# Seminar Streutheorie

## Formale Streutheorie

*Florian Beyer*

30. 5. 2001

In vielen Situationen möchte man den Wirkungsquerschnitt eines Streufeldes bestimmen, dessen Potential $\mathcal{V}$ aus der Theorie bekannt ist oder näherungsweise angenommen werden kann (z.B. Kastenpotential). Zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes bzw. der Streuamplitude $f$ werden die Matrixelemente der Streumatrix $\mathcal{S}$ in Impulsdarstellung benötigt (Siehe zweiter Vortrag).

# 1 Greenscher Operator

**Definition** Es werden die **Greenschen Operatoren** $\mathcal{G}(z)$ bzw. $\mathcal{G}^0(z)$ durch folgende Gleichungen definiert

$$\begin{aligned} (z - \mathcal{H})\mathcal{G}(z) &= \mathbb{1} \\ (z - \mathcal{H}^0)\mathcal{G}^0(z) &= \mathbb{1}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei ist bis auf Weiteres $z \in \mathbb{C}$ und $\mathcal{H}$ der Hamiltonoperator des Systems mit

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 + \mathcal{V} \tag{2}$$

($\mathcal{V}$ Operator der potentiellen Energie).

**Zusammenhang mit Greenschen Funktionen** Die Greenschen Operatoren stehen in direkter Beziehung zu Greenschen Funktionen, die stets dort Verwendung finden, wo lineare inhomogene Differentialgleichungen auf partikuläre Lösungen untersucht werden sollen. In Ortsdarstellung wird nämlich die Definitionsgleichung (1) z.B. von $\mathcal{G}(z)$ zu

$$\int d^3x'' \underbrace{\langle \vec{x}'|z - \mathcal{H}|\vec{x}''\rangle}_{=\left(z+\frac{\Delta}{2m}-V(\vec{x}')\right)\delta(\vec{x}''-\vec{x}')} \langle \vec{x}''|\mathcal{G}(z)|\vec{x}\rangle = \delta(\vec{x} - \vec{x}').$$

Also ist der Greensche Operator in Ortsdarstellung identisch mit der Greenschen Funktion des Operators $z - \mathcal{H}$ in Ortsdarstellung.

**Definitionsbereich** Die Gleichungen (1) legen die Greenschen Operatoren nur für solche $z$ eindeutig fest, die bestimmten Bedingungen unterliegen. Sei $z = E_n$ ($n$-ter Energieeigenwert im diskreten Teil des Spektrums von $\mathcal{H}$). Der Operator $E_n - \mathcal{H}$ besitzt kein Inverses, denn er bildet *einen* (im entarteten Fall) bzw. *den* (im nicht-entarteten Fall) dazugehörigen Eigenvektor $|n\rangle$ auf das Nullelement des Bild-Hilbertraums ab

$$(E_n - \mathcal{H})|n\rangle = 0.$$

Dieses hat aber wegen der Linearität auch das Nullelement des Ur-Hilbertraums zum Urbild, weswegen die Invertierung nicht eindeutig ist. Folglich existiert $\mathcal{G}(z)$ nicht, wenn $z$ Eigenwert von $\mathcal{H}$ ist. Man überlegt sich nun, dass $\mathcal{G}(z)$ ***genau dann*** **nicht definiert ist, wenn $z$ ein Eigenwert von $\mathcal{H}$ ist**. Dieses gilt sowohl für den diskreten, als auch für den kontinuierlichen Teil des $\mathcal{H}$-Spektrums.

**Entwicklung nach Energieeigenvektoren** Ist $z$ kein Eigenwert von $\mathcal{H}$, so kann Gl. (1) nach $\mathcal{G}(z)$ aufgelöst werden. Weiterhin kann der Identitätsoperator $\mathbb{1}$ nach Projektoren auf Energieeigenvektoren entwickelt werden. $\mathcal{H}$ besitzt zum einen ein diskretes Teilspektrum, wobei diese Energiewerte angenommen werden, wenn die Teilchenenergie $E < 0$ ist (gebundenes System). $\mathcal{H}$ hat aber auch einen kontinuierlichen Teil des Spektrums, wenn $E > 0$ (ungebundenes System). Daraus resultiert die folgende Entwicklung

$$G(z) = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{z - E_n} + \int_0^\infty dE\, \frac{|E\rangle\langle E|}{z - E} \quad \text{mit} \quad E_n < 0 \tag{3}$$

bzw. für alle $|\psi\rangle, |\chi\rangle$ aus dem Hilbertraum

$$\langle\chi|G(z)|\psi\rangle = \sum_n \frac{\langle\chi|n\rangle\langle n|\psi\rangle}{z - E_n} + \int_0^\infty dE\, \frac{\langle\chi|E\rangle\langle E|\psi\rangle}{z - E}. \tag{4}$$

Bei Entartung treten weitere Summen bzw. Integrale über die zusätzlichen Quantenzahlen auf. Man betrachte die letzte Gleichung. Im Definitionsbereich von $\mathcal{G}(z)$ ist das Matrixelement $\langle\chi|G(z)|\psi\rangle$ eine holomorphe Funktion von $z$. Aus dem diskreten Teil des $\mathcal{H}$-Spektrums folgern wir, dass Pole erster Ordnung vorliegen, wenn $z$ gegen einen Eigenwert von $\mathcal{H}$ läuft, mit dem Residuum $\langle\chi|n\rangle\langle n|\psi\rangle$ an der Stelle des $n$-ten Eigenwerts. Aus dem kontinuierlichen Teil des Spektrums sehen wir: die Matrixelemente von $G(z)$ sind für alle $z \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ nicht definiert. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\left[\langle\chi|G(E_0+i\epsilon)|\psi\rangle - \langle\chi|G(E_0-i\epsilon)|\psi\rangle\right] \\
&= \int_0^\infty dE \lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{E_0-E+i\epsilon} - \frac{1}{E_0-E-i\epsilon}\right]\langle\chi|E\rangle\langle E|\psi\rangle \\
&= -\,2\pi i\langle\chi|E_0\rangle\langle E_0|\psi\rangle,
\end{aligned} \tag{5}$$

denn es ist zu behaupten, dass

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{E_0-E+i\epsilon} - \frac{1}{E_0-E-i\epsilon}\right] = -2\pi i\delta(E_0-E). \tag{6}$$

Dazu der Beweis: Man prüfe die definierenden Eigenschaften einer $\delta$-Distribution

1. Trivialerweise gilt für $E \neq E_0$
$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{E_0-E+i\epsilon} - \frac{1}{E_0-E-i\epsilon}\right] = 0$$

2. Zum anderen finden wir für alle $\epsilon \neq 0$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\left[\frac{1}{E_0-E+i\epsilon} - \frac{1}{E_0-E-i\epsilon}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} dE\,\frac{-2i\epsilon}{(E-E_0-i\epsilon)\,(E-E_0+i\epsilon)}.$$
Da der Integrand quadratisch mit $E$ abfällt, kann über den ganzen Halbkreis z.B. in der oberen komplexen Halbebene und die reelle Achse als geschlossener Weg integriert werden, wobei $z = E$ gesetzt wird
$$= \oint dz\,\frac{-2i\epsilon}{(z-E_0-i\epsilon)\,(z-E_0+i\epsilon)}.$$
Dabei wird um den Pol erster Ordnung bei $z = E_0 + i\epsilon$ mit dem Residuum $-1$ integriert. Nach dem Residuumsatz gilt dann
$$= -2\pi i,$$
woraus die Behauptung folgt.

Man überträgt die Eigenschaften der Matrixelemente von $\mathcal{G}(z)$ nach Gl. (3) auf den Operator $\mathcal{G}(z)$ selbst. Es gilt also: Der Operator $\mathcal{G}(z)$ ist holomorph auf seinem Definitionsbereich, welcher alle komplexen $z$ bis auf die Eigenwerte von $\mathcal{H}$ umfasst (insbesondere gilt $z \notin \mathbb{R}^{\geq 0}$). $\mathcal{G}(z)$ hat bei einem diskreten Eigenwert von $\mathcal{H}$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum, das dem Projektor auf den entsprechenden Eigenraum entspricht. Bei Annäherung an eine Stelle $E_0$ auf der positiv reellen Achse tritt für $G(z)$ eine Diskontinuität analog zu Gl. (5) auf, die proportional zum Projektor auf dem zu $E_0$ gehörigen Teil des Hilbertraums ist. **Die Kenntnis von $\mathcal{G}(z)$ entspricht der Lösung des kompletten Eigenwertproblems von $\mathcal{H}$.**

**Lippmann-Schwinger-Gleichung** Um $\mathcal{G}(z)$ berechnen zu können, stellt man folgende Operator-Identität auf, die für alle invertierbaren Operatoren $A$ und $B$ gültig ist

$$A^{-1} = B^{-1} + B^{-1}(B - A)A^{-1}.$$

Setzt man zunächst $A = z - \mathcal{H}$ und $B = z - \mathcal{H}^0$, so gilt

$$\boxed{\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}^0(z) + \mathcal{G}^0(z)\mathcal{V}\mathcal{G}(z)} \tag{7}$$

mit Gl. (2). Andererseits findet man für $A = z - \mathcal{H}^0$ und $B = z - \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} & \mathcal{G}^0(z) = \mathcal{G}(z) - \mathcal{G}(z)\mathcal{V}\mathcal{G}^0(z) \\ \Leftrightarrow \quad & \boxed{\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}^0(z) + \mathcal{G}(z)\mathcal{V}\mathcal{G}^0(z)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Diese Gleichung heißen **Lippmann-Schwinger-Gleichungen**. Sie erlauben prinzipiell eine Berechnung von $\mathcal{G}(z)$, da $\mathcal{G}^0(z)$ in der Impulsdarstellung (und somit in jeder Darstellung) bekannt ist

$$\mathcal{G}^0(z)|\vec{p}\rangle = \frac{1}{z - E_p}|\vec{p}\rangle \quad \text{mit} \quad E_p = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{9}$$

und $\mathcal{V}$ vorgegeben ist. In einer kontinuierlichen Basis (z.B. der besonders wichtigen Impulsdarstellung) handelt es sich bei den Lippmann-Schwinger-Gleichungen um Integralgleichungen zur Bestimmung von $G(z)$. Die Methode zur Berechnung von $\mathcal{G}(z)$ ist meist ein Reihenansatz (**Bornsche Reihe**), der weiter unten behandelt wird.

## 2 $\mathcal{T}$-Operator

**Definition** Um einen direkten Bezug zur Streuamplitude zu bekommen, definiert man einen weiteren Operator

$$\mathcal{T}(z) := \mathcal{V} + \mathcal{V}\mathcal{G}(z)\mathcal{V} \tag{10}$$

mit dem gleichen Definitionsbereich wie $\mathcal{G}(z)$. Er besitzt dieselben Eigenschaften bezüglich Holomorphie und Pole wie $\mathcal{G}(z)$.

**Weitere Eigenschaften** Wendet man auf die Definitionsgleichung (10) von $\mathcal{T}(z)$ den Operator $\mathcal{G}^0(z)$ von links an, so erhält man mit Gl. (7)

$$\mathcal{G}^0(z)\mathcal{T}(z) := \left(\mathcal{G}^0(z) + \mathcal{G}^0(z)\mathcal{V}\mathcal{G}(z)\right)\mathcal{V} = \mathcal{G}(z)\mathcal{V}. \tag{11}$$

Dasselbe mit $\mathcal{G}^0(z)$ von rechts ergibt mit Gl. (8)

$$\mathcal{T}(z)\mathcal{G}^0(z) := \mathcal{V}\left(\mathcal{G}^0(z) + \mathcal{G}(z)\mathcal{V}\mathcal{G}^0(z)\right) = \mathcal{V}\mathcal{G}(z). \tag{12}$$

Setze Gl. (12) in Gl. (7) ein

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}^0(z) + \mathcal{G}^0(z)\mathcal{T}(z)\mathcal{G}^0(z),$$

was eine Berechnungsvorschrift für $\mathcal{G}(z)$ bei bekanntem $T(z)$ darstellt. Andersherum ist die Definitionsgleichung von $\mathcal{T}(z)$ (10) eine Berechnungsvorschrift für $T(z)$ bei bekanntem $\mathcal{G}(z)$. Es ist demnach gleichgültig, mit welchem der beiden Operatoren gerechnet wird.

**Lippmann-Schwinger-Gleichung für $\mathcal{T}(z)$** Einsetzen von Gl. (11) in Definition (10) ergibt

$$\boxed{\mathcal{T}(z) = \mathcal{V} + \mathcal{V}\mathcal{G}^0(z)\mathcal{T}(z)}. \tag{13}$$

Man nennt diese Gleichung **Lippmann-Schwinger-Gleichung** für $\mathcal{T}(z)$, da sie dieselbe Struktur wie die Lippmann-Schwinger-Gleichung für $\mathcal{G}(z)$ besitzt. Wieder gilt: Mit Hilfe dieser Gleichung ist der zu der Gleichung gehörige Operator $\mathcal{T}(z)$ prinzipiell berechenbar.

**Zusammenhang mit Streuamplitude** Berechne Matrixelemente von $S$

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\mathcal{S}|\chi\rangle &= \langle\psi|\Omega_-^\dagger\Omega_+|\chi\rangle \\
&= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t'\to-\infty}} \langle\psi|U^{0\dagger}(t)U(t)U^\dagger(t')U^0(t')|\chi\rangle \\
&= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t'\to-\infty}} \langle\psi|e^{i\mathcal{H}^0t}e^{-i\mathcal{H}t}e^{i\mathcal{H}t'}e^{-i\mathcal{H}^0t'}|\chi\rangle \\
&= \lim_{t\to+\infty} \langle\psi|e^{i\mathcal{H}^0t}e^{-2i\mathcal{H}t}e^{i\mathcal{H}^0t}|\chi\rangle \quad (t' = -t),
\end{aligned}$$

wobei die Definitionen der Møller-Operatoren $\Omega_\pm$ und der Streumatrix $\mathcal{S}$ aus dem ersten Seminarvortrag verwendet wurden. Nun ist

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[e^{i\mathcal{H}^0t}e^{-2i\mathcal{H}t}e^{i\mathcal{H}^0t}\right] \\
=&i\left\{\mathcal{H}^0e^{i\mathcal{H}^0t}e^{-2i\mathcal{H}t}e^{i\mathcal{H}^0t} - 2e^{i\mathcal{H}^0t}\mathcal{H}e^{-2i\mathcal{H}t}e^{i\mathcal{H}^0t} + e^{i\mathcal{H}^0t}e^{-2i\mathcal{H}t}\mathcal{H}^0e^{i\mathcal{H}^0t}\right\} \\
=&-i\left\{e^{i\mathcal{H}^0t}Ve^{-2i\mathcal{H}t}e^{i\mathcal{H}^0t} + e^{i\mathcal{H}^0t}e^{-2i\mathcal{H}t}Ve^{i\mathcal{H}^0t}\right\}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$-i\int_0^\infty dt\,\langle\psi|\{\ldots\}|\chi\rangle = \langle\psi|S|\chi\rangle - \langle\psi\mid\chi\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle\psi|S|\chi\rangle = \langle\psi\mid\chi\rangle - i\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_0^\infty dt\,e^{-\epsilon t}\langle\psi|\{\ldots\}|\chi\rangle.$$

Der Exponentialfaktor in der letzten Gleichung kann eingeführt werden, weil das Integral absolut konvergiert. Eine anschauliche Begründung ist, dass dieser Faktor eine Dämpfung des Potentials für hohe Zeiten darstellt, bei denen das Potential nach Voraussetzung von sich aus schon aufgehört haben soll zu wirken, da das gestreute Teilchen dann asymptotisch frei ist. Wir erhalten speziell in Impulsdarstellung

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow & \langle \vec{p}\,' | S | \vec{p} \rangle \\
= & \delta(\vec{p} - \vec{p}\,') - i \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_0^\infty dt\, e^{-\epsilon t} \Big\langle \vec{p}\,' \Big| \left\{ e^{iE_{p'}t} V e^{-2iHt} e^{iE_p t} + e^{iE_{p'}t} e^{-2iHt} V e^{iE_p t} \right\} \Big| \vec{p} \Big\rangle \\
= & \delta(\vec{p} - \vec{p}\,') - i \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_0^\infty dt\, \Big\langle \vec{p}\,' \Big| \left\{ V e^{i(E_{p'} + E_p - 2H + i\epsilon)t} + e^{i(E_{p'} + E_p - 2H + i\epsilon)t} V \right\} \Big| \vec{p} \Big\rangle \\
= & \delta(\vec{p} - \vec{p}\,') \\
& + \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \searrow 0} \Big\langle \vec{p}\,' \Big| \left\{ V \left( \frac{E_{p'} + E_p + i\epsilon}{2} - H \right)^{-1} + \left( \frac{E_{p'} + E_p + i\epsilon}{2} - H \right)^{-1} V \right\} \Big| \vec{p} \Big\rangle \\
= & \delta(\vec{p} - \vec{p}\,') + \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \searrow 0} \Big\langle \vec{p}\,' \Big| \left\{ V G \left( \frac{1}{2}(E_{p'} + E_p + i\epsilon) \right) + G \left( \frac{1}{2}(E_{p'} + E_p + i\epsilon) \right) V \right\} \Big| \vec{p} \Big\rangle \\
= & \delta(\vec{p} - \vec{p}\,') + \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \searrow 0} \Big\langle \vec{p}\,' \Big| T\Big(\ldots\Big) G^0\Big(\ldots\Big) + G^0\Big(\ldots\Big) T\Big(\ldots\Big) \Big| \vec{p} \Big\rangle \\
= & \delta(\vec{p} - \vec{p}\,') + \lim_{\epsilon \searrow 0} \left[ \frac{1}{E_{p'} - E_p + i\epsilon} + \frac{1}{E_p - E_{p'} + i\epsilon} \right] \Big\langle \vec{p}\,' \Big| T\Big(\ldots\Big) \Big| \vec{p} \Big\rangle \\
= & \delta(\vec{p} - \vec{p}\,') - 2\pi i \delta(E_{p'} - E_p) \lim_{\epsilon' \searrow 0} \Big\langle \vec{p}\,' \Big| T(E_p + i\epsilon') \Big| \vec{p} \Big\rangle \quad \text{mit Gl. (6).}
\end{aligned}
$$

Beim Vergleich mit der Definitionsgleichung der Streuamplitude $f(\vec{p}\,' \leftarrow \vec{p})$ aus dem zweiten Vortrag erhält man

$$
\boxed{\lim_{\epsilon' \searrow 0} \Big\langle \vec{p}\,' \Big| T(E_p + i\epsilon') \Big| \vec{p} \Big\rangle = t(\vec{p}\,' \leftarrow \vec{p}) = -\frac{1}{(2\pi)^2 m} f(\vec{p}\,' \leftarrow \vec{p})}, \tag{14}
$$

wenn $|\vec{p}\,'| = |\vec{p}|$ ist. Es wurde hierbei die Größe $t(\vec{p}\,' \leftarrow \vec{p})$ eingeführt, die **On-Shell-Matrix** genannt wird, denn sie ist nur für Impulse $\vec{p}$ und $\vec{p}\,'$ gleicher Länge (Energieerhaltung) definiert. Die $\mathcal{T}$-Matrix in Impulsdarstellung (**Off-Shell-Matrix**) ist für alle Impulsvektoren erlaubt. Nachdem man sie aus der Lippmann-Schwinger-Gleichung berechnet hat, was prinzipiell möglich ist, sind zur Bestimmung der physikalisch relevanten Größe der Streuamplitude wiederum nur Impulsvektoren gleicher Länge erlaubt.

# 3 Bornsche Reihe & Näherung

**Bornsche Reihe** Ein wichtiges Verfahren zur Berechnung von $\mathcal{T}(z)$ bzw. $\mathcal{G}(z)$ aus der Lippmann-Schwinger-Gleichung für $\mathcal{T}(z)$ soll hier kurz vorgestellt werden. Man macht zunächst einen approximativen Ansatz für schwache Potentiale. Schaut man in die Definitionsgleichung von $\mathcal{T}(z)$ (10), so kann genähert werden

$$\mathcal{T}(z) \approx \mathcal{V},$$

denn der zweite Term ist von zweiter Ordnung in $\mathcal{V}$. Beim iterativen Einsetzen in die Lippmann-Schwinger-Gleichung (13) entsteht folgende Reihe

$$\mathcal{T}(z) = \mathcal{V} + \mathcal{V}\mathcal{G}^0(z)\mathcal{V} + \mathcal{V}\mathcal{G}^0(z)\mathcal{V}\mathcal{G}^0(z)\mathcal{V} + \ldots, \tag{15}$$

welche **Bornsche Reihe** genannt wird. Alternativ kann (unter Umständen) $\mathcal{T}(z)$ in eine Potenzreihe entwickelt werden ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n T^{(n)}(z).$$

Dieses setzt man in die Lippmann-Schwinger-Gleichung (13) ein, ordnet nach Potenzen von $\lambda$ und erhält

$$\mathcal{T}(z) = \lambda\mathcal{V} + \lambda^2\mathcal{V}\mathcal{G}^0(z)\mathcal{V} + \ldots. \tag{16}$$

Für $\lambda = 1$ stimmen beide Ansätze überein, weswegen wir die Konvergenz der Reihe bei $\lambda = 1$ untersuchen wollen. $\lambda$ ist ein Faktor, der das Streupotential langsam an- und ausschalten kann. Man findet folgende Konvergenzsätze

- **Schwaches Potential bzw. kleines** $\lambda$: Für jedes $\mathcal{V}$ (schnellabfallend) existiert ein $\lambda'$, so dass die Reihe konvergiert, wenn $|\lambda| < \lambda'$. Der Fall $\lambda = 1$ ist nicht notwendig enthalten. Die Reihe konvergiert um so schneller, je kleiner $\lambda$ ist.

- **Hohe Teilchen-Energie**: Für jedes $\mathcal{V}$ (schnellabfallend) und $\lambda = 1$ existiert eine Energie $E'$, so dass die Reihe konvergiert, wenn $E > E'$. Die Reihe konvergiert um so schneller, je größer $E$ ist. Unter Umständen überschreitet man damit die Gültigkeitsgrenzen der nicht-relativistischen Näherung.

**Bornsche Näherung** Im Falle sehr schneller Konvergenz oder als einfachster Ansatz kann der Term erster Ordnung der Entwicklung von $T(z)$ als einziger mitgenommen werden. Es gilt dann in **Bornscher Näherung**

$$\mathcal{T}(z) \approx V. \tag{17}$$

Wichtige Eigenschaften der Bornschen Näherung, auf die nicht weiter eingegangen werden kann:

- Die Streuamplitude ist in Bornscher Näherung proportional zur Fouriertransformierten der potentiellen Energie $V(\vec{x})$.
- Die Bornsche Näherung ist unitaritätsverletzend.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass bei gegebenem Potential $\mathcal{V}$ die Operatoren $\mathcal{T}(z)$ bzw. $\mathcal{G}(z)$ mit Hilfe der Lippmann-Schwinger-Gleichungen und der Bornschen Reihe prinzipiell berechnet werden können, und wenn in praktischen Fällen auch nur in Bornscher Näherung. Aus der Off-Shell-Matrix $T$ erhält man dann die Streuamplitude $f$ und damit den Wirkungsquerschnitt, welcher eine physikalisch messbare Größe darstellt. Aus $\mathcal{T}(z)$ kann $\mathcal{G}(z)$ ausgerechnet werden, womit das komplette Eigenwertproblem von $\mathcal{H}$ gelöst ist.