzungssymmetrie** von großer Bedeutung (Jauch, Rohrlich 1955):

$$p_c \longrightarrow -p_{\overline{c}}, \tag{54}$$

$$p_b \longrightarrow -p_{\overline{b}}, \tag{55}$$

$$t \longrightarrow s', \tag{56}$$

$$s \longrightarrow t', \tag{57}$$

$$u \longrightarrow u'. \tag{58}$$

•Man stellt die s-, t-, u- Ebene mit einem gleichseitigen Dreieck dar, um keine (oftmals schwer zu lesende) dreidimensional wirkende Zeichnung im Zweidimensionalen machen zu müssen und um keine der Achsen vor

den anderen auszuzeichnen.
Mit einem gleichseitigen Dreieck der Höhe

$$h = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \tag{59}$$

lassen sich die oben geschilderten Zusammenhänge nämlich schön veranschaulichen:
vgl. [Nachtmann],

$$F(Q_1Q_3P) - F(Q_1Q_2P) - F(Q_2Q_3P) = F(Q_1Q_2Q_3), \tag{60}$$

Höhen der Dreiecke Q_1Q_3P, Q_1Q_2P und $Q_1Q_2Q_3$: s, -t und h,
die Höhe -u des Dreiecks Q_2Q_3P erfüllt gewünschte Relation

$$s + t + u = h = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2. \tag{61}$$

In der Hochenergiephysik ist das Dalitzdiagramm wichtig:

Bei einer Reaktion wie

$$\pi + p \to \pi + \pi + p$$

will man gerne die möglichen auftretenden Wechselwirkungen zwischen den Teilchen im Endzustand analysieren - zum Beispiel das Auftreten von Resonanzen $(\pi p, \pi\pi)$ - und hiermit auch, inwieweit die beobachteten Verteilungen von Sekundärimpulsen und Streuwinkeln von der Situation abweichen , in der das Matrixelement konstant ist. In diesem Fall sind die Verteilungen einfach durch die Phasenraumfaktoren bestimmt. Die Abweichungen solcher Verteilungen von vom Phasenraumverhalten können mit Hilfe eines sog. Phasenraum- oder Dalitzdiagramms bewertet . Bei einem Dalitzdiagramm handelt es sich um eine nach dem britischen Physiker Henry Dalitz (geb. 1925) benannte i.a. zweidimensionale graphische Darstellung der Häufigkeitsverteilung einer Rektion in einem Punktediagramm (ein sog. scatter plot)). Die Parameter (z.B. Impulse) werden als Koordinaten meist so gewählt, dass die Punkte in Abwesenheit physikalischer Wechselwirkungen gleichmäßig verteilt sind. Relevante Wechselwirkungen dagegen verursachen Häufungen in bestimmten Gegenden des Dalitzdiagramms.

Dreikörper-Phasenraum:

Die Zahl der pro Normierungsvolumen verfügbaren Quantenzustände ist gleich

$$\frac{p^2 dp d\Omega}{h^3}.$$

für ein Teilchen mit Spin Null und dem Impuls zwischen p und p+dp im Raumwinkelelement $d\Omega$

$K_{\pi 3}$-Zerfall :

Das ursprüngliche Dalitzdiagramm wurde für den Zerfall

$$K^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$$

gemacht, die totale kinetische Energie ist Q = 75 MeV. In diesem Fall haben die drei Teilchen gleiche Masse und sind (fast) nichtrelativistisch. Tatsächlich wurde das Diagramm für die kinetischen Energien T_π der Pionen entlang dreier Achsen unter 120° erstellt. Wieder sollte die Dichte der Punkte gleichförmig sein, wenn das Matrixelement konstant ist und alle Punkte sollten innerhalb eines Kreises mit dem Radius Q/3 liegen.

Welches sind die erwarteten Abweichungen vom Phasenraumverhalten, wenn wir dem Kaon, d.h. der $\pi^+\pi^+\pi^-$-Kombination verschiedene Spins zuschreiben. Sei l^+ der Bahndrehimpuls der beiden gleichen Teilchen im CMS - geradzahlig aufgrund der Bose-Statistik - und es sei l^- der Bahndrehimpuls des negativen Pions relativ zum zwei-Pion-System. Wenn l^+ 0 ist (somit 2,4,6,...), dann sollte das Matrixelement und die Punktdichte im Dalitzdiagramm im Gebiet S dort verschwinden, wo die beiden gleichen Pionen gemeinsam in Ruhe sind.

Für $l^- \geq 0$ (d.h. 1,2,3,...) sollte die Punktdichte im Bereich R ausgedünnt sein, wo das negative Pion nur weing Energie relativ zu den beiden anderen hat. Das das gemessene Diagramm aber überall gleichförmig ist, können weder l^+ noch l^- von Null verschieden sein und $J_K = 0$ ist die einzige verbleibende Zuordnung.

Es muss betont werden, dass die obige Analyse keinerlei Information über die Parität des Kaons liefert. Drei Pionen in einem relativen S-Zustand haben die Parität $(-1)^3 = -1$; da jedoch die Parität im schwachen Zustand $K \longrightarrow 3\pi$ nicht erhalten bleibt, sagt das nichts über den Anfangszustand aus. Die Kaon-Parität kann aus dem Studium von Hyperkernen bestimmt werden. Dies sind Kerne, in denen ein Neutron durch ein gebundenes Λ-Hyperon ersetzt ist. Wenn z.B. negative Kaonen in Helium gestoppt werden und von einem atomaren S-Zustand eingefangen werden, bilden sich in einigen Prozent der Fälle gebundene statt freie Λ-Hyperonen gemäß der Reaktion

$$K^- +^4 He \rightarrow^4 H_\Lambda + \pi^0.$$

Der Hyperkern $^4H_\Lambda$ besteht aus einem Tritiumkern (^{3}H) plus einem gebundenen Λ-Teilchen. Detaillierte Messungen seiner (schwachen) Zerfallsmoden bestätigen $J_{^4H_\Lambda} = 0$. Somit gilt J = l = 0 auf beiden Seiten der Gleichung. Wenn die Λ-Parität als positiv definiert wird wie die des Nukleons, dann muss das Kaon $J^P = 0^-$ haben, wie auch das Pion.

Dalitzdiagramm mit drei verschiedenen Teilchen:

Als Beispiel für ein Dalitzdiagramm mit drei Teilchen von verschiedener Masse nehmen wir den Fall der Hyperresonanz $Y_1^*(1385)$ - auch $\Sigma(1385)$ genannt. Dieses Objekt wurde zuerst von Alston et al. im Jahre 1960 im Lawrence Radiation Laboratory in Berkeley (LBL) gefunden und zwar in Wechselwirkungen von 1.5GeV/c K^--Mesonen in einer Flüssigwasserstoff-Blasenkammer. Sie untersuchten die Reaktion

$$K^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \Lambda.$$

Die kinetische Energie T der π^+ und π^- im Schwerpunktsystem sind entlang der x- und y-Achse aufgetragen. Wenn Q die gesamte verfügbare kinetische Energie der drei Endzustandsteilchen in diesem Bezugssystem ist, dann ist $T_\Lambda = Q - (T_{\pi^+} + T_{\pi^-})$. Linien von konstanten Λ-Energie T_Λ verlaufen unter 45° zu den Achsen. Impuls- und Energieerhaltung schränken die Lage der Punkte von einzelnen Ereignissen auf die deformierte Ellipse ein. Wenn es keine starken Korrelationen im Endzustand gäbe, sollte die Dichte der Punkte wie üblich gleichförmig sein.

Man kann deutliche Abweichungen von einer gleichförmigen Dichteverteilung beobachten, die horizontalen und vertikalen Bänder gehören zu den bevorzugten Werten von T_{π^+} und T_{π^-}. Dies bedeutet, dass die Reaktion $K^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \Lambda$ dann als Zweikörperzerfall abläuft, nämlich in ein Pion ($\pi 1$) und in einen Resonanzzustand von Λ mit dem anderen Pion ($\pi 2$) von einer (mehr oder weniger) festen Masse $M_{\Lambda\pi} = 1385$ MeV. Wenn p der jeweilige Impuls im Schwerpunktsystem ist, dann ist die gesamte Schwerpunktsenergie

$$W = \sqrt{M_{\Lambda\pi}^2 + p^2} + \sqrt{m_\pi^2 + p^2},$$

und p ist durch $M_{\Lambda\pi}$ festgelegt. Wenn die Resonanz breit ist, kann T_π offensichtlich um einen Mittelwert streuen und so eher ein Band als eine Linie im Dalitzdiagramm bilden. Sowohl ein horizontales als auch ein vertikales Band tritt auf, weil entweder da π^- oder das π^+ mit dem Λ-Hyperon die Resonanz bilden kann. Somit

$$\Sigma(1385) \rightarrow \Lambda + \pi^\pm$$

I 1 0 1 und die Resonanz muss Isospin 1 haben, weil sie unter Isospinerhaltung in starker Wechselwirkung zerfällt. Im Dalitzdiagramm trägt man meistens $M_{\Lambda\pi^-}^2$ anstelle von T_{pi}^+ auf der Abszisse (und $M_{\Lambda\pi^+}^2$) entlang der Ordinate) auf, so dass man die invariante $\Lambda\pi$-Masse direkt ablesen kann.

2. Die Streumatrix und der Streuquerschnitt

•Unser Ziel ist es in diesem Teil des Vortrages, den zweckmäßigen Formalismus zur Beschreibung von Reaktionen der Hochenergiephysik kennenzulernen (Streuprozesse, Teilchenzerfall oder Teilchenerzeugung).
•Sehr wichtig ist in diesem Zusammenhang die Streumatrix S.
•Die S-Matrix wurde eingeführt von John Archibald Wheeler (1937) und Werner Heisenberg (1943 bzw. 1944).
Heisenbergfoto
Foto von Einstein, Yukawa u. Wheeler; Foto von Heisenberg u. Dirac
Foto von Wheeler
Foto von Wheeler, Misner, Thorne
Foto von Wheeler, Feynman, Schwinger
•Die S-Matrix wurde von Heisenberg eingeführt zu dem Zweck, eine Theorie der Elementarteilchen in Form von ausschließlich beobachtbaren Größen zu erhalten.
•Heisenbergs Definition von beobachtbaren Größen lautete folgendermaßen: Beobachtbare Größen sind sowohl Energien der stationären Zustände eines Systems sowie die asymptotischen Parameter in Streuexperimenten.
•Ein Bsp. ist die Streuung von Elektronen an einem schweren Kern, der als festes Streuzentrum betrachtet werden soll:

•Kernladung = Ze,

•Ladungsverteilung beschrieben durch Dichtefunktion $Ze\rho()$,

•Normierung: $\int d^3x\rho(\mathbf{x}) = 1$.

• Von den Gesetzen der Elektrostatik ist bekannt: Eine Ladungsverteilung erzeugt ein Potential $V(\mathbf{x})$, für das die Poisson-Gleichung gilt:

$$\Delta V(\mathbf{x}) = -Ze\rho()$$

•Zur Beschreibung der Streuung im Rahmen der quantisierten Dirac-Theorie wählen wir wieder das Wechselwirkungs- oder Dirac-Bild:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t>= \mathbf{H}'(t)|t> \tag{62}$$

•Zur Zeit $t \to -\infty$ muss der Zustand in den einlaufenden Zustand übergehen.

•Der einlaufende Zustand enthalte ein Elektron mit Impuls $\mathbf{p}$ und Spin s.

•Damit Anfangsbed. für die obige Differentialgleichung (AWP):

$$\lim_{t\to-\infty} |t >= |e^-(\vec{p},s) > \tag{63}$$

•Zur Zeit $t \to +\infty$ sieht der Zustand i.a. anders aus, er soll in diesem Bsp. eine gestreute Elektronenwelle beinhalten.

•Die obige Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung für den Zustandsvektor $\Rightarrow$ Zusammenhang zwischen den Zuständen zur Zeit $t = -\infty$ und $t = +\infty$ muss linear sein

•Übliche Bezeichnungen sind für den Anfangszustand i (initialer Zustand, initial state) und für den Endzustand f (finaler Zustand, final state).

$$\lim_{t\to-\infty} |t >=: |i > \tag{64}$$

•Linearität der Dgl. $\Rightarrow$ Ansatz mit linearem Operator:

$$\lim_{t\to+\infty} |t >=: S|i > \tag{65}$$

mit linearem Operator S.

•Frage: Welches ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, einen bestimmten Zustand f nach der Streuung vorzufinden?
•Antwort: Nachrechnen des Matrixelementes S_{fi}:
$< f|t = +\infty >=< f|S|i >\equiv S_{fi}$

•Damit haben wir die Streumatrix S schon eingeführt.

•Bestimmung der Streumatrix in unserem konkreten Problem:
Wir müssen die WW der Elektronen mit dem äußeren Potential kennen.

•anderer Vortrag:
entsprechende Wechselwirkungs-Hamiltonfunktion **H**':

$$\mathbf{H}'(t) := -e\int d^3x\overline{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma^0\psi(\mathbf{x},t)V(\mathbf{x}) \tag{66}$$

•Problem: Ein exaktes Lösen der Dgl. mit dieser WW ist nicht leicht möglich.
•Ansatz: Umschreiben der Differentialgleichung in eine äquivalente Integralgleichung:

$$|t >= |i > -i\int_{-\infty}^{t} dt'\mathbf{H}'(t')|t > \tag{67}$$

Bem.: Die Anfangsbedingung ist inkorporiert (über die Integrationsgrenzen).
•Für kleines **H** entspricht der zweite Term auf der rechten Seite einem Korrekturglied, in dem wir den Zustandsvektor durch seinen Anfangswert ersetzen (**1. Bornsche Näherung**).

$$\Rightarrow \Big| t = +\infty >\approx i\int_{-\infty}^{\infty} dt'\mathbf{H}'(t')|i > (68)$$

$$\Rightarrow |t = +\infty >=< f|\mathbf{S}| >\equiv \tag{69}$$

$$\equiv S_{fi} \approx \delta_{fi} - i\int_{-\infty}^{\infty} dt' < f|\mathbf{H}'(t')|i > \tag{70}$$

•Einsetzen von obigem
$\mathbf{H}'(t) := -e\int d^3x\overline{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma^0\psi(\mathbf{x},t)V(\mathbf{x})$
und von

$$|i >= |e^-(\mathbf{p},s) >= \mathbf{a}_{\mathbf{S}}^\dagger(\mathbf{p})|0 > \tag{71}$$

sowie

$$|f >= |e^-(\mathbf{p}',s') >= \mathbf{a}_{\mathbf{S}'}^\dagger(\mathbf{p}')|0 > \tag{72}$$

•O.B.d.A. $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$ (abgelenkte Elektronen) $\Rightarrow S_{fi} =$
$= -i\int dt < e^-(\mathbf{p}',s')|(-e)\int d^3x$

$$\overline{\psi}(\mathbf{x},t)\gamma^0\psi(\mathbf{x},t)V(\mathbf{x})|e^-(\mathbf{p},s) > \tag{73}$$

•Einsetzen der Entwicklung der Feldoperatoren liefert:

$$S_{fi} = ie\int dtd^3xV(\mathbf{x})\cdot \tag{74}$$

$\int \frac{d^3p_1\,d^3p_2}{(2\pi)^6}\frac{1}{2p_1^0 2p_2^0}\cdot$
$\sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} < 0|\mathbf{a}_{\mathbf{S}'}(\mathbf{p}')$
$e^{ip_2x}\overline{u}_{r'}(p_2)\mathbf{a}_{r'}^\dagger(\mathbf{p}_2) + e^{-ip_2x}\overline{v}_{r'}(p_2)\mathbf{b}_{r'}(\mathbf{p}_2)\gamma^0 e^{ip_1x}\overline{v}_r(p_1)\mathbf{b}_r^\dagger(\mathbf{p}_2)$
$+e^{-ip_1x}\overline{u}_r(p_1)\mathbf{a}_r(\mathbf{p}_1)\mathbf{a}_S^\dagger(\mathbf{p})|0 >$
• Ausnutzung der Antivertauschungsregeln:
$S_{fi} = ie\int dtd^3xV(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{p}'^0-\mathbf{p}^0)t-(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{x})}$

$$\overline{u}_{s'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_s(\mathbf{p}) = \tag{75}$$

$$= ie2\pi\delta(\mathbf{p}'^0 - \mathbf{p}^0)\int d^3xV(\mathbf{x})e^{-i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{x}} \tag{76}$$

$$\overline{u}_{s'}(\mathbf{p})`\gamma^0 u_s(\mathbf{p}) \tag{77}$$

• Erläuterungen:

1. u und $\overline{u}$: für einlaufendes und auslaufendes Elektron im S-Matrixelement: entsprechende Dirac-Spinoren u und $\overline{u}$
2. δ-Distribution: $\Rightarrow$ Energie des gestreuten Elektrons = Energie des einlaufenden Elektrons (denn das statische Potential kann weder Energie aufnehmen noch abgeben)
3. Fourier-Integral des Potentials lässt sich mit Hilfe der Poisson-Gleichung umformen:

$$\mathbf{q} := Impuls\ddot{u}bertrag = \mathbf{p} - \mathbf{p}'(78)$$

$$\Rightarrow \int d^3xV(\mathbf{x})e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} = -\frac{1}{\mathbf{q}^2}\int d^3xV(\mathbf{x})\Delta e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} = \tag{79}$$

$$= -\frac{1}{\mathbf{q}^2}\int d^3xe^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}\Delta V(\mathbf{x}) = \tag{80}$$

$$= \frac{1}{\mathbf{q}^2}\int d^3xe^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}Ze\rho(\mathbf{x}) \tag{81}$$

Formfaktor: Fourier-Transformierte der normierten Ladungsverteilung bezeichnet man als deren Formfaktor:

$$F(\mathbf{q}) = \int d^3xe^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}\rho(\mathbf{x}) \tag{82}$$

•Einsetzen ergibt für das Matrixelement S_{fi}:
SS$_{fi} = ie2\pi\delta(\mathbf{p}'^0 - \mathbf{p}^0)\frac{Ze}{\mathbf{q}^2}F(\mathbf{q})\overline{u}_{s'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_s(\mathbf{p})\,(82b)S$

•nächster Schritt: Bestimmung der Übergangsmatrix und des Streuquerschnittes aus Formel (82b):

•Annahme: ursprüngliches Elektron unpolarisiert, Polarisation der gestreuten Elektronen nicht beobachtet

• **Übergangswahrscheinlichkeit dw** in die Endzustände in einem Impulsintervall $d^3\mathbf{p}'$:
Mittels S-Matrix:
$dw = \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'^0}$

$$\sum_{s,s'}{}' \left| < e^-(\mathbf{p}', s') | \{S | e^-(\mathbf{p}, s) > \right|^2 = \tag{83}$$

$$= \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2p'^0 e^2 (Ze)^2 [2\pi\delta(\mathbf{p}'^0 - \mathbf{p}^0)]^2}$$

$\frac{1}{|\mathbf{q}|^4}\sum'_{s,s'} \left|\overline{u}_{s'}(\mathbf{p}')\gamma^0 u_{s(\{p})}\right|^2$

•Erläuterungen:

1. $\sum'$ bedeutet Mittelung über die Polarisationsrichtungen im Anfangszustand und Summation über die Polarisationsrichtungen im Endzustand

2. Phasenraumfaktor $(2\pi)^3 2p'^0$ ergibt sich aus Bed., dass Summe über Endzustände Projektionsoperator liefert
   • **Problem:** Quadrat der δ-Distribution
   • **Lösung:** Fermis Trick: für eine der beiden δ-Distributionen Integraldarstellung:
   $\Rightarrow (2\pi\delta(p'^0 - p^0))^2 =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(p'^0 - p^0)t} \cdot 2\pi\delta(p'^0 - p^0) = \tag{86}$$

   $(\int_{-\infty}^{\infty} dt) 2\pi\delta(p'^0 - p^0)$

   • Das nächste **Problem** ist das Intervall von $-\infty$ bis ∞, ein unendlich langes Experiment ist hier nicht sinnvoll.
   • Die **Lösung** ist: Wir machen die Annahme, dass das Potential sehr langsam adiabatisch ein- und ausgeschaltet wird.
   • Wir ersetzen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \longrightarrow T \tag{87}$$

$$(2\pi\delta(p'^0 - p^0))^2 \longrightarrow T 2\pi\delta(p'^0 - p^0). \tag{88}$$

   • Die Übergangsrate $\frac{dw}{T}$ ist wohldefiniert:
   $\frac{dw}{T} = \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'^0} e^2 (Ze)^2 2\pi\delta(p'^0 - p^0)\frac{1}{|\mathbf{q}|^4}$

$$|F(\mathbf{q})|^2 \sum_{s,s'}{}' \left|\overline{u}_{s'}(p')\gamma^0 u_s(p)\right|^2 \tag{89}$$

   •Def. Streuquerschnitt σ:

$$d\sigma = \frac{dw/T}{\Phi}$$

(90)

• Offensichtlich fehlt uns noch der **Fluss Φ**: **Bestimmung:**
• Die Zustände seien auf δ-Distributionen im Impuls normiert.
• Wir wenden einen ähnlicher Trick wie bei der Zeit an.
$< e^-(\mathbf{p}_1, s_1)|e^-(\mathbf{p}_2, s_2) >=$

$$= \delta_{s_1 s_2}(2\pi)^3 2p_1^0 \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) = \tag{91}$$

$$\delta_{s_1 s_2} 2p_1^0 \int_{R^3} d^3x e^{i(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)\mathbf{x}} \tag{92}$$

•Bem. zum Integral:
(a) Über den ganzen Ortsraum (mit $V = \infty$) zu integrieren ist hier physikalisch nicht sinnvoll. Stattdessen nehmen wir ein endliches Volumen V.
(b) Das Integral divergiert für $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$.
• V:=zur Verfügung stehendes Volumen.
• Für die Normierung eines Zustands festen Impulses und fester Spinrichtung setzen wir:
$< e^-(\mathbf{p}_1, s_1)|e^-(\mathbf{p}_2, s_2) >_{s_1=s_2}=$

$$= 2p^0 \cdot \int_V d^3x = 2p^0 \cdot V. \tag{93}$$

• Es ist die Wahrscheinlichkeitsdichte pro Volumeneinheit für diesen Zustand $= 2p^0$.
• v := Geschwindigkeit der einlaufenden e^-.
• $\Rightarrow$ Fluss $\Phi = |v| \cdot 2p^0 = \frac{p}{p^0} 2p^0 = 2\,|p|$
• $\Rightarrow$ für Differential des Streuquerschnittes $d\sigma$:

$$d\sigma = \frac{1}{2\,|\mathbf{p}|} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 2p'^0} e^2(Ze)^2 2\pi\delta(p'^0 - p^0) \frac{1}{|\mathbf{q}|^4} \tag{94}$$

$|F(\mathbf{q})|^2 \sum'_{s,\,s'} \left|\overline{u}_{s'}(p')\gamma^0 u_s(p)\right|^2$

• Den differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma$ bezüglich des Raumwinkels Ω des gestreuten e^- erhalten wir via Integration über $|\mathbf{p}'|$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\,|\mathbf{p}|} e^2(Ze)^2 \int_0^\infty \frac{d\,|\mathbf{p}'|\,|\mathbf{p}'|^2}{2p'^0(2\pi)^2} 2\pi\delta(p'^0 - p^0) \frac{1}{|\mathbf{q}|^4} \tag{95}$$

$|F(\mathbf{q})|^2 \sum'_{s,\,s'} \left|\overline{u}_{s'}(p')\gamma^0 u_s(p)\right|^2 =$

$$= \frac{e^2(Ze)^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{|\mathbf{q}|^4} |F(\mathbf{q})|^2 \sum_{s,\,s'}{}' \left|\overline{u}_{s'}(p')\gamma^0 u_s(p)\right|^2 \tag{96}$$

•Zur Mittelung bzw. Summation über die Spinfreiheitsgrade sei an die Formeln für die Spinsummen erinnert.

$$\sum_{s,\,s'}{}' \left|\overline{u}_{s'}(p')\gamma^0 u_s(p)\right|^2 = \tag{97}$$

$= \frac{1}{2} \sum_{s,\,s'} \overline{u}_{s'}(p')\gamma^0 u_s(p) \overline{u}_s(p)\gamma^0 u_{s'}(p') =$

$$= \frac{1}{2} Sp[(\mathbf{slash}(\mathbf{p})' + m)\gamma^0(\mathbf{slash}(\mathbf{p}) + m)\gamma^0] \tag{98}$$

•Die Spur von γ-Matrizen in der obigen Gleichung kann durch **Einsetzen** der expliziten Ausdrücke ausgerechnet werden.
•**eleganter:** Benutzung der Formeln für die Spuren von Produkten von γ-Matrizen:
Anhang [Nachtmann]

$$\Rightarrow \sum_{s,\,s'}{}' \left|\overline{u}_{s'}(p')\gamma^0 u_s(p)\right|^2 = 2(p_0^2 + \mathbf{p}'\mathbf{p} + m^2) = \tag{99}$$

$4(\mathbf{p}^2\cos^2(\frac{\vartheta}{2})+m^2)$
mit dem Streuwinkel ϑ:

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{p}'\cdot\mathbf{p}}{|\mathbf{p}'|\;|\mathbf{p}|},\ (0\le\vartheta\le\pi) \tag{100}$$

$$\bullet\,|\mathbf{q}|^2 = (\mathbf{p}-\mathbf{p}')^2 = 4\,|\mathbf{p}|^2\sin^2(\frac{\vartheta}{2}) \tag{101}$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2(\frac{e^2}{4\pi})^2\frac{1}{4\,|\mathbf{p}|^2}\frac{\cos^2(\frac{\vartheta}{2})+\frac{m^2}{|\mathbf{p}|^2}}{\sin^4(\frac{\vartheta}{2})}\,|F(\mathbf{q})|^2 \tag{102}$$

• bei Punktladung im Streuzentrum:
$\rho(\mathbf{x}) = \delta^3(\mathbf{x})$ und $F(\mathbf{q}) = \int d^3x e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}\delta^3(\mathbf{x})$
• Dies eingesetzt ergibt die **Mottsche Streuformel** (nach dem Nobelpreisträger Mott):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2(\frac{e^2}{4\pi})^2\frac{\cos^2(\frac{\vartheta}{2})+\frac{m^2}{|\mathbf{p}|^2}}{4\,|\mathbf{p}|^2\sin^4(\frac{\vartheta}{2})} \tag{103}$$

• Mottsche Streuformel = relativistische Verallgemeinerung der Rutherfordschen Streuformel, Beweis:

$$|\mathbf{p}| \ll m \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2(\frac{e^2}{4\pi})^2\frac{1}{E_{kin}^2}\frac{1}{16\,|\mathbf{p}|^2\sin^4(\frac{\vartheta}{2})} \tag{104}$$

Das ist die Rutherfordsche Streuformel mit der nichtrelativistischen Energie $E_{kin} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$.

• Das andere Extrem stellt der **extrem relativistische Grenzfall** dar: $|\mathbf{p}| \gg m$.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2(\frac{e^2}{4\pi})^2$$

•Es gibt den sog. dimensionslos gemachter Streuquerschnitt:

$$\Rightarrow |\mathbf{p}|^2\frac{d\sigma}{d\Omega} = Z^2(\frac{e^2}{4\pi})^2\frac{\cos^2(\frac{\vartheta}{2})}{4\sin^4(\frac{\vartheta}{2})}. \tag{106}$$

• **Folgerung:** Der dimensionlos gemachte Streuquerschnitt hängt im Hochenergielimes **nicht** vom Impuls des einlaufenden Elektrons ab, er zeigt **Skalenverhalten**.

Die allgemeine Definition von S- und T-Matrix

•allgemeinere Reaktion: n Teilchen a_i mit zugeh. Viererimpulsen p_i streuen und ergeben m Teilchen b_j mit zugeh. Viererimpulsen p'_j:

$$a_1(p_1) + \ldots a_n(p_n) \longrightarrow b_1(p'_1) \ldots b_m(p'_m) \tag{107}$$

•Normierung der Ein-Teilchen-Zustände,
•wieder WW- oder Diracbild,
•Dgl.:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|t >= \mathbf{H}'(t)|t >, \tag{108}$$

•Anfangsbedingung:

$$\lim_{t\to-\infty} |t >= |i >= |a_1(p_1) \ldots a_n(p_n) > . \tag{109}$$

Allg. Def. der S-Matrix

• Die Definition des S-Operators lautet wie zuvor:

$$\lim_{t\to+\infty} |t >= \mathbf{S}|i > \tag{110}$$

• entsprechendes **Übergangsmatrixelement für Endzustand** $|f >= |b_1(p'_1) \ldots b_m(p'_m) >$**:**

$$S_{fi} =< b_1(p'_1) \ldots b_m(p'_m)|\mathbf{S}|a_1(p_1) \ldots a_n(p_n) > \tag{111}$$

Allg. Def. der T-Matrix

•Unser nächstes Ziel ist das "Abspalten" des Anteils der S-Matrix, der den nicht reagierenden Teilchen entspricht:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + Rest \tag{112}$$

• Fall, dass keine äußeren Potentiale vorhanden (⇒ Viererimpulserhaltung: plausibel: Rest enthält δ-Distribution der Viererimpulse; Def. T-Matrix:

$$\Rightarrow S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta(P_f - P_i) < f|\mathbf{T}|i > \tag{113}$$

mit

$$P_f = p'_1 + \ldots + p'_m, \tag{114}$$

$$P_i = p_1 + \ldots + p_n \tag{115}$$

und

$$< f|\mathbf{T}|i >\equiv< b_1(p'_1) \ldots b_m(p'_m)|\mathbf{S}|a_1(p_1) \ldots a_n(p_n) > \tag{116}$$

•Bem.: Die S- und T-Matrixelemente sind Lorentz-invariante Funktionen.

2-Teilchen-Reaktion

•Häufig hat man eine Reaktion mit zwei Teilchen im Anfangszustand:
Spezialfall mit n = 2:

$$a_1(p_1) + \ldots + a_2(p_2) \longrightarrow b_1(p_1') + \ldots b_m(p_m') \tag{117}$$

• Die Definition des Streuquerschnitts für diese Reaktion lautet:

$$\sigma = \frac{\ddot{U}bergangsrate}{Fluss\ der\ einlaufenden\ Teilchen} \tag{118}$$

• Er ist meist bezogen auf das Ruhesystem eines Teilchens im Anfangszustand.
• Das Resultat ist unabhängig von der Wahl des Teilchens.

Übergangswahrscheinlichkeit für die Reaktion

• Wir haben:

$$dw_{fi} = [(2\pi)^4 \delta(p_1' + \ldots + p_m' - p_1 - p_2)]^2 \tag{119}$$

$$\frac{1}{2p_1^0 2p_2^0} (\frac{1}{V})^2 \prod_{i=1}^{m} \frac{d^3 p_i'}{(2\pi)^3 2p_i^{0\prime}} \tag{120}$$

$$\big| < b_1(p_1') \ldots b_m(p_m') | \mathbf{T} | a_1(p_1) a_2(p_2) > |^2 (121)$$

• Für Quadrat der δ-Distribution behelfen wir uns wieder mit Fermis Trick:
• Die Wechselwirkung sei über das Volumen V und die Zeit T eingeschaltet.
$\Rightarrow [(2\pi)^4 \delta(p_1' + \ldots + p_m' - p_1 - p_2)]^2 =$

$$= \int_{VT} dx e^{i}(p_1' + \ldots + p_m' - p_1 - p_2) x \cdot \tag{122}$$

$$(2\pi)^4 \delta(p_1' + \ldots + p_m' - p_1 - p_2)]^2 = \tag{123}$$

$$= VT (2\pi)^4 \delta(p_1' + \ldots + p_m' - p_1 - p_2)]^2 \tag{124}$$

• $\Rightarrow$ Übergangsrate $\frac{dw_{fi}}{T}$:
$\frac{dw_{fi}}{T} = \frac{1}{V} \frac{1}{2p_1^0 2p_2^0} (2\pi)^4 \delta(p_1' + \ldots + p_m' - p_1 - p_2)]^2$

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{d^3 p_i'}{(2\pi)^3 2p_i^{0\prime}} \big| < b_1(p_1') \ldots b_m(p_m') | \mathbf{T} | a_1(p_1) a_2(p_2) > |^2 (125)$$

(Dies gilt für jedes Bezugssystem.)
•Spezialisieren auf Ruhesystem von a_2:
•m_1 := Masse von a_1,
•m_2 := Masse von a_2,
•Φ := Fluss der Teilchen a_1

$$\Rightarrow p_2^0 = m_2 \tag{126}$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{1}{V} \frac{|\mathbf{p}_1|}{p_1^0} = \frac{1}{V} \frac{1}{p_1^0} \frac{w(s, m_1^2, m_2^2)}{2m_2} \tag{127}$$

$$s = (p_1 + p_2)^2. \tag{128}$$

• Verwendet wurde die Gleichung für den Impuls von a_1 im Ruhesystem von a_2.
$\Rightarrow$ für Streuquerschnitt σ:

$$d\sigma = \frac{dw_{fi}/T}{\Phi} = \tag{129}$$

$$\frac{1}{2w(s, m_1^2, m_2^2)} \prod_{i=1}^{m} \frac{d^3 p_i'}{(2\pi)^3 2p_i^{0\prime}} \tag{130}$$

$(2\pi)^4 \delta(p_1' + \ldots + p_m' - p_1 - p_2)]^2$
$\big| < b_1(p_1') \ldots b_m(p_m') | \mathbf{T} | a_1(p_1) a_2(p_2) > |^2$

• **Bem.: Die Teilchen a_1 und a_2 gehen völlig symmetrisch ein.**

• $\frac{d^3p'_i}{2p'^0_i}$ **ist ein Lorentz-invariantes Maß:**

$$\frac{d^3p'_i}{2p'^0_i} = dp'_i\delta_+(p'^2_i - m'^2_i), \tag{131}$$

$$\delta_+(p'^2_i - m'^2_i) := \delta(p'^2_i - m'^2_i)\theta(p'^0_i), \tag{132}$$

$$dp'_i = dp'^0_i dp'^1_i dp'^2_i dp'^3_i. \tag{133}$$

Für den totalen Streuquerschnitt σ_{tot} folgt:
$\sigma_{tot}(a_1 + a_2 \longrightarrow b'_1 + \ldots + b'_m) =$

$$= \frac{1}{2w(s,m_1^2,m_2^2)} \int \prod_{i=1}^{m} (\frac{dp'_i}{(2\pi)^3})\delta_+(p'^2_i - m'^2_i)) \tag{134}$$

$(2\pi)^4\delta(p'_1 + \ldots + p'_m - p_1 - p_2)]^2$
$\big|< b_1(p'_1)\ldots b_m(p'_m)|\mathbf{T}|a_1(p_1)a_2(p_2) > |^2$
• **totaler Streuquerschnitt Lorentz-invariant, da T-Matrixelement Lorentz-invariant**
• **Es gilt:**

$$\frac{dw_{fi}}{T} = \frac{1}{V}\frac{w(s,m_1^2,m_2^2)}{2p_1^0p_2^0}d\sigma \tag{135}$$

praktisches Bsp.: zwei sich kreuzende Teilchenstrahlen

•**Teilchenstrahlen als homogen und kontinuierlich angenommen**
•**Teilchendichten seien n_1 und n_2.**
• **Die Übergangsrate bezieht sich auf Teilchendichten $\frac{1}{V}$.**
• **Übergangsrate pro Volumeneinheit:**

$$\frac{dw_{fi}}{VT} = n_1n_2\frac{w(s,m_1^2,m_2^2)}{2p_1^0p_2^0}d\sigma \tag{136}$$

• **Die Reaktionsrate dN für ein Wechselwirkungsvolumen W lautet:**

$$dN = L \cdot d\sigma \tag{137}$$

mit der Luminosität L:

$$L = W \cdot n_1n_2\frac{w(s,m_1^2,m_2^2)}{2p_1^0p_2^0}. \tag{138}$$

• **Für den Spezialfall mit gleichen Strahlenergien und den Hochenergielimes ($s \gg m_1^2, m_2^2$) gilt:**

$$p_1^0 \approx p_2^0 \approx \frac{\sqrt{s}}{2},\; L \approx 2w \cdot n_1 \cdot n_2. \tag{139}$$

•**Die Dimension der Luminosität ist: $s^{-1}cm^{-2}$.**
•**F_1, F_2 sind die Querschnitte der Strahlen.**
• **Für den Spezialfall mit Geschwindigkeiten ≈ 1 und Teilchenströme I folgt:**

$$I_1 = n_1F_1, \tag{140}$$

$$I_2 = n_2F_2. \tag{141}$$

$$\Rightarrow L \approx 2\frac{W}{F_1F_2}I_1I_2 \tag{142}$$

• $\Rightarrow$ **Bei gegebenen Teilchenströmen erzielt man große Luminosität durch möglichst große Fokussierung, denn W nimmt mit der dritten Potenz, $F_1 \cdot F_2$ aber mit der vierten Potenz der Lineardimension ab.**

Unitaritätsrelation für die S-Matrix

• **normierter Anfangszustand** $|i>$**:**

$$<i|i>=1 \tag{143}$$

• **Die Wahrscheinlichkeit, den Endzustand** $|f>$ **für t**$\rightarrow +\infty$ **zu finden, ist gegeben durch das Absolutquadrat des S-Matrixelementes:**

$$|<f|\mathbf{S}|i>|^2. \tag{144}$$

• **Die Wahrscheinlichkeit, irgendeinen Endzustand zu finden, ist gleich 1.**

$$\Rightarrow 1 = \sum_f |<f|\mathbf{S}|i>|^2 = \sum_f <i|\mathbf{S}^\dagger|f><f|\mathbf{S}|i>=<i|\mathbf{S}^\dagger\mathbf{S}|i> \tag{145}$$

muss für beliebige Zustände gelten.
$\Rightarrow$ **Damit haben wir schon die Unitaritätsrelation für die S-Matrix hergeleitet:**

$$Operatorbeziehung\,\mathbf{S}^\dagger\mathbf{S} = 1.$$

Optisches Theorem: Das optische Theorem zeigt den Zusammenhang zwischen dem Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude mit dem totalen Streuquerschnitt auf.

Von der Unitaritätsrelation lässt sich das Matrixelement mit beliebigen normierten Zuständen $|i>$ **und** $|i'>$ **nehmen:**

$$\Rightarrow <i'|\mathbf{S}^\dagger\mathbf{S}|i>=\sum_f <f|\mathbf{S}|i'>^*<f|\mathbf{S}|i>=\delta_{i'i}. \tag{147}$$

• **In dieser Gleichung drücken wir die S-Matrix durch die T-Matrix ausdrücken, für beliebige Zustände** $|i>$ **und** $|i'>$ **mit gleichen Gesamtimpulsen** $P_i = P_{i'}$ **gilt:** $\frac{1}{2i}<i'|\mathbf{T}|i> - <i|\mathbf{T}|i'>^*=$

$$= \frac{1}{2}\sum_f (2\pi)^4\delta(P_f - P_i) <f|\mathbf{T}|i'>^*<f|\mathbf{T}|i>. \tag{148}$$

• **Das optische Theorem ist ein wichtiger Spezialfall dieser Gleichung (**$|i>=|i'>=a_1(p_1)a_2(p_2)>$**):**

$$Im <i|\mathbf{T}|i>=w(s,m_1^2,m_2^2)\cdot\sigma_{tot}(a_1+a_2\rightarrow X). \tag{149}$$

X ist die Summe über alle möglichen Endzustände.
Das optische Theorem verknüpft somit den Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude mit dem totalen Streuquerschnitt.

Zerfallsrate eines instabilen Teilchens

• **Wichtig ist natürlich auch der Zerfall eines instabilen Teilchens:**

$$a(p) \longrightarrow b_1(p'_1) + \ldots + b_m(p'_m). \tag{150}$$

• **Die Zerfallsraten sind auf das Ruhesystem des zerfallenden Teilchens bezogen.** $\Rightarrow d\Gamma(a(p) \longrightarrow b_1(p'_1) + \ldots + b_m(p'_m)) =$
$\frac{1}{2m_a}(2\pi)^4\delta(p'_1 + \ldots + p'_m - p)\cdot$

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{d^3p'_i}{(2\pi)^3 2p'^0_i} | < b_1(p'_1) \ldots b_m(p'_m)|\mathbf{T}|a(p) > |^2 \tag{151}$$

• **Totale Zerfallsrate** Γ_a **Sie erhalten wir daraus durch Integration über den gesamten Phasenraum und Summation über alle Zerfallskanäle.**

• **Stichwort: Wigner-Weisskopf-Methode**

Quellen:

• **Nachtmann, Otto: Elementarteilchenphysik - Phänomene und Konzepte, Braunschweig, 1986, Vieweg, ISBN 3-528-08926-1**

• **Köpp, Gabriele; Krüger, Frank: Einführung in die Quanten-Elektrodynamik, Stuttgart, 1997, Teubner, ISBN 3-519-03235-X**

• **Perkins, Donald H.: Hochenergiephysik, Bonn, München, Reading, Mass (u.a.), 1990, Addison-Wesley, ISBN 3-89319-111-9**

• **Waloschek, Pedro: Wörterbuch Physik, München, 1998, Deutscher Taschenbuch Verlag, ISBN 3-423-32521-7**