



# SU(3) und das Quarkmodell

Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Institut für Theoretische Physik

Steffen Finger<sup>1</sup>

20.05.2015

---

<sup>1</sup>s\_fing06@uni-muenster.de

# Abstract

Bei diesem Dokument handelt es sich um die Ausarbeitung zum Vortrag „SU(3) und das Quarkmodell“<sup>2</sup>, welcher am 20.05.2015 im „Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder“ im Institut für Theoretische Physik an der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster gehalten wurde. Der Vortrag sowie diese Ausarbeitung stützen sich im Wesentlichen auf die Erläuterungen in [3], weshalb dies im Folgenden nicht mehr explizit gekennzeichnet wird.

Das sogenannte Quarkmodell im Sinne der „Flavor-SU(3)“, welches in den 1960er Jahren von Gell-Mann, Zweig und Ne’eman jeweils unabhängig voneinander vorgeschlagen wurde, erklärt die innere Symmetrie mit der Hadronen in sogenannten Multipletts gefunden werden. Das Ziel dieser Ausarbeitung ist es, anschaulich zu erklären, weshalb aus der geforderten SU(3)-Symmetrie die experimentell bekannten Hadronenmultipletts auf natürliche Weise folgen. Hierfür werden die Multipletts aus den Quarks selbst konstruiert und zuletzt mit den bekannten Multipletts identifiziert.

Eine Struktur ist dem Manuskript durch die inhaltliche Unterteilung in die physikalische Einordnung des Quarkmodells im Rahmen der Teilchenphysik, die hier relevanten mathematischen Eigenschaften der Gruppe SU(3), die darauf folgende Zusammenführung der SU(3) und des Quarkmodells sowie einem abschließenden Ausblick auf mögliche Erweiterungen des Modells gegeben.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einordnung in die Teilchenphysik</b>	<b>2</b>
<b>2 Die mathematischen Eigenschaften der SU(3)</b>	<b>2</b>
2.1 Generatoren der SU(3) . . . . .	2
2.2 Leiteroperatoren und Unteralgebren . . . . .	3
2.3 Multiplett-Struktur . . . . .	5
<b>3 Das Quarkmodell</b>	<b>8</b>
3.1 Annahmen in der Flavor-SU(3) . . . . .	8
3.2 Quarks in der SU(3) . . . . .	8
3.3 Ausreduktion der Produktzustände . . . . .	9
<b>4 Zusammenfassung</b>	<b>11</b>
<b>5 Erfolge, Schwierigkeiten und Ausblick</b>	<b>11</b>
<b>A Anhang</b>	<b>13</b>
A.1 Strukturfaktoren der SU(3) Lie-Algebra . . . . .	13
A.2 Kommutatorrelationen der SU(3)-Unteralgebren . . . . .	13

---

<sup>2</sup>[http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/lehre/teilchen/ss15/SU3\\_Folien.pdf](http://pauli.uni-muenster.de/tp/fileadmin/lehre/teilchen/ss15/SU3_Folien.pdf)

# 1 Einordnung in die Teilchenphysik

Im Rahmen des Standardmodells der Teilchenphysik werden drei Kategorien von Elementarteilchen unterschieden, die Spin-1/2 Fermionen, die Spin-1 Bosonen sowie das Spin-0 Higgsboson. Zu den fermionischen Teilchen gehören hier die Leptonen wie beispielsweise das Elektron-Neutrino oder das Elektron sowie die hier relevanten Quarks. Die Quarks werden in drei Generationen angeordnet: Zur ersten Generation gehören das up- und down-Quark ( $u, d$ ), zur zweiten Generation das charm- und strange-Quark ( $c, s$ ) und zur dritten Generation das top- und bottom-Quark ( $t, b$ ). Diese Einteilung nach [1] wird in der Abbildung 1 verdeutlicht.

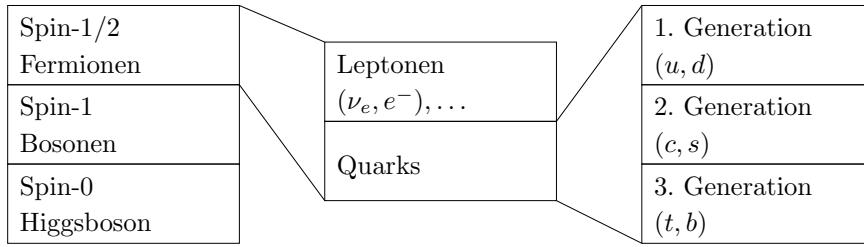


Abbildung 1: Einordnung und Klassifizierung der Quarks im Rahmen des Standardmodells der Teilchenphysik nach [1].

In dem hier diskutierten Quarkmodell als Flavor-SU(3) werden ausschließlich die drei leichten Quarks  $u$ ,  $d$  und  $s$  berücksichtigt. Das Ziel wird es sein, zu verstehen, weshalb die beobachteten Hadronen nur in bestimmten Multipletts auftreten. Um die Gruppe SU(3) als Grundlage verwenden zu können, müssen jedoch bezüglich der Quarks verschiedene Symmetrien erfüllt sein (vgl. Abschnitt 3). Als Hadronen werden Verbünde mehrerer Quarks bezeichnet, diese werden eingeteilt in die Mesonen (Quark-Antiquark-Paar) und die Baryonen (Verbund aus drei Quarks oder Antiquarks) beziehungsweise die Hyperonen, sofern Quarks aus der zweiten oder dritten Generation enthalten sind. Die Abbildung 2 veranschaulicht diese Einteilung. Ebenfalls wird die Existenz von Gebilden mit einer Substruktur wie beispielsweise Tetraquarks  $qq\bar{q}\bar{q}$  oder Pentaquarks  $qqqq\bar{q}$  vorhergesagt, diese sind jedoch meist nur hypothetisch und weiterhin Thema aktueller Forschung [1].

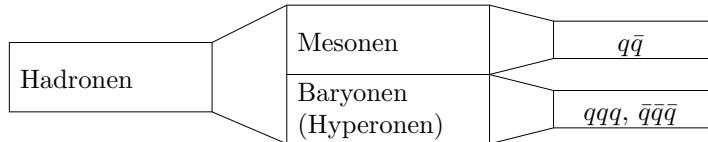


Abbildung 2: Bezeichnungen und Zusammensetzung der hadronischen Zustände nach [1].

## 2 Die mathematischen Eigenschaften der SU(3)

In diesem Abschnitt werden solche Eigenschaften der SU(3) entwickelt, die für das Verständnis des Quarkmodells wesentlich sind. Zu Beginn werden die Generatoren gewählt und aus diesen Unteralgebren mit zugehörigen Leiteroperatoren konstruiert. Mit diesen kann der Aufbau der SU(3)-Multipletts motiviert werden, welcher schließlich den Übergang zum Quarkmodell darstellt.

### 2.1 Generatoren der SU(3)

Formal handelt es sich bei der Gruppe SU(3) um die Menge der Matrizen  $\{\hat{U} \in \text{Mat}(3 \times 3, \mathbb{C}) | \hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{1}, \det \hat{U} = 1\}$  zusammen mit der gewöhnlichen Matrixmultiplikation als Gruppenverknüpfung. Die-

se Definition ist für die folgenden Zwecke jedoch unhandlich, weshalb im Folgenden  $SU(3) \ni \hat{U} = e^{i\hat{H}}$  geschrieben werden soll. Die Unitarität und die Determinanteneigenschaft übersetzen sich in die  $\hat{H}$ -Matrizen als Hermitezität  $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$  beziehungsweise als verschwindende Spur  $\text{spur } \hat{H} = 0$ .

Um die Generatoren festzulegen, soll zunächst geklärt werden, wie viele Generatoren gewählt werden müssen. Dies kann über die Anzahl der unabhängig wählbaren reellen Parameter in den  $\hat{H}$ -Matrizen geschehen. Im allgemeinen Fall von  $(n \times n)$ -Matrizen findet man zunächst  $2n^2$  reelle Parameter, je zwei gehören zu einem der  $n^2$  Einträge. Fordert man jedoch die Hermitezität, so reduziert sich dieser Wert auf einen Parameter auf der Hauptdiagonalen sowie je zwei für jeden Eintrag oberhalb (oder unterhalb) der Hauptdiagonalen. Schließlich reduziert sich diese Zahl zusätzlich um eins, falls man auch  $\text{spur } \hat{H} = 0$  fordert. Es bleiben insgesamt

$$N = n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k - 1 = n + n(n-1) - 1 = n^2 - 1$$

Generatoren. Im Fall der aus der Spin-Algebra bekannten  $SU(2)$  finden sich also drei benötigte Generatoren, meist die Pauli-Matrizen, im Fall der hier diskutierten  $SU(3)$  werden insgesamt 8 Generatoren gesucht.

Um später die  $SU(2)$ -Unteralgebren leicht als solche identifizieren zu können, werden die Generatoren  $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_4, \hat{\lambda}_5, \hat{\lambda}_6, \hat{\lambda}_7$  als die drei verschiedenen dreidimensionalen Erweiterungen der Pauli-Matrizen  $\hat{\sigma}_1$  und  $\hat{\sigma}_2$  gewählt, indem je die erste, zweite oder dritte Zeile und Spalte mit Nullen aufgefüllt werden. Die verbleibenden  $\hat{\lambda}_3$  und  $\hat{\lambda}_8$  sind die Erweiterung der dritten Pauli-Matrix  $\hat{\sigma}_3$  sowie eine verbleibende Matrix mit geeigneter Skalierung. Ausgeschrieben lauten alle gewählten Matrizen

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\lambda}_2 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\lambda}_3 &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\lambda}_4 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\lambda}_5 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\lambda}_8 &\equiv \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \\ \hat{\lambda}_6 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \hat{\lambda}_7 &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Erneut in Analogie zur  $SU(2)$  (Generatoren  $\hat{S}_i = \hat{\sigma}_i/2$ ) werden die tatsächlichen Generatoren der  $SU(3)$  zu  $\hat{F}_i \equiv \hat{\lambda}_i/2$  gewählt. Diese genügen der Lie-Algebra mit  $[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = if_{ijk}\hat{F}_k$  - man beachte die Verwendung der Summenkonvention. Es lässt sich zeigen, dass die sogenannten Strukturfaktoren  $f_{ijk}$  total antisymmetrisch unter Vertauschung zweier Indizes sind, wie bereits der aus dem Bezug zur  $SU(2)$  stammende Zusammenhang mit den Pauli-Matrizen nahelegt. Die genauen Werte können entweder explizit nachgerechnet werden oder sind im Anhang A.1 nachzuschlagen.

## 2.2 Leiteroperatoren und Unteralgebren

In diesem Abschnitt soll von den Generatoren  $\hat{F}_i$  übergegangen werden zu einem Satz von Operatoren, die einfacher handzuhaben sind. Zunächst werde die sogenannte Hyperladung  $\hat{Y}$  traditionsgemäß als einfache Skalierung von  $\hat{F}_8$  als  $\hat{Y} \equiv 2\hat{F}_8/\sqrt{3}$  eingeführt. Aus der Analogie zur Drehimpuls- $SU(2)$  erkennt man außerdem, dass sich je mit  $(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$ ,  $(\hat{\lambda}_4, \hat{\lambda}_5)$  und  $(\hat{\lambda}_6, \hat{\lambda}_7)$  Leiteroperatoren und mit  $\hat{F}_3$  sowie  $\hat{Y}$  die zugehörigen dritten Komponenten der Unteralgebren definieren lassen. Es gelten also die folgenden Definitionen

$$\begin{aligned} \hat{T}_\pm &\equiv \hat{F}_1 \pm i\hat{F}_2, & \hat{T}_3 &\equiv \hat{F}_3, \\ \hat{V}_\pm &\equiv \hat{F}_4 \pm i\hat{F}_5, & \text{mit} &\quad \hat{V}_3 \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2}\hat{Y} - \hat{T}_3 \right), \\ \hat{U}_\pm &\equiv \hat{F}_6 \pm i\hat{F}_7 & &\quad \hat{U}_3 \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2}\hat{Y} + \hat{T}_3 \right), \end{aligned}$$

wobei die Operatoren gerade so gewählt wurden, dass für den  $T$ -,  $V$ - und  $U$ -Spin die  $SU(2)$ -Spin Algebra

$$[\hat{A}_+, \hat{A}_-] = 2\hat{A}_3 \quad \text{und} \quad [\hat{A}_3, \hat{A}_\pm] = \pm \hat{A}_\pm$$

erfüllt ist ( $\hat{A} = \hat{T}, \hat{V}, \hat{U}$ ). Es ist offensichtlich, dass diese Unteralgebren nach Konstruktion völlig gleichberechtigt sind. Diese fehlende Auszeichnung einer Unteralgebra wird später auf Symmetrien innerhalb der SU(3)-Multiplets führen.

Neben den oben angegebenen Kommutatoren existiert offensichtlich eine Vielzahl weiterer Kommutatorrelationen, hier nur ein kurzer Auszug:

$$[\hat{T}_3, \hat{Y}] = 0, \quad [\hat{T}_3, \hat{V}_\pm] = \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm, \quad [\hat{T}_3, \hat{U}_\pm] = \mp \frac{1}{2} \hat{U}_\pm, \quad [\hat{Y}, \hat{V}_\pm] = \pm \hat{V}_\pm, \quad \dots$$

Weitere lassen sich aus [2, 3] entnehmen oder können im Anhang A.2 nachgeschlagen werden. Besondere Beachtung findet nun der Kommutator  $[\hat{T}_3, \hat{Y}] = 0$ , welcher die Existenz gemeinsamer Eigenzustände  $|Y, T_3\rangle$  mit zugehörigen Eigenwertgleichungen

$$\hat{Y}|Y, T_3\rangle = Y|Y, T_3\rangle \quad \text{und} \quad \hat{T}_3|Y, T_3\rangle = T_3|Y, T_3\rangle$$

impliziert. Zwar sind in dieser Basis offensichtlich wegen  $[\hat{V}_3, \hat{Y}] = [\hat{U}_3, \hat{Y}] = [\hat{V}_3, \hat{T}_3] = [\hat{U}_3, \hat{T}_3] = 0$  auch die Operatoren  $\hat{V}_3$  und  $\hat{U}_3$  diagonal, jedoch genügt es für diese Betrachtung ausschließlich die Quantenzahlen  $Y$  und  $T_3$  explizit zu berücksichtigen. Aus der als bekannt vorausgesetzten Untersuchung der SU(2)-Spins ist außerdem gegeben, dass die möglichen Werte von  $A_3$  halbzahlig sind und ganzzahlig in dem Intervall von  $-A$  bis  $A$  durch Anwendung von  $\hat{A}_\pm$  durchlaufen werden (erneut  $A = T, V, U$ ). Damit sind  $T$ -,  $V$ - und  $U$ -Spin jeweils beschränkte Unteralgebren der SU(3).

Schon zu Beginn wurden die Leiteroperatoren  $\hat{A}_\pm$  als solche eingeführt. Jedoch bleibt zu überprüfen, ob diese Eigenschaft tatsächlich zutrifft. Unter Verwendung der Kommutatoren ist dies aber leicht zu zeigen, so gilt beispielsweise

$$\hat{T}_3(\hat{V}_\pm|Y, T_3\rangle) = ([\hat{T}_3, \hat{V}_\pm] + \hat{V}_\pm \hat{T}_3)|Y, T_3\rangle = \left(T_3 \pm \frac{1}{2}\right) \hat{V}_\pm|Y, T_3\rangle$$

und analog

$$\hat{Y}(\hat{V}_\pm|Y, T_3\rangle) = ([\hat{Y}, \hat{V}_\pm] + \hat{V}_\pm \hat{Y})|Y, T_3\rangle = (Y \pm 1) \hat{V}_\pm|Y, T_3\rangle.$$

Weil aufgrund der mehreren Unteralgebren eine rein algebraische Schreibweise wie bisher unübersichtlich ist, soll nun über ein entsprechendes Operatordiagramm nachvollzogen werden, wie die Wirkung der einzelnen Leiteroperatoren auf die Eigenzustände ist. Die obige Analyse, durchgeführt für alle Leiteroperatoren, liefert die Darstellung in der Abbildung 3. Dort ist die  $T_3$ - $Y$ -Ebene

$$\begin{aligned} \hat{T}_\pm|Y, T_3\rangle &\propto |Y, T_3 \pm 1\rangle \\ \hat{V}_\pm|Y, T_3\rangle &\propto |Y \pm 1, T_3 \pm 1/2\rangle \\ \hat{U}_\pm|Y, T_3\rangle &\propto |Y \pm 1, T_3 \mp 1/2\rangle \end{aligned}$$

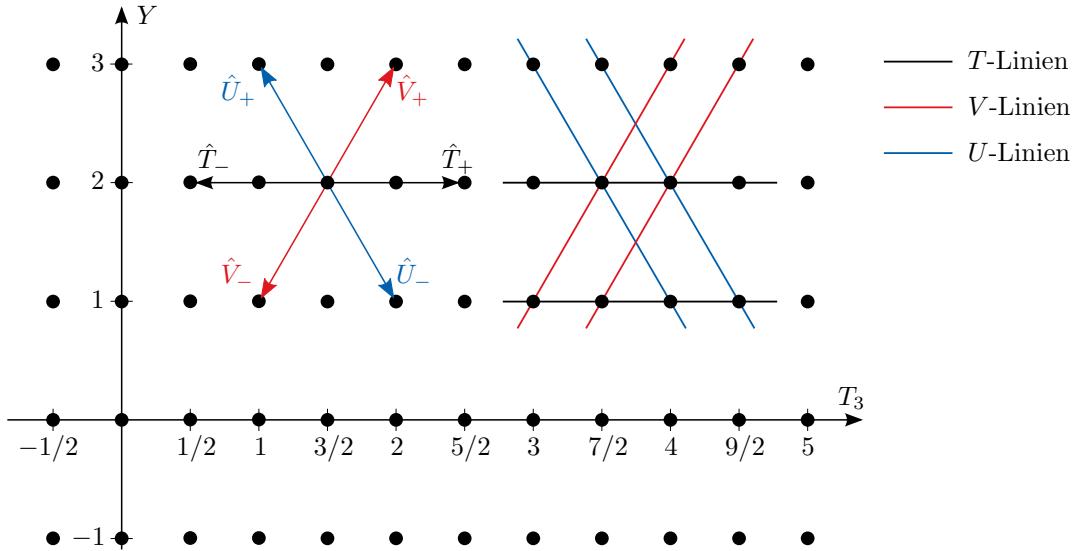


Abbildung 3: Grafische Veranschaulichung der Leiteroperatoren im Operatordiagramm.

dargestellt, in welcher die möglichen Zustände bereits mit Punkten markiert wurden. (Da hier nur Differenzen in der Hyperladung betrachtet werden, darf später die Null der  $Y$ -Achse der Symmetrie entsprechend verschoben werden.) Ausgehend von einem beliebigen Zustand  $|Y, T_3\rangle$  lässt sich nun die Wirkung der Leiteroperatoren verdeutlichen, indem ein Vektor zwischen Anfangs- und Endzustand eingezeichnet wird. In diesem Bild lassen sich die Unteralgebren als unterschiedliche Richtungen in der Eigenwert-Ebene verstehen. Mit der passenden Skalierung, in der Einheiten von  $[Y]$  gerade über  $[Y] = \sqrt{3}[T_3]/2$  mit Einheiten von  $[T_3]$  zusammenhängen, erkennt man eine Spiegelsymmetrie zu den  $A_3 = 0$ -Achsen ( $A = T, V, U$ ), welche jeweils senkrecht zu den  $A$ -Linien durch den Ursprung verlaufen (vgl. Abbildung).

## 2.3 Multiplett-Struktur

In diesem Abschnitt soll die Struktur der  $SU(3)$ -Multipletts gefunden werden. Dazu werden die Leiteroperatoren als Werkzeuge mit der aus der Gleichberechtigung des  $T$ -,  $V$ - und  $U$ -Spins gefolgerter Symmetrie kombiniert. In der  $SU(2)$  bestanden Multipletts aus einer eindimensionalen Anordnung von Zuständen unterschiedlicher Multiplizität entlang der dritten Drehimpulskomponente, welche mit den zugehörigen Leiteroperatoren  $\hat{S}_\pm$  durchlaufen werden konnten. Natürlich müssen daher in der  $SU(3)$  Multipletts einer zweidimensionalen Anordnung von Zuständen unterschiedlicher Multiplizität entsprechen. Im Folgenden sollen schrittweise deren quantitativen Eigenschaften entwickelt werden. Analog zu einer Clebsch-Gordan-Zerlegung im Fall des Drehimpulses ist der Ausgangspunkt der Konstruktion der Zustand mit größtem Gewicht (Zustand:  $|Y, T_3\rangle = |Y, T\rangle \equiv |A\rangle$ ) und die Ausnutzung der Symmetrie ( $T$ -,  $V$ - und  $U$ -Spin endlich und gleichberechtigt).

Zu Beginn werden die in der Abbildung 4 (links) eingezeichneten Spiegelsymmetrieachsen mit  $T_3 = 0$ ,  $V_3 = 0$  und  $U_3 = 0$  durch den Ursprung des Koordinatensystems in der  $T_3$ - $Y$ -Ebene gelegt. Ohne weitere Informationen gelangt man über die Symmetrie zu verschiedenen denkbaren Formen

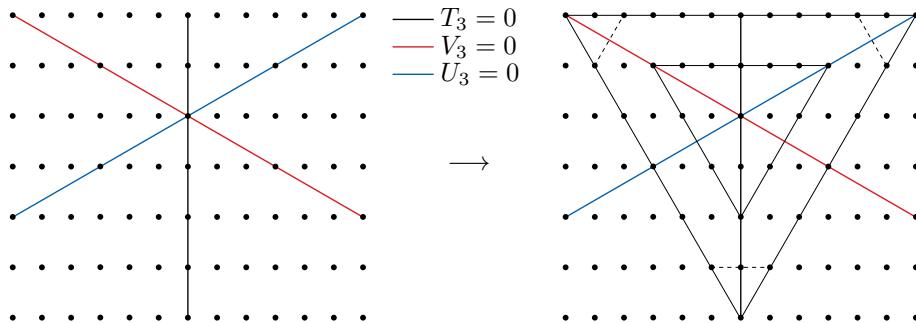


Abbildung 4: Verschiedene denkbare Ränder der Multipletts unter alleiniger Berücksichtigung der Endlichkeit und der Symmetrie der Unteralgebren.

der Multipletts, wie sie in Abbildung 4 (rechts) gezeigt sind. Welche Gestalt der tatsächliche Rand des Multipletts besitzt (durchgezogene Linien, gestrichelte Linie, ...), wird später genauer zu untersuchen sein.

Ausgehend von den bisherigen Überlegungen erkennt man jedoch, dass nicht alle Zustände auf und innerhalb der Begrenzung eines Multipletts auch selbst zum Multiplett gehören. Offenbar sind nur solche zugehörig, welche sich ausgehend von einem Zustand aus dem Multiplett durch Anwendung der Leiteroperatoren erreichen lassen. Weil diese Leiteroperatoren aber keine völlig beliebige Änderung der Quantenzahlen auf dem Gitter ermöglichen, reduziert sich die Anzahl um die Hälfte (vgl. Abbildung 5). So können beispielsweise keine Änderungen der Hyperladung um den Betrag eins erreicht werden, ohne dabei auch die  $T_3$ -Komponente des Ursprungszustandes zu verändern.

Im nächsten Schritt soll nach dem Identifizieren der allgemeinen Form der korrekte (maximale) Rand eines Multipletts durch Entlanglaufen (an der rechten Kante) unter Einsatz der Leiteroperatoren bestimmt werden. Beginnend im maximalen Zustand  $|A\rangle$  wird also eine Kette von Zuständen so durchlaufen, dass der Rand maximal wird. Dabei kann genutzt werden, dass analog zur  $SU(2)$

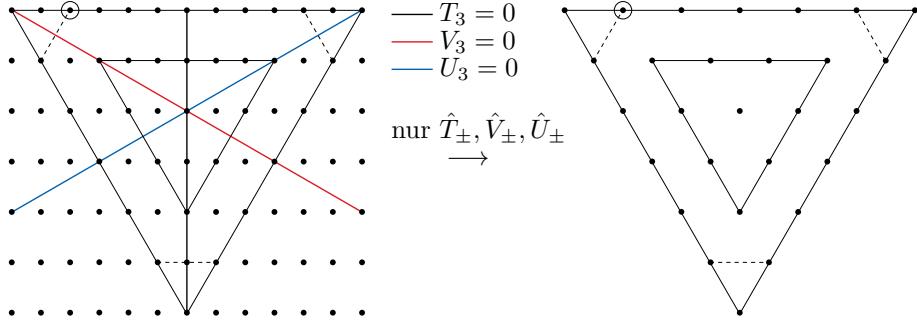


Abbildung 5: Tatsächlich zum Multiplett gehörige Zustände unter der Annahme, dass der markierte Zustand zu diesem gehört.

$(\hat{S}_+|l,l\rangle = 0)$  die Anwendung eines Leiteroperators, welcher die  $T_3$ -Komponente vergrößert, auf  $|A\rangle$  aus dem Multiplett herausführt:

$$\hat{T}_+|A\rangle = \hat{V}_+|A\rangle = \hat{U}_-|A\rangle = 0.$$

Ausgehend von diesem eindeutigen Zustand findet man die ersten idealen Schritte als Kette von  $p$  Anwendungen des Operators  $\hat{V}_-$ . Angelangt in dem Zustand  $|M\rangle = \hat{V}_-^p|A\rangle$  ergibt sich darauf eine Kette von insgesamt  $q$  Anwendungen des  $\hat{T}_-$  Operators. Dieses Ergebnis lässt sich knapp in der Form

$$\hat{V}_-^{p+1}|A\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \hat{T}_-^{q+1}|M\rangle = \hat{T}_-^{q+1}\hat{V}_-^p|A\rangle = 0$$

bei minimalem  $p$  und  $q$  notieren. Von dem so erreichten Punkt  $\hat{T}_-^q|M\rangle$  kann das Verfahren ganz analog wiederholt werden, da es sich nun um ein maximales Gewicht bezüglich der gleichberechtigten  $V$ -Unteralgebra (statt der  $T$ -Unteralgebra) handelt. Dieses Vorgehen ist in der Abbildung 6 skizziert. Eine übliche Bezeichnungsweise der so beschriebenen Multipletts ist durch  $D(p, q)$  gegeben.

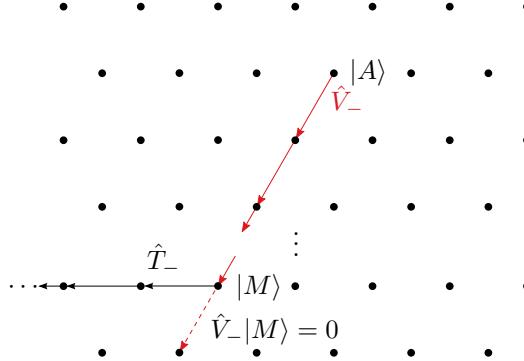


Abbildung 6: Teilstück am rechten Rand des Multipletts durch Entlanglaufen mit Leiteroperatoren.

Es bleibt nun zu zeigen, dass das Multiplett tatsächlich, wie oben behauptet, konkav ist. Betrachtet man beispielsweise die in Abbildung 7 (links) gezeigte Situation mit den zugehörigen Bezeichnungen, so ist zu zeigen, dass der Zustand  $|C'\rangle$  nicht mehr Teil des Multipletts ist. Eine kurze algebraische Berechnung liefert wegen  $[\hat{U}_-, \hat{V}_-] = 0$  und  $\hat{U}_-|A\rangle = 0$

$$|C'\rangle = \hat{U}_-|B\rangle = \hat{U}_-\hat{V}_-|A\rangle = ([\hat{U}_-, \hat{V}_-] + \hat{V}_-\hat{U}_-)|A\rangle = 0.$$

Ganz analog lässt sich diese Rückführung auch für alle Zustände  $|C^{(n)}\rangle = \hat{V}_-^n|C'\rangle$  sowie  $|M^{(m)}\rangle = \hat{T}_-^m\hat{V}_-|M\rangle$  wiederholen. Insgesamt folgt daraus, dass in der allgemeinen Formulierung von zuvor

dieser Teil des Randes des Multipletts tatsächlich aus der wiederholten Anwendung des  $\hat{V}_-$ - und anschließend des  $\hat{T}_-$ -Operators maximal folgt. Die explizite Diskussion dieser beiden Kanten genügt, da alle verbleibenden Kanten schon durch die Spiegelsymmetrie festgelegt sind.

Abschließend soll die Eindeutigkeit der Zustände auf dem Rand eines solchen SU(3)-Multipletts betrachtet werden. Da analog zur SU(2) (Überlagerung mehrerer Spins) der maximale Zustand  $|A\rangle$  bloß durch die vollständig konstruktive Überlagerung erreicht wird, ist es plausibel anzunehmen, dass dieser eindeutig ist. Wie in der Abbildung 7 (rechts) gezeigt, kann der Zustand  $|B\rangle$  zum einen

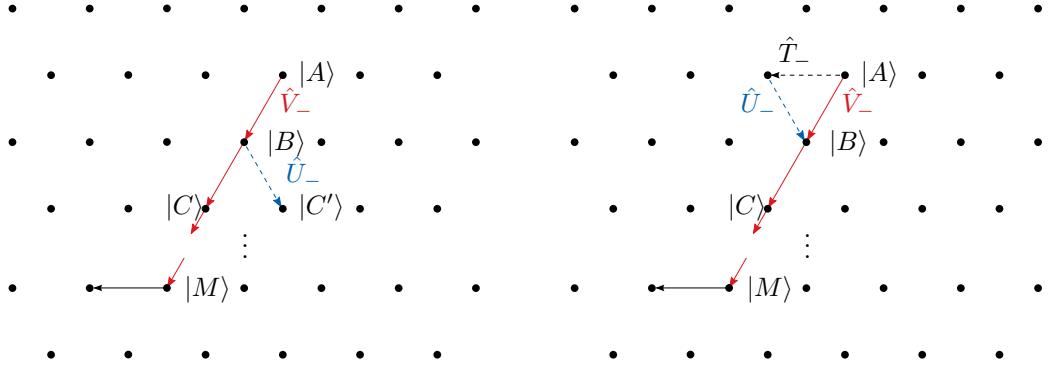


Abbildung 7: Links: Konkavheit der Multipletts. Rechts: Eindeutigkeit der Randzustände.

über die direkte Anwendung von  $\hat{V}_-$  oder aber über die Hintereinanderausführung von  $\hat{T}_-$  und  $\hat{U}_-$  erreicht werden. Jedoch liefert eine erneute algebraische Rechnung wegen  $[\hat{U}_-, \hat{T}_-] = \hat{V}_-$  sowie  $\hat{U}_-|A\rangle = 0$  gerade

$$|B\rangle = \hat{U}_- \hat{T}_- |A\rangle = ([\hat{U}_-, \hat{T}_-] + \hat{T}_- \hat{U}_-) |A\rangle = \hat{V}_- |A\rangle.$$

Das identische Ergebnis lässt sich für jeden anderen Umweg durch das Innere des Multipletts zeigen. Daher folgt der Zustand  $|B\rangle$  eindeutig aus dem Zustand  $|A\rangle$ . Analog erhält man auch die Eindeutigkeit der anderen Zustände auf dem Rand aus der Eindeutigkeit von  $|A\rangle$ .

Nachdem nun der Rand des Multipletts gefunden wurde, können alle weiteren Zustände des Multipletts durch einfache Anwendung der Leiteroperatoren bestimmt werden. Das Ergebnis für das Multiplett  $D(p, q) = D(6, 2)$  ist in der Abbildung 8 dargestellt. Diese offenbart zudem eine Schalenstruktur der Multipletts mit den jeweils übereinstimmenden Multiplizitäten. Diese zählt, wie gezeigt, vom Rand nach innen hoch, bis sie auf den innersten ( $(q+n)$ -ten) Schalen mit Dreieck-Struktur nur noch  $q+1$  beträgt. Zur Orientierung ist zudem der Zustand größten Gewichts  $|A\rangle$  erneut markiert.

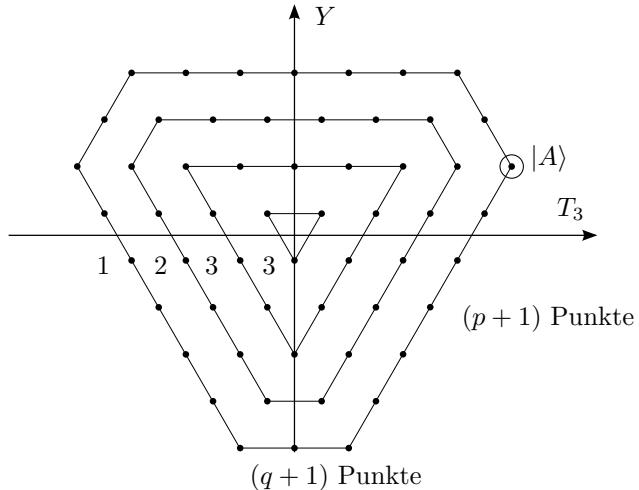


Abbildung 8: Struktur des Multipletts  $D(6,2)$  mit zugehörigen Multiplizitäten.

Im nächsten Abschnitt sollen verschiedene Rechnungen mit diesen Multipletts angestellt werden, daher zeigt die Abbildung 9 die später genutzten niedrigsten SU(3)-Multipletts und deren Bezeichnungen, welche gemäß den obigen Überlegungen konstruiert wurden. Die Multiplizitäten sind durch die Zahl an zusätzlichen Ringen um die jeweiligen Zustände angegeben. Man beachte, dass nur aus Darstellungsgründen auf eine Achsenbeschriftung verzichtet wurde. Anhand der bekannten

Eigenschaften der Leiteroperatoren lassen sich die jeweiligen Quantenzahlen der Zustände leicht rekonstruieren (vgl. für Beispiel auch Abbildung 11). Insbesondere sei ohne weitere Begründung darauf hingewiesen, dass die Multipletts  $D(p, q)$  bereits nach Konstruktion irreduzibel sind.

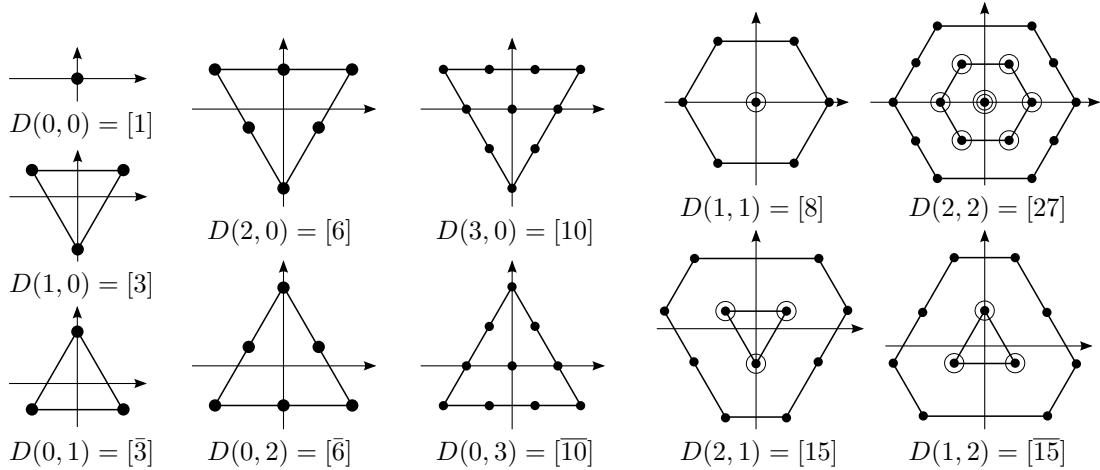


Abbildung 9: Darstellung der niedrigsten Multipletts der  $SU(3)$ . Multiplizitäten sind durch zusätzliche Kreise um die jeweiligen Zustände angegeben.

### 3 Das Quarkmodell

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Zerlegung der Produktzustände aus kleinsten nicht-trivialen Darstellungen in die im vorherigen Abschnitt gefundenen  $SU(3)$ -Multipletts. Abschließend werden in einigen Beispielen den Zuständen der Multipletts die experimentell bekannten Resonanzen zugeordnet.

#### 3.1 Annahmen in der Flavor-SU(3)

Um die Symmetrieeigenschaften der  $SU(3)$  tatsächlich nutzen zu können, ist es nötig, die drei in der Flavor-SU(3) berücksichtigten Quarks  $u$ ,  $d$  und  $s$  gleichberechtigt zu behandeln. Dazu gehören zum Einen eine übereinstimmende Masse  $m_u \approx m_d \approx m_s$  sowie zum Anderen eine Universalität der (starken) Wechselwirkung bezüglich der drei Quarkflavors. Dabei ist zumindest die Massenentartung nicht exakt, jedoch in genügendem Maße erfüllt, dass sinnvolle Ergebnisse erzielt werden können.

Analog zum Isospin-Modell der Nukleonen kann nun die Interpretation des  $T$ -Spins als Isospin angesetzt werden. Ebenso gelte die Gell-Mann-Nishijima-Formel für den Zusammenhang zwischen der elektrischen Ladung  $Q$  und den bisher in der  $SU(3)$  betrachteten Quantenzahlen  $Y$  und  $T_3$  mit

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3.$$

#### 3.2 Quarks in der $SU(3)$

Um das Verfahren der Konstruktion hadronischer Teilchen in der  $SU(3)$  nachvollziehen zu können, soll zunächst noch einmal die Analogie zur  $SU(2)$  als Beispiel angeführt werden. Es ist bekannt, dass mit einem einzelnen Spin-1/2, der kleinsten nicht-trivialen Darstellung der  $SU(2)$ , durch mehrfache Kopplung jeder mögliche Gesamtspin erreicht werden kann. Diese Kopplung wird durch das direkte Produkt realisiert. Anschaulich bedeutet dies eine schrittweise parallele oder antiparallele Addition der Teilspins. Die Abbildung 10 zeigt dies für die niedrigsten Produktzustände anschaulich. Je nach Anzahl der gekoppelten Spins erhält man durch parallele oder antiparallele Addition direkte Summen aus höheren und niedrigeren Multipletts. So zerfällt etwa das Produkt zweier Dubletts

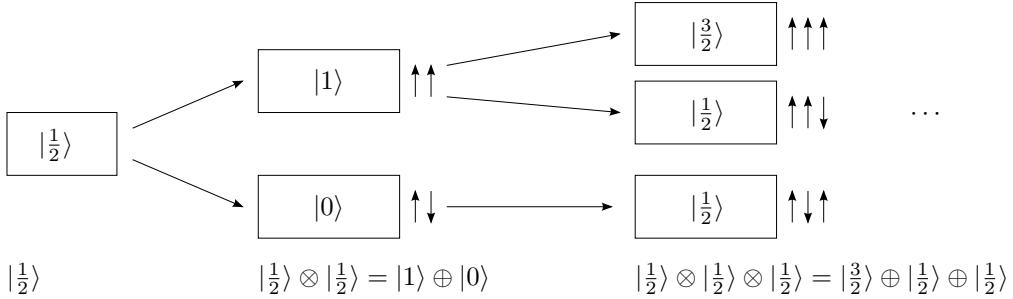


Abbildung 10: Zerlegung direkter Produkte im Fall des SU(2)-Spins.

(Spin-1/2) in ein Triplet und ein Singulett, das Produkt dreier Dubletts in ein Quartett und zwei Dubletts.

Es gilt nun die kleinste nicht-triviale Darstellung im Fall der SU(3) zu finden (vgl. Abbildung 9). Das Singulett kann hier genauso wie in der SU(2) sofort ausgeschlossen werden. Da die Unter-

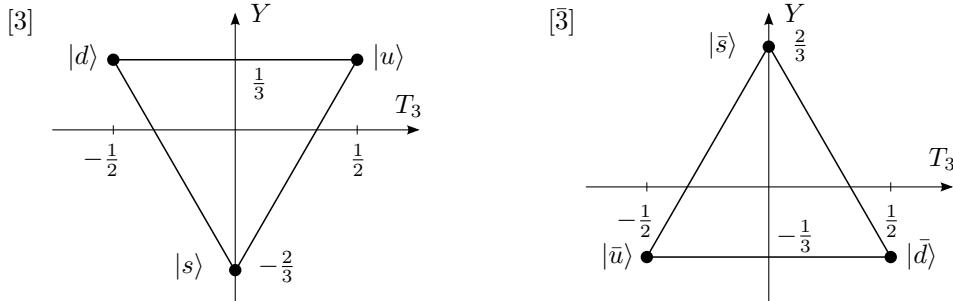


Abbildung 11: Identifikation der kleinsten nicht-trivialen Multipletts mit den Quarks.

algebren gleichberechtigt auftreten und jeweils nicht-trivial sein müssen, müssen also mindestens je ein  $T$ -,  $V$ - und  $U$ -Dublett enthalten sein. Dies ist für die Multipletts  $[3]$  und  $[\bar{3}]$  gerade erfüllt. Mathematisch genügt zwar bereits eine dieser Darstellungen um die restliche SU(3) zu konstruieren, jedoch wird in der Physik aufgrund weiterer gewünschter (hier nicht weiter diskutierter) Quantenzahlen stets das Triplet  $[3]$  sowie das Antitriplet  $[\bar{3}]$  verwendet. Die Interpretation dieser Zustände sind gerade die in der Einführung genannten Quarks und Antiquarks. Man prüft leicht die bekannte drittzahlige elektrische Ladung dieser Quarks sowie die entsprechend konjugierte Ladung im Fall der Antiquarks nach.

### 3.3 Ausreduktion der Produktzustände

Nun werden die allgemeinen Produktzustände aus  $p$  Quarks sowie  $q$  Antiquarks ( $q = u, d, s$ )

$$|q\rangle^p \otimes |\bar{q}\rangle^q$$

betrachtet. Ausgehend von diesen Produkten wird mit dem grafischen Verfahren die Zerlegung in eine Überlagerung der SU(3)-Multipletts durchgeführt. Das Verfahren soll am Beispiel der Mesonen (mit  $p = 1, q = 1$ ) sowie der Baryonen (mit  $p = 3, q = 0$ ) verdeutlicht werden. Die Gewichtsdiaagramme auf der linken Seite in Abbildung 12 entsprechen einem Quark und einem Antiquark, hier zeigen die Pfeilenden gerade auf die entsprechenden Gewichte der Zustände. (Die farbigen Markierungen dienen nur der grafischen Darstellung.) Das Produkt wird ausgeführt, indem an jedem Gewicht des Quark-Zustands der Antiquark-Zustand vektoriell addiert wird. Auf diese Weise gelangt man zur mittleren Grafik der Abbildung. Man zählt leicht die jeweiligen Multiplizitäten ab. Die Zerlegung kann nun durch eine Überlagerung der SU(3)-Multipletts in einer direkten Summe

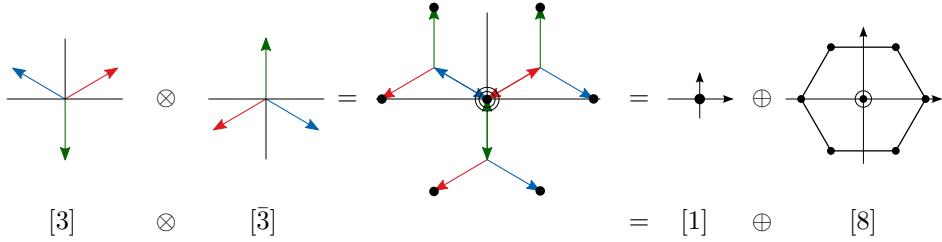


Abbildung 12: Ausreduktion des direkten Produktes zwischen einem Quark und einem Antiquark:  $[3] \otimes [\bar{3}]$ .

durchgeführt werden. (Grafisch entspricht diese direkte Summe also der Addition der Multiplizitäten in den jeweiligen Zuständen der Multipletts aus Abbildung 9.) Das Ergebnis ist also, dass Mesonen in Singulett und Oktett Multipletts auftreten.

Ganz analog lässt sich das Verfahren bei den Baryonen anwenden. Hier werde ein  $|q|^3$ -Zustand betrachtet. Das Produkt soll dabei in zwei Schritten ausreduziert werden, im Ersten wird das Produkt  $[3] \otimes [3] = [\bar{3}] \oplus [6]$  zerlegt (vgl. Abbildung 13). Dann kann im zweiten Schritt gemäß

$$[3] \otimes ([3] \otimes [3]) = [3] \otimes ([\bar{3}] \oplus [6]) = ([3] \otimes [\bar{3}]) \oplus ([3] \otimes [6])$$

in Abbildung 14 das verbleibende Produkt zerlegt werden (hier wird an jeden Zustand des Sextetts ein Quark-Triplett vektoriell addiert). Insgesamt findet sich die Zerlegung

$$[3] \otimes ([3] \otimes [3]) = [1] \oplus [8] \oplus [8] \oplus [10]$$

und somit eine Erklärung für die Beobachtung von Baryonen in Singulett-, Oktett- und Dekuplett.

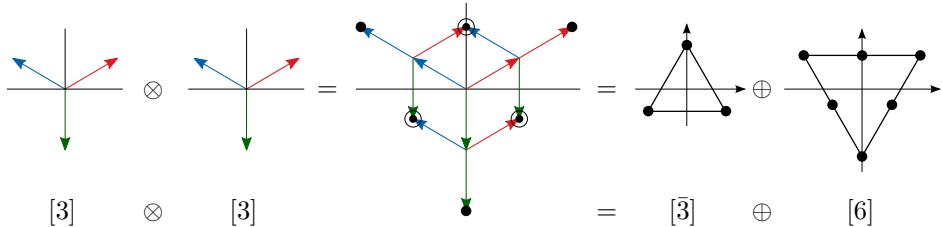


Abbildung 13: Ausreduktion des direkten Produktes zwischen zwei Quarks:  $[3] \otimes [3]$ .

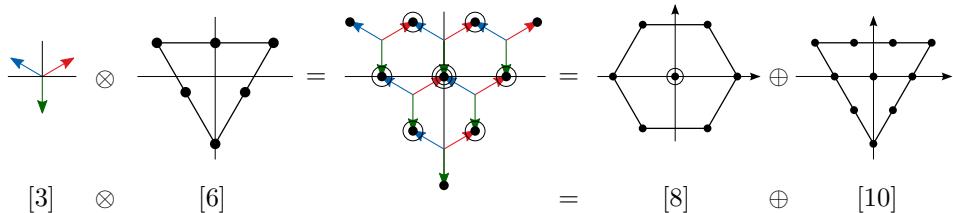


Abbildung 14: Ausreduktion des direkten Produktes zwischen einem Quark und einem Sextett:  $[3] \otimes [6]$ .

Schließlich kann in den Abbildungen 15 und 16 beispielhaft für die pseudoskalaren Mesonen mit verschwindendem Gesamtspin und negativer Parität sowie das Baryonen-Oktett mit Gesamtspin 1/2 und das Dekuplett mit Gesamtspin 3/2 mit jeweils positiver Parität die Zuordnung der experimentell beobachteten Teilchen zu den Hadronen-Multipletts in der obigen Zerlegung durchgeführt werden. Neben dem Spin und der Parität kann jedem Zustand der Multipletts direkt die

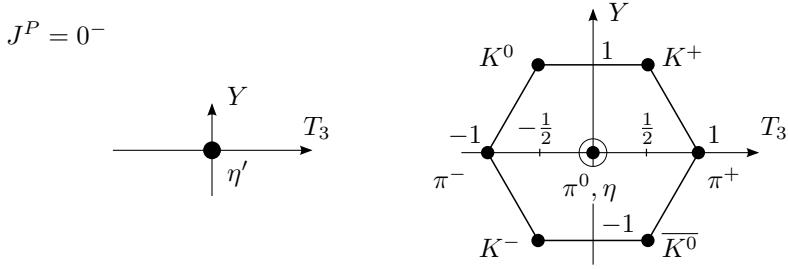


Abbildung 15: Singulett und Oktett der pseudoskalaren Mesonen ( $J^P = 0^-$ ).

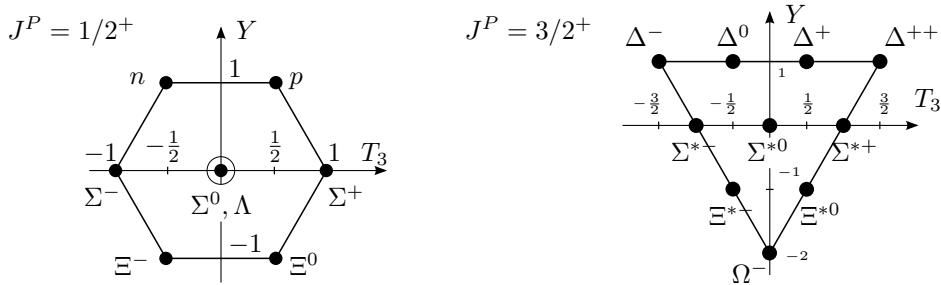


Abbildung 16: Darstellung des  $1/2^+$ -Baryonen-Oktetts und des  $3/2^+$ -Baryonen-Dekupletts.

elektrische Ladung  $Q = Y/2 + T_3$  und die Masse (Anzahl der Quarks im Verbund) zugewiesen werden. Hinzu kommen weitere Quantenzahlen, die bisher nicht berücksichtigt wurden wie etwa die Strangeness. Abschließend sei darauf hingewiesen, dass sich im Baryonen-Oktett sogar das SU(2)-Isospin-Dublett der Nukleonen wiedererkennen lässt.

## 4 Zusammenfassung

Im Wesentlichen wurden in dieser Ausarbeitung drei Schritte durchgeführt, um den Zusammenhang zwischen der mathematischen Gruppe SU(3) sowie dem Quarkmodell im Sinne der Flavor-SU(3) herzustellen.

1. Durch Konstruktion der SU(3) aus SU(2) Unteralgebren konnte schnell auf die Struktur der SU(3)-Multipletts geschlossen werden.
2. Die Identifikation der kleinsten nicht-trivialen Darstellungen, den SU(3)-Triplets, mit Elementarteilchen, den Quarks und Antiquarks, lieferte den eigentlichen Zusammenhang zwischen dem physikalischen Modell und der mathematischen Theorie.
3. Die Zerlegung der direkten Produkte, den Produktzuständen der Quarks und Antiquarks, führte auf die bekannte Ordnung der Hadronen-Multipletts.

## 5 Erfolge, Schwierigkeiten und Ausblick

Die in diesem Dokument eingeführte Flavor-SU(3) liefert einen Grund für die innere Symmetrie in Form der beobachteten Hadronen-Multipletts, indem es auf natürliche Weise die Quarks und ihre Antiteilchen-Partner als Elementarteilchen einführt. Damit verbleibt das Modell nicht mehr nur als reine Buchhaltung nützlich, sondern gibt gleichzeitig eine tiefergehende Sichtweise auf den Aufbau der Hadronen und damit auch der Materie. Bemerkenswert ist außerdem die korrekte Vorhersage des  $\Omega^-$ -Teilchens aus der Theorie mit entsprechenden Eigenschaften Spin, Parität, Ladung und Masse (unter Berücksichtigung der nicht exakten Symmetrie).

Die vorausgesetzte Massenentartung ist allerdings nicht exakt, das strange-Quark hat eine um etwa 90 MeV größere Masse (current quark mass). Aus dieser gebrochenen Flavor-Symmetrie ergibt sich eine Vorhersage der Teilcheneigenschaften, die größere Fehler besitzt, als es heute nötig wäre. Diesem Problem lässt sich in gewissem Maße etwa mit einer störungstheoretischen Behandlung begegnen (Gell-Mann-Okubo Massenformel [4]). Außerdem werden in der Flavor-SU(3) ausschließlich drei der sechs im Standardmodell benötigten Quarks berücksichtigt.

Aus diesen Gründen und im Hinblick auf den großen Erfolg des Modells ist es sinnvoll, verschiedene Erweiterungen anzubringen. Zum Einen wäre eine naive Verallgemeinerung auf eine SU(4)-Symmetrie unter Einbeziehung des charm-Quarks denkbar. Jedoch stößt man dabei gleich auf mehrere Probleme: Es wird zunächst einmal ein anderes Verfahren der Ausreduktion benötigt, da nun die kleinste nicht-triviale Darstellung ein Tetraeder ist und die grafische Addition damit in drei Dimensionen durchgeführt werden müsste. Dieses Problem ließe sich beispielsweise durch Verwendung der sogenannten Young-Tableaux lösen. Allerdings ist zudem die Flavor-Symmetrie sehr viel stärker gebrochen, das Massenverhältnis  $m_c/m_u$  (current quark masses) liegt in der Größenordnung von 500.

Eine andere Erweiterung stellt die explizite Berücksichtigung des Spins dar. So ergibt sich insgesamt eine SU(6) Symmetriegruppe [4].

Betrachtet man beispielweise die fermionische  $\Delta^{++}$ -Resonanz im Baryonen-Dekuplett in Abbildung 16, so findet man, dass die Wellenfunktion gerade ein Produkt aus der Flavor-Funktion  $|uuu\rangle$  und der Spin-Funktion  $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$  sein muss. Eine solche Funktion ließe sich aber nicht antisymmetrisieren, weshalb das Pauli-Prinzip verletzt wäre, sofern nicht noch eine weitere Quantenzahl, die sogenannte Farbladung, eingeführt wird [1]. Die Farbladung lässt sich ebenfalls im Rahmen einer SU(3)-Symmetrie beschreiben. Fordert man nun eine Farbneutralität für freie Teilchen, erhält man in der Wellenfunktion den Faktor  $|rgb\rangle$  zusätzlich und kann eine total antisymmetrische Wellenfunktion erzeugen. Diese Erweiterungen sind natürlich nur Beispiele, weitere Verallgemeinerungen/Erweiterungen sind denkbar.

## Literatur

- [1] C. Amsler, *Kern- und Teilchenphysik*, vdf Hochschulverlag (2007).
- [2] S. Gasiorowicz, *Elementarteilchenphysik*, Wissenschaftsverlag Bibliographisches Institut (1975).
- [3] W. Greiner, B. Müller, *Theoretische Physik Band 5: Quantenmechanik II - Symmetrien*, Harri Deutsch (1985).
- [4] O. Nachtmann, *Elementarteilchenphysik - Phänomene und Konzepte*, Vieweg Verlag (1986).

## A Anhang

### A.1 Strukturfaktoren der SU(3) Lie-Algebra

Wie bereits angegeben, sind die Strukturfaktoren  $f_{ijk}$  (mit  $i, j, k = 1, \dots, 8$ ) in der Lie-Algebra

$$[\hat{F}_i, \hat{F}_j] = i f_{ijk} \hat{F}_k$$

total antisymmetrisch. Die meisten Faktoren verschwinden somit, es bleiben die in der Tabelle 1 angegebenen, nicht-verschwindenden Faktoren. Alle nicht-explizit angegebenen Strukturfaktoren sind entweder Null (beispielsweise für  $i = j$ ) oder können durch Permutation erzeugt werden (beispielsweise  $f_{231}$  oder  $f_{132}$ ).

$(i, j, k)$	(1, 2, 3)	(1, 4, 7)	(1, 5, 6)	(2, 4, 6)	(2, 5, 7)	(3, 4, 5)	(3, 6, 7)	(4, 5, 8)	(6, 7, 8)
$f_{ijk}$	1	$1/2$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$

Tabelle 1: Liste der nicht-verschwindenden Strukturfaktoren  $f_{ijk}$  nach [3].

### A.2 Kommutatorrelationen der SU(3)-Unteralgebren

Nutzt man die Definitionen

$$\begin{aligned} \hat{T}_\pm &\equiv \hat{F}_1 \pm i \hat{F}_2, & \hat{T}_3 &\equiv \hat{F}_3, \\ \hat{V}_\pm &\equiv \hat{F}_4 \pm i \hat{F}_5, & \text{und} & \hat{V}_3 &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \hat{Y} - \hat{T}_3 \right), \\ \hat{U}_\pm &\equiv \hat{F}_6 \pm i \hat{F}_7 & \hat{U}_3 &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} \hat{Y} + \hat{T}_3 \right) \end{aligned}$$

sowie  $\hat{Y} \equiv 2\hat{F}_8/\sqrt{3}$  und gleichzeitig die Hermitizität der Generatoren  $\hat{F}_i$ , also

$$\hat{T}_+^\dagger = \hat{T}_-, \quad \hat{V}_+^\dagger = \hat{V}_-, \quad \text{und} \quad \hat{U}_+^\dagger = \hat{U}_-,$$

so genügt die Angabe der folgenden Kommutatorrelationen nach [2]:

$$\begin{aligned} [\hat{T}_3, \hat{T}_\pm] &= \pm \hat{T}_\pm, & [\hat{T}_+, \hat{T}_-] &= 2\hat{T}_3, & [\hat{Y}, \hat{T}_\pm] &= 0, \\ [\hat{T}_3, \hat{V}_\pm] &= \pm \frac{1}{2} \hat{V}_\pm, & [\hat{V}_+, \hat{V}_-] &= 2\hat{V}_3, & [\hat{Y}, \hat{V}_\pm] &= \pm \hat{V}_\pm, \\ [\hat{T}_3, \hat{U}_\pm] &= \mp \frac{1}{2} \hat{U}_\pm, & [\hat{U}_+, \hat{U}_-] &= 2\hat{U}_3, & [\hat{Y}, \hat{U}_\pm] &= \pm \hat{U}_\pm, \\ [\hat{T}_+, \hat{V}_+] &= 0, & [\hat{T}_+, \hat{V}_-] &= -\hat{U}_-, & [\hat{Y}, \hat{T}_3] &= 0, \\ [\hat{T}_+, \hat{U}_-] &= 0, & [\hat{T}_+, \hat{U}_+] &= \hat{V}_+, & [\hat{Y}, \hat{V}_3] &= 0, \\ [\hat{U}_+, \hat{V}_+] &= 0, & [\hat{V}_-, \hat{U}_+] &= -\hat{T}_-, & [\hat{Y}, \hat{U}_3] &= 0. \end{aligned}$$