

Zusammenfassung des Seminarvortrags zur Skalensymmetrie

Tobias Lettmann

Vortrag vom 24.6.2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Skalensymmetrie in der klassischen Physik	3
2.1	Mechanische Ähnlichkeit	3
2.2	Virialsatz	4
3	Skalensymmetrie in der Teilchenphysik	5
3.1	Ein-Teilchen-Hamiltonoperator	5
3.2	Skalensymmetrie in der Feldtheorie	6
3.3	Tief-Inelastische Elektron-Nukleon-Streuung	7
4	Selbstähnlichkeit und Fraktale	8
4.1	Selbstähnliche Funktionen	8
4.2	Fraktale	9
5	Fazit	11

1 Einleitung

Zur Betrachtung einer Symmetrie ist es zunächst erforderlich die zugehörige Symmetrietransformation zu betrachten. Im Falle der Skalensymmetrie ist dies die so genannte Skalentransformation, bei der z.B. alle Längen eines System mit einem konstanten Faktor a multipliziert werden. Dies hat dann beispielsweise zur Folge, dass Flächen um einen Faktor a^2 und Volumina eine Faktor a^3 wachsen (siehe hierzu auch Abbildung 1).

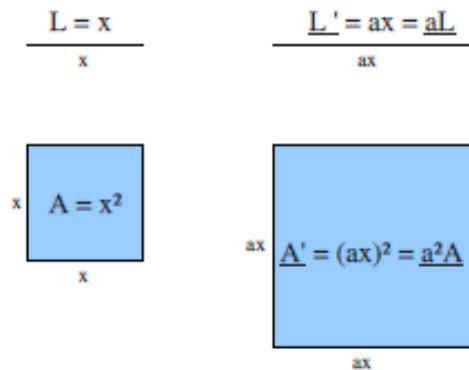


Abbildung 1: Unter einer Skalentransformation wachsen Strecken um einen Faktor a und Flächen um a^2 . Aus [8].

Skalensymmetrie (oder Skaleninvarianz) liegt bei einer solchen Transformation dann vor, wenn der skalierte Nachbau vom Original nicht unterschieden werden kann. Das Vorliegen von Skalensymmetrie ist z.B. wichtig wenn etwas an einem Modell getestet werden soll. Entwickelt man z.B. ein neues Schiff o.ä. testet man das Strömungsverhalten zunächst an einem Modell. Dafür ist es von entscheidender Bedeutung, dass die Ergebnisse möglichst exakt auf das reale System übertragen werden können.

In der Natur liegt jedoch in der Regel keine Skalensymmetrie vor. Zum Einen haben Atome einen festen Radius der nicht einfach vergrößert werden kann. Der skalierte Nachbau besteht somit aus mehr Atomen (nicht größeren) als das Original. Bei makroskopischen Systemen ist dieser Punkt allerdings nicht entscheidend. Zum Anderen enthalten die allermeisten Naturgesetze dimensionsbehaftete Naturkonstanten. Diese Konstanten zeichnen bestimmte Längen, Geschwindigkeiten etc. vor allen anderen aus und brechen somit die Skalensymmetrie.

Ein gutes Beispiel hierfür ist die Planetenbewegung. Die Bewegungsgleichung in einem Planetensystem lautet

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{G}{2} \sum_{i \neq j} m_i m_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}. \quad (1)$$

Multipliziert man nun alle Längen mit a so transformieren sich nicht nur die Längen und Beschleunigungen sondern auch die verschiedenen Massen. Da Planeten ausgedehnte Objekte sind, erhält das Volumen einen Faktor a^3 . Die Dichte der einzelnen Planeten sollte sich aber sinnvollerweise bei einer solchen Transformation nicht ändern, sodass auch die Massen mit a^3 skaliert werden. Wie oben erläutert besteht der vergrößerte Planet also aus mehr Atomen als das Original. Die Transformationsvorschrift lautet damit

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &\rightarrow a \cdot \vec{r}_i, \\ \ddot{\vec{r}}_i &\rightarrow a \cdot \ddot{\vec{r}}_i, \\ \rho_i \cdot V_i = m_i &\rightarrow a^3 \cdot m_i, \end{aligned}$$

Setzt man dies in Gleichung (1) ein, erkennt man sofort, dass man auf beiden Seiten der Gleichung einen Faktor a^4 erhält. Da problemlos durch diesen Faktor geteilt werden kann, ist die Bewegungsgleichung des System also skaleninvariant. Allerdings gilt dies nur für die Bewegungsgleichung. Die beiden Systeme können sehr wohl voneinander unterschieden werden. Da die Lichtgeschwindigkeit in beiden Systemen gleich ist, ändert sich z.B. die Lichtlaufzeit zwischen zwei verschiedenen Punkten im Planetensystem. Die Lichtgeschwindigkeit ist also offensichtlich eine der Naturkonstanten, die Skalensymmetrie brechen.

Die dimensionsbehafteten Konstanten die für eine Brechung der Skalensymmetrie sorgen lassen sich in drei Ebenen unterteilen:

1. Quantenmechanik der Schrödingergleichung
dimensionsbehaftete Konstanten: $\hbar, m_e, e \rightarrow a_B, t_B, E_B$
2. Hinzunahme der spez. Relativitätstheorie
zusätzliche Konstante: $c \rightarrow \alpha, \mu_B, \lambda_e = \alpha a_B, e_{Pl} = \sqrt{\hbar c}$
3. Planck-Skala (zusätzlich Gravitation)
zusätzliche Konstante: $G \rightarrow l_{Pl}, t_{Pl}, m_{Pl}, e_{Pl}$

Auf jeder der drei Ebenen ergeben lassen sich also charakteristische Längen- und Zeitskalen finden, die vor allen anderen ausgezeichnet sind. Physikalische Gesetze, in denen diese Konstanten in irgendeiner Art und Weise vorkommen, sind deshalb nicht skaleninvariant.

2 Skalensymmetrie in der klassischen Physik

2.1 Mechanische Ähnlichkeit

In der klassischen Physik gibt es den Begriff der mechanischen Ähnlichkeit. Dieser ist im Wesentlichen äquivalent zur Skalensymmetrie.

Ausgangspunkt der Betrachtungen zur mechanischen Ähnlichkeit ist die Lagrangefunktion $L = T - V$. Wie man leicht nachrechnet sind die Euler-Lagrange-Gleichungen, die Bewegungsgleichungen des Systems, invariant unter der Transformation $L \rightarrow L' = d \cdot L$, wobei d eine beliebige Konstante ist. Nimmt man an, dass das Potential V eine homogene Funktion der Koordinaten vom Grad k ist, d.h.

$$V(a\vec{r}_1, \dots, a\vec{r}_N) = a^k V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N), \quad (2)$$

was bei nahezu allen physikalisch sinnvollen Potentialen der Fall ist, so verhalten sich die einzelnen Terme der Lagrangefunktion unter der Skalentransformation

$$\vec{r}_i \rightarrow a \cdot \vec{r}_i \quad \text{und} \quad t \rightarrow b \cdot t \quad (3)$$

folgendermaßen:

$$T \sim \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \rightarrow \frac{a^2}{b^2} \cdot T, \quad V \rightarrow a^k V \quad (4)$$

Die Massen bleiben hierbei im Gegensatz zur Planetenbewegung unverändert, da hier punktförmige Teilchen und keine ausgedehnten Objekte betrachtet werden. Die Transformation in (3) ist also genau dann eine Symmetrietransformation des Systems wenn gilt

$$\frac{a^2}{b^2} = a^k \quad \text{bzw.} \quad b = a^{1-\frac{k}{2}}. \quad (5)$$

Dies bedeutet, dass die Bewegungsgleichungen mechanisch ähnliche Bahnen $\vec{r}(t)$ und $\vec{r}'(t')$ zulassen, wobei für die Zeitdifferenzen zwischen äquivalenten Punkten der beiden Bahnen gerade gilt

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l} \right)^{1-\frac{k}{2}}. \quad (6)$$

Ähnliche Beziehungen gelten auch für die Geschwindigkeiten, Energien und Drehimpulse der verschiedenen Bahnen:

$$\frac{v'}{v} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{k}{2}}, \quad \frac{E'}{E} = \left(\frac{l'}{l}\right)^k, \quad \frac{L'}{L} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{k}{2}} \quad (7)$$

Mithilfe von (6) lassen sich nun wichtige Eigenschaften von Systemen vorhersagen ohne die Bewegungsgleichungen lösen zu müssen. Es ist lediglich erforderlich den Homogenitätsgrad k des Potentials zu kennen. Dies wird im folgenden an drei Beispielen erläutert.

1. Freier Fall / Homogenes Kraftfeld $V(z) \sim z \rightarrow k = 1$

$$\frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{l'}{l}}$$

Die Quadrate der Fallzeiten verhalten sich also wie die Anfangshöhen. Dies gilt für jede konstant beschleunigte Bewegung.

2. Harmonischer Oszillator $V(x) \sim x^2 \rightarrow k = 2$

$$\frac{t'}{t} = 1$$

Die Schwingungsdauer eines harmonischen Oszillators ist also unabhängig von der Amplitude der Schwingung.

3. Gravitationspotential $V(r) \sim \frac{1}{r} \rightarrow k = -1$

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die dritten Potenzen der Bahnradien. Dies ist ein Spezialfall¹ des dritten Keplerschen Gesetzes.

2.2 Virialsatz

Der Virialsatz gibt einen einfachen Zusammenhang zwischen den Mittelwerten der kinetischen Energie und der potentiellen Energie an. Damit er gilt müssen jedoch zwei Voraussetzungen erfüllt sein. Zunächst muss das Potential wie oben auch eine homogene Funktion der Koordinaten sein. Des weiteren darf die Bewegung nur in einem begrenzten Raumbereich stattfinden.

Nun zur Herleitung des Virialsatzes. Allgemein hängen die einzelnen Impulse über $p_i = \partial T / \partial v_i$ mit der kinetischen Energie zusammen. Da die kinetische Energie außerdem quadratisch in den Geschwindigkeiten v_i ist, gilt

$$\sum p_i v_i = \sum \frac{\partial T}{\partial v_i} v_i = 2 \cdot T. \quad (8)$$

Die Geschwindigkeit ist außerdem die Zeitableitung des Ortes und somit gilt mit der Produktregel

$$2 \cdot T = \sum p_i v_i = \frac{d}{dt} \left(\sum p_i r_i \right) - \sum \dot{p}_i r_i. \quad (9)$$

Nun kann der zeitliche Mittelwert gebildet werden

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt. \quad (10)$$

¹Die Aussage hier gilt nur für mechanisch ähnliche Bahnen. Das dritte Keplersche Gesetz sagt jedoch allgemein für alle möglichen Bahnen, dass das Quadrat der Umlaufzeit proportional zu dritten Potenz der großen Halbachse ist.

Für den ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung (9) ergibt sich gerade

$$\overline{\frac{d}{dt} \left(\sum p_i r_i \right)} = \sum \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{p_i(\tau) r_i(\tau) - p_i(0) r_i(0)}{\tau} = 0, \quad (11)$$

da die Bewegung nur in einem begrenzten Raumbereich stattfindet, d.h. p_i und r_i beschränkt sind. Insgesamt gilt also

$$2 \cdot \overline{T} = - \overline{\sum \dot{p}_i r_i} = \overline{\sum \frac{\partial V}{\partial r_i} r_i}. \quad (12)$$

Berücksichtigt man nun, dass das Potential homogen vom Grad k ist, so ergibt sich der Virialsatz

$$2 \cdot \overline{T} = k \cdot \overline{V}, \quad (13)$$

oder mit der Gesamtenergie $E = \overline{T} + \overline{V}$

$$\overline{V} = \frac{2}{k+2} E, \quad \text{und} \quad \overline{T} = \frac{k}{k+2} E. \quad (14)$$

Zur Erläuterung seien hier zwei Beispiele angegeben. Beim harmonischen Oszillator gilt gerade $\overline{T} = \overline{V}$ und im Gravitationspotential $2 \cdot \overline{T} = -\overline{V}$ bzw. $E = -\overline{T} < 0$, was mit der Annahme des begrenzten Raumbereichs zusammenpasst, denn nur für negative Energien ergibt sich im Keplerproblem eine geschlossene Bahn.

3 Skalensymmetrie in der Teilchenphysik

3.1 Ein-Teilchen-Hamiltonoperator

Zunächst wird hier der Einfachheit halber ein Ein-Teilchen-Hamiltonoperator betrachtet. Dieser habe allgemein folgende Form

$$\mathcal{H} \sim p^n + a r^{-n}, \quad (15)$$

wobei a eine dimensionslose Konstante ist. Dieser Operator ist zunächst invariant unter Zeittranslationen $t \rightarrow t + \delta t$, woraus mit dem Noethertheorem die Energieerhaltung folgt. Nun betrachte man die folgende Skalentransformation

$$t \rightarrow \rho t \quad \text{und} \quad r(t) \rightarrow \rho^{1/n} r(\rho t). \quad (16)$$

Da der Impulsoperator im Ortsraum proportional zur Ortsableitung ist, gilt bei dieser Transformation für den Impuls $p(t) \rightarrow \rho^{-1/n} p(\rho t)$. Setzt man die Transformationsvorschrift in den Hamiltonoperator ein ergibt sich $\mathcal{H} \rightarrow \rho^{-1} \mathcal{H}$. Die Schrödingergleichung ist damit invariant unter dieser Transformation. Das System ist also skaleninvariant. Die Erhaltungsgröße, die aus dieser Transformation folgt ist

$$D = -\frac{pr}{n} + Et. \quad (17)$$

Da sowohl t als auch pr mit der Zeit wachsen ist diese Größe konstant.

Die Exponent n ist bis jetzt noch unbestimmt/beliebig. In der nichtrelativistischen Physik gilt jedoch für die kinetische Energie $T \sim p^2$ und somit $n = 2$. $\frac{1}{r^2}$ -Potentiale sind physikalisch nicht relevant, sodass diese Symmetrie für den nichtrelativistischen Fall uninteressant ist.

Im relativistischen Fall ist jedoch

$$T \sim \sqrt{p^2 + m^2} \quad (18)$$

und somit für verschwindenden Massen oder sehr sehr hohe Energien $n = 1$. $1/r$ -Potentiale treten in der Physik an vielen Stellen auf, z.B. das Coulombpotential oder das Yukawapotentia (für verschwindende Massen). Mit dem nach ihm benannten Potential

$$V_{Yuk}(r) \sim \frac{1}{r} e^{-m_\pi cr/\hbar}$$

beschrieb Yukawa die Wechselwirkung der Nukleonen durch den Austausch von Pionen. Für $m_\pi \rightarrow 0$ geht es offensichtlich in das Coulombpotential über.

3.2 Skalensymmetrie in der Feldtheorie

Ein Ein-Teilchen-Hamiltonoperator ist in der Teilchenphysik offensichtlich keine sonderlich sinnvolle Annahme. Deshalb ist zu überprüfen ob die soeben gefundene Skalensymmetrie im Hochenergiebereich auch in der relativistischen Quantenfeldtheorie (einer deutlich allgemeineren Beschreibung) gegeben ist.

In der Feldtheorie werden Systeme über ihre Lagrangedichte \mathcal{L} beschrieben, die von verschiedenen Feldern und deren Raum-Zeit-Ableitungen abhängt. Die Wirkung ist hierbei gegeben als $S = \int d^4x \mathcal{L}$. Im Folgenden werden der Übersichtlichkeit halber skalare Felder (Spin 0) mit ϕ , Dirac-Felder/-Spinoren (Spin 1/2) mit ψ und Vektorfelder (Spin 1) mit A^μ bezeichnet.

Die zu untersuchende Skalentransformation ist die Multiplikation des Ortsvierervektors mit einem konstanten Faktor

$$x^\mu \rightarrow \rho x^\mu. \quad (19)$$

Da auch die Dimension der verschiedenen Felder proportional zur Länge ist, muss die Transformation für die Felder folgendermaßen lauten

$$\phi(x) \rightarrow \rho^{-1} \phi(\rho x), \quad \psi(x) \rightarrow \rho^{-3/2} \psi(\rho x), \quad A^\mu(x) \rightarrow \rho^{-1} A^\mu(\rho x). \quad (20)$$

Skaleninvarianz liegt analog zu Abschnitt 2.1 dann vor, wenn die Lagrangedichte bei dieser Transformation einen konstanten Faktor erhält.

Zunächst sollte untersucht werden, welchen Faktor die kinetischen Terme der verschiedenen Felder unter den Transformationen in (19) und (20) erhalten. Denn falls dieser nicht identisch sein sollte, kann Skaleninvarianz in Wechselwirkungen nicht auftreten. Man rechnet leicht nach, dass die kinetischen Terme für die drei Feldarten

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi, \quad F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

alle den Faktor ρ^{-4} erhalten. Somit führen alle Terme die ebenfalls einen Faktor ρ^{-4} erhalten auf eine skaleninvariante Lagrangedichte. Dies sind neben verschiedenen häufig betrachteten Selbstwechselwirkungen wie ϕ^4 oder $(\bar{\psi}\psi)^{4/3}$ auch der Yukawakopplungsterm $\bar{\psi}\psi\phi$ und der Kopplungsterm der Quantenelektrodynamik $\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu$ (und noch weitere). Einen anderen Faktor erhalten hingegen die verschiedenen Massenterme ($m^2 \phi^2$ oder $m\bar{\psi}\psi$) sowie Terme mit dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten wie $\lambda\phi^3$. Diese Kopplungskonstanten haben nämlich gerade die Dimension einer Länge und zeichnen somit ebendiese vor allen anderen Längen aus, was die Skalensymmetrie bricht.

Mit dem Noethertheorem folgt aus der Skalensymmetrie ein erhaltener Strom, der so genannte Dilatationsstrom

$$D^\mu(x) = x_\nu \Theta^{\mu\nu}(x), \quad (21)$$

wobei $\Theta^{\mu\nu}$ den Energie-Impuls-Tensor bezeichnet. Die zeitliche Erhaltungsgröße ist dann

$$D = \int d^3x D^0(x) = \int d^3x x_\nu \Theta^{0\nu}(x), \quad (22)$$

was analog zur Erhaltungsgröße in der Ein-Teilchen-Theorie in Gleichung (17) ist, da $\Theta^{0\nu}$ gerade die Viererimpulsdichte ist.

Eine Symmetrie ist dann exakt wenn die Divergenz des zugehörigen Stromes verschwindet. Hier findet man nach einigem Rechnen

$$\partial_\mu D^\mu(x) = \Theta_\mu^\mu(x) = \text{Massenterme}, \quad (23)$$

falls die Lagrangedichte auch Terme mit dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten enthält, tauchen diese ebenfalls in der Divergenz auf. Diese einfache Form der Divergenz gilt jedoch nur in niedrigster Ordnung. Berücksichtigt man z.B. Quantenfluktuationen verschwindet die Divergenz auch für masselose Theorien nicht mehr.

Wie für den Ein-Teilchen-Operator tritt also auch in der Feldtheorie Skaleninvarianz nur bei vernachlässigbaren Massen, d.h. bei hohen Energien, auf.

3.3 Tief-Inelastische Elektron-Nukleon-Streuung

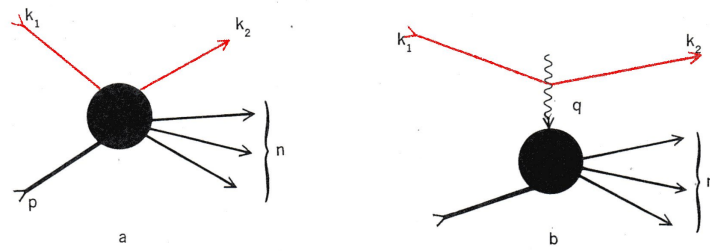


Abbildung 2: Skizze der inelastischen Streuung eines Elektrons (rot) an einem Nukleon. Die Wechselwirkung geschieht durch den Austausch eines virtuellen Photons (rechts). Aus [4].

Der experimentelle Nachweis der soeben beschriebenen Skalensymmetrie gelang in der Tiefinelastischen Elektron-Nukleon-Streuung. In Abbildung 2 ist eine solche Streuung skizziert. Die relevanten Parameter, die in den Wirkungsquerschnitt dieser Streuung eingehen, sind das Viererimpulsquadrat des Photons q^2 und der Energieübertrag $\nu = pq$ bzw. die sogenannten Bjorkensche SkalenvARIABLE $x = -q^2/2\nu$. Da es sich hier um ein virtuelles Photon handelt, gilt $q^2 < 0$.

Der Wirkungsquerschnitt besteht neben einigen geometrischen Faktoren hauptsächlich aus den so genannten Strukturfunktionen $F_1(q^2, x)$ und $F_2(q^2, x)$, die im Wesentlichen der Fouriertransformierten der Ladungsverteilung des Nukleons entsprechen. Für hohe Energien sollte nun Skaleninvarianz gelten. Da die Strukturfunktionen dimensionslos sind, die SkalenvARIABLE x skaleninvariant ist und keine anderen dimensionsbehafteten Parameter auftreten, muss in diesem Fall gelten

$$\lim_{E \rightarrow \infty} F_1(q^2, x) = F_1(x) \quad \text{und} \quad \lim_{E \rightarrow \infty} F_2(q^2, x) = F_2(x). \quad (24)$$

Dies ist exakt das Verhalten, was man experimentell für die Strukturfunktionen gefunden hat.

In Abbildung 3 sind Ergebnisse des ZEUS-Detektors am HERA-Beschleuniger des DESY für die Strukturfunktion F_2 zu sehen. Es ist gut zu erkennen, dass zumindest für „große“ x (ab etwa 0,08) die Strukturfunktion nicht mehr von q^2 abhängt. Hier liegt also wie erwartet Skaleninvarianz vor. Da die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung also offensichtlich für hohe Energien konstant ist, muss die Ladungsverteilung in den Nukleonen punktförmig sein. Diese Erkenntnis führte zu dem Postulat, dass die Nukleonen aus punktförmigen geladenen Konstituenten, den so genannten Partonen, bestehen. Eine weitere Relation zwischen den beiden Strukturfunktionen, die Callan-Gross-Relation

$$2xF_1(x) = F_2(x), \quad (25)$$

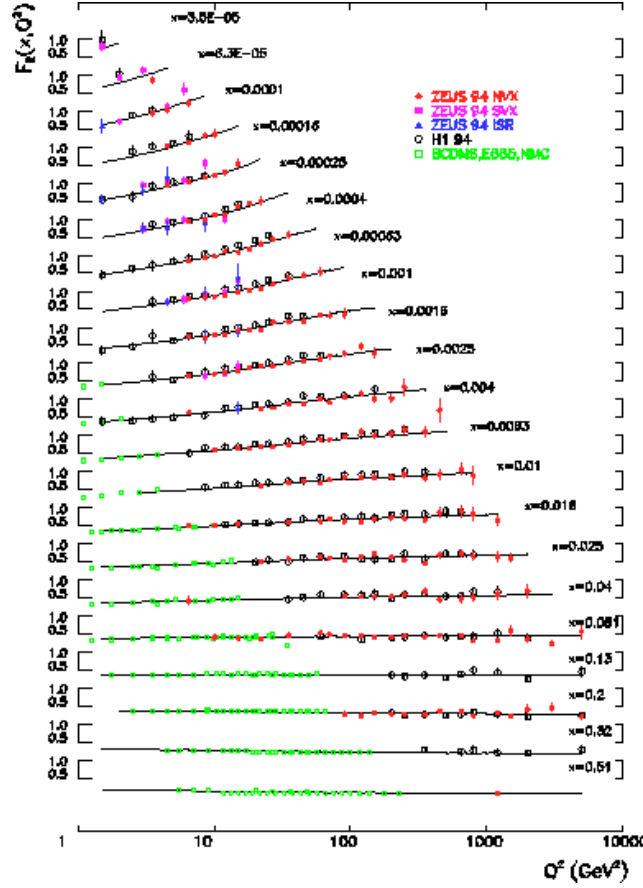


Abbildung 3: Ergebnisse des ZEUS-Experiments für die Strukturfunktion F_2 . Quelle: [5]

führt darauf, dass die Partonen den Spin $1/2$ haben müssen. Diese Partonen wurden dann später als die Quarks der Flavoursymmetrie identifiziert.

Für kleine x ist die Skalensymmetrie in Abbildung 3 offensichtlich gebrochen. Dies kommt durch die Wechselwirkung der Elektronen mit den ebenfalls in den Nukleonen vorhandenen Gluonen zustande.

4 Selbstähnlichkeit und Fraktale

4.1 Selbstähnliche Funktionen

Zur Betrachtung von selbstähnlichen Funktionen betrachte man zunächst die folgende lineare Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -g \cdot x(t). \quad (26)$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind nicht selbstähnlich, denn die skalentransformierte Funktion $x'(t) = a \cdot x(t/b)$ ist nur für $b = 1$ eine Lösung der Differentialgleichung. Dass die Lösungen der Gleichung nicht skaleninvariant sind, liegt letztendlich darin begründet, dass die Zeit $1/g$, als die Zeit bei der die Lösung auf $1/e$ des Ausgangswertes (bei $t = 0$) abgefallen ist, eine ausgezeichnete Zeit des Systems ist, die die Skalensymmetrie bricht. Anders ist dies hingegen bei nichtlinearen Differentialgleichungen wie

$$\dot{x}(t) = -g \cdot x^k(t). \quad (27)$$

Für $k = 3$ lautet eine Lösung $x_\infty(t) = (2gt)^{-1/2}$. Unter der Transformation $x(t) \rightarrow b^{-1/2}x(t/b)$ wird diese Lösung offensichtlich in sich selbst überführt. Sie heißt deshalb selbstähnlich. Für beliebige k lautet diese Transformation

$$x(t) \rightarrow b^{1/(1-k)} \cdot x(t/b). \quad (28)$$

Allgemein heißt eine Funktion selbstähnlich mit einem bestimmten Skalenexponenten κ , wenn für sie gilt

$$x(b \cdot t) = b^\kappa \cdot x(t). \quad (29)$$

Für die Lösungen von Gleichung (27) mit $k = 3$ gilt offensichtlich $\kappa = -1/2$ bzw. allgemein $\kappa = 1/(1 - k)$.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft von selbstähnlichen Funktionen ist, dass diese proportional zu t^κ sind. Dies ist leicht einzusehen, denn da Gleichung (29) für beliebige b gilt, folgt mit $b = c/t$ für festes c

$$x(t) = x(b \cdot t) \cdot b^{-\kappa} = x(c) \cdot c^{-\kappa} \cdot t^\kappa \sim t^\kappa. \quad (30)$$

Eine weitere interessante Eigenschaft der Lösungen von Gleichung (27) ist, dass für alle Anfangsbedingungen die Lösungen für große Zeiten zusammenfallen. Für $k = 3$ lautet die allgemeine Lösung mit $x(0) = x_0$ beispielsweise

$$x(t, x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{1 + 2gx_0^2 \cdot t}}. \quad (31)$$

Für $t \gg (2gx_0^2)^{-1}$ gehen offensichtlich alle diese Funktionen näherungsweise in die schon oben betrachtete Lösung $x_\infty(t)$ über.

4.2 Fraktale

Fraktale sind natürliche oder künstliche Gebilde mit hoher Selbstähnlichkeit. Allerdings haben sie im Gegensatz zu den soeben besprochenen Funktionen nur eine diskreten Satz von Skalenfaktoren b für den Gleichung (29) gilt.

Zwei bekannte Beispiele für natürliche Fraktale sind beispielsweise ein Farnblatt oder der Romanesco (siehe Abbildung 4), die beide näherungsweise aus verkleinerten Kopien ihrer selbst bestehen.



Abbildung 4: Ein Farnblatt (links) und ein Romanesco (rechts) weisen natürlicherweise eine fraktale Struktur auf. Quellen: [9] (links) bzw. [10] (rechts).

Die Eigenschaften von Fraktalen lassen sich relativ einfach am Beispiel der sogenannten Kochkurve untersuchen. Ihre Konstruktionsvorschrift ist in Abbildung 5 skizziert. Hierbei wird eine Linie in drei gleich große Abschnitte unterteilt. Anschließend wird dann über dem mittleren Abschnitt ein gleichseitiges Dreieck errichtet und der mittlere Abschnitt entfernt. Das wird dann für jeden der neuen vier Abschnitte wiederholt und immer so weiter.

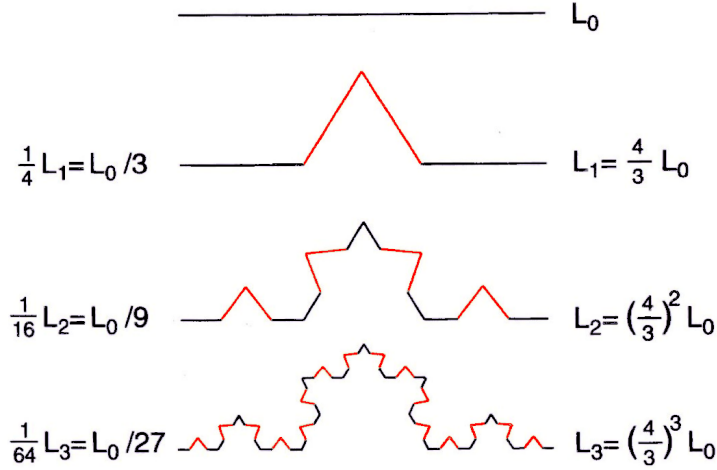


Abbildung 5: Die ersten drei Iterationsschritte zur Konstruktion der so genannten Kochkurve. Neu hinzugekommene Abschnitte sind jeweils rot eingefärbt. Aus [6].

Für die Länge l_n der Abschnitte des n -ten Iterationsschrittes gilt also offenbar $l_n = L_0/3^n$, wohingegen für die Anzahl der einzelnen Abschnitte $N_n = 4^n$ gilt. Für die Anzahl der Einzelstücke in Abhängigkeit von ihrer Länge gilt damit

$$N(l/3) = 4 \cdot N(l). \quad (32)$$

$N(l)$ ist also offensichtlich eine selbstähnliche Funktion nach der Definition von Gleichung (29), wobei nur Skalenfaktoren $b = 1/3^n$ erlaubt sind. Mit $b = 1/3$ und $b^\kappa = 4$ folgt für den Skalenexponenten der Kochkurve

$$\kappa = -\frac{\ln 4}{\ln 3} = -1,2618 \dots$$

Mit $N(l) \sim l^\kappa$ ergibt sich für die Länge der perfekten Kochkurve

$$L(l) = l \cdot N(l) \sim l^{\kappa+1} = l^{-0,2618} \xrightarrow{l \rightarrow 0} \infty.$$

Die Kochkurve ist also unendlich lang obwohl der Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve einen endlichen Wert hat.

Überdeckt man jeden einzelnen Abschnitt der Kurve mit einem Quadrat der Kantenlänge l , so erhält man für den Flächeninhalt dieses Gebildes

$$F(l) = l^2 \cdot N(l) \sim l^{\kappa+2} = l^{0,7382} \xrightarrow{l \rightarrow 0} 0.$$

Die Kochkurve ist also mehr als eine Linie (sie ist unendlich lang), aber weniger als ein Fläche, da der Flächeninhalt verschwindet, wenn die Dicke der einzelnen Linien gegen null läuft. Dies ist auch sehr gut am so genannten Kochstern (Abbildung 6) nachvollziehbar, dessen Umfang unendlich groß ist der Flächeninhalt jedoch endlich. Die Dimension der Kochkurve sollte somit zwischen 1 und 2 liegen.

Man definiert die fraktale Dimension der Kochkurve als $d_f = -\kappa = 1,2618$, da das d -dimensionale Volumen $V_d(l) = l^d \cdot N(l)$ gerade für $d = -\kappa$ einen endlichen von null verschiedenen Wert annimmt.

Wie schon oben erwähnt tauchen Fraktale auch in der Natur auf. Zum Beispiel kann die Fläche des Amazonas-Flusssystems in ähnlicher Weise zu $d_f = 1,85$ bestimmt werden. Dies geschieht in dem man eine Karte wie in Abbildung 7 nimmt und die verschiedenen Flüsse

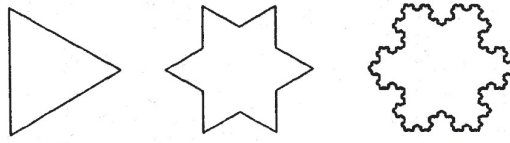


Abbildung 6: Der Anfang der Konstruktion des so genannten Kochsterns. Aus [1]

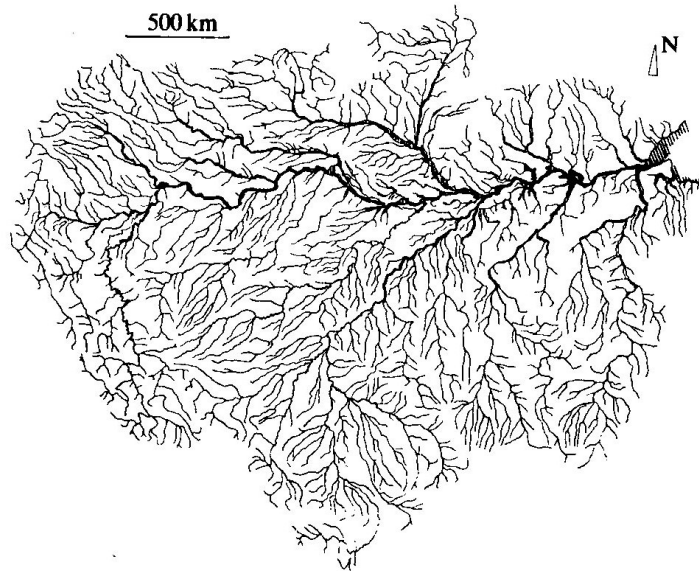


Abbildung 7: Karte des Amazonas-Flusssystems. Aus [1].

mit kleiner werdenden Quadraten überdeckt. Für die Anzahl der nötigen Quadrate mit einer Kantenlänge l findet man dann $N(l) \sim l^{-1,85}$. Solche fraktalen Eigenschaften hat nahezu jedes Flusssystem. Für den Nil findet man z.B. eine fraktale Dimension von 1,4. Zu näheren Erläuterungen hierzu siehe [11].

5 Fazit

Alles in allem kann Skalensymmetrie also in vielen verschiedenen Bereichen der Physik auftreten. Aufgrund von dimensionsbehafteten Naturkonstanten ist sie in vielen Fällen allerdings nur näherungsweise realisiert.

In der klassischen Physik ermöglicht sie verschiedene Aussagen über die Systeme ohne explizite Lösung der Bewegungsgleichungen. Lediglich die Kenntnis des Homogenitätsgrades des Potentials ist erforderlich.

In der Teilchenphysik tritt Skalensymmetrie bei masselosen oder hochenergetischen Wechselwirkungen auf. Sie ermöglichte z.B. die Vorhersage der punktförmigen Konstituenten der Nukleonen.

In der nichtlinearen Physik treten selbstähnliche Funktionen und Fraktale mit einigen interessanten Eigenschaften, wie z.B. nicht-ganzzahligen Dimensionen auf.

Literatur

- [1] Hennig Genz, Roger Decker: *Symmetrie und Symmetriebrechung in der Physik*, Vieweg 1991
- [2] Lew Landau, Ewgeni Lifschitz: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1 Mechanik*, Akademischer Verlag Berlin 1969
- [3] Wolfgang Nolting: *Grundkurs Theoretische Physik 1 – Klassische Mechanik*, 9. Auflage, Springer-Verlag 2011
- [4] Roman Jackiw: Introducing scale symmetry, *Physics Today*, 25(1): 23–27, Jan 1972
- [5] NIKHEF, Amsterdam: http://www.nikhef.nl/pub/experiments/zeus/theses/wouter_verkerke/latex2html/node8.html, 20.06.2015
- [6] Wolfgang Demtröder: *Experimentalphysik 1 – Mechanik und Wärme*, 5. Auflage, Springer-Verlag, 2008
- [7] Dirk Sandbrink: Zusammenfassung Skalensymmetrie, SoSe 2008
- [8] Marcel Rothering: Zusammenfassung Skalensymmetrie, WiSe 2010/11
- [9] <http://www.fraktalwelt.de/myhome/images/farn.gif>, 30.05.2015
- [10] http://holofraktal.net/wp-content/uploads/2013/05/romanesco_wallpaper_by_keldbach-d36xnw3.jpg, 22.06.2015
- [11] H. Takayasu: *Fractals in the physical sciences*, Manchester University Press 1990