

Die Permutationsgruppe S_n

Lasse Kiesow

11. Mai 2015

1 Einleitung

Die Permutationsgruppe wird auch häufig als symmetrische Gruppe bezeichnet und daher mit S_n abgekürzt, wobei das n für die Dimension steht. Die Permutationsgruppe ist aus mehreren Gründen interessant:

Zum einen sind alle endlichen Gruppen Untergruppen der Permutationsgruppe. Kenntnisse über die Darstellung der Permutationsgruppe sind daher auch hilfreich, wenn man andere endliche Gruppen untersuchen möchte, wie z.B. die $SU(2)$ und $SU(3)$, die in der Physik eine große Rolle spielen.

Zum anderen ist die Permutationsgruppe von direkter Bedeutung für Systeme ununterscheidbarer Teilchen, d.h. für Systeme, in denen der Hamiltonoperator invariant unter Vertauschung der gewählten Einteilchenobservablen ist.

Dies wird in Abschnitt 3 näher erläutert. Davor werden in Abschnitt 2 die nötigen theoretischen Grundlagen kurz dargestellt. Am Schluss wird ein Ausblick über die Zusammenhänge der S_n mit der $SU(2)$ und der $SU(3)$ gegeben.

2 Formalismus

Die Elemente der Permutationsgruppe können als Permutationen der Menge $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ aufgefasst werden, wobei die Zahlen $1, 2, 3, \dots$ z.B. für alle Koordinaten bzw. Einteilchenobservablen der Teilchen $1, 2, 3, \dots$ stehen können. Da es für n Elemente $n!$ Permutationen gibt, hat die S_n $n!$ Elemente. So hat z.B. die S_3 folgende 6 Elemente

$$\begin{aligned} P_e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & P_{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ P_{13} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & P_{23} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ P_{123} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & P_{132} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bei P_e handelt es sich offensichtlich um das Einselement. P_{12} , P_{13} und P_{23} sind Transpositionen, die die Teilchen 1,2 bzw. 1,3 bzw. 2,3 miteinander austauschen.

Transpositionen sind von besonderer Bedeutung, denn jede beliebige Permutation kann immer als Produkt von Transpositionen geschrieben werden. So können z.B. die übrigen

beiden Elemente der S_3 geschrieben werden als

$$P_{123} = P_{13}P_{12} \quad \text{und} \quad P_{132} = P_{12}P_{13}.$$

Eine Permutation wird gerade genannt, wenn sie von einer geraden Anzahl von Transpositionen erzeugt wird. Entsprechendes gilt für die ungeraden Permutationen.

Da es egal ist, in welcher Reihenfolge Teilchen vertauscht werden, gilt $P_{ij} = P_{ji}$. Außerdem erhält man nach zweimaliger Anwendung einer Transposition offensichtlich wieder den ursprünglichen Zustand, also $P_{ij}^2 = \mathbb{1}$, d.h. es handelt es sich um Projektionsoperatoren. Somit sind die Eigenwerte ± 1 .

3 Darstellungen der S_n und ununterscheidbare Teilchen

3.1 Erinnerung: Ununterscheidbare Teilchen

In der klassischen Physik sind Teilchen immer eindeutig anhand ihrer Bahnkurve identifizierbar. Selbst wenn es sich um identische Teilchen handelt (d.h. Teilchen mit gleicher Masse, Ladung, etc.), kann durch eine einmalige Messung von Ort und Impuls die Bahnkurve berechnet und das Teilchen somit (prinzipiell) zu allen Zeiten identifiziert werden.

In der Quantenmechanik verhält es sich anders. Überlappen die Wellenfunktionen zweier oder mehrerer Teilchen, so sind diese nicht mehr unterscheidbar. Betrachtet man als Beispiel die Streuung zweier Elektronen, so kann keinem der Teilchen eine Bahn zugewiesen werden und man kann nicht sagen, welches gestreute Teilchen welchem einlaufenden Teilchen entspricht. D.h., dass es in diesem Fall unmöglich ist, eine Vertauschung der Teilchen durch irgendeine Messung festzustellen. Das System ist also invariant unter Permutation der beiden Elektronen.

Dies lässt sich natürlich verallgemeinern. Für n -Teilchen Systeme, in denen der Hamiltonoperator invariant unter Permutationen ist, sei $\Psi(1, 2, 3, \dots, n)$ eine Eigenfunktion von H zum Eigenwert E . Dann gilt, dass eine beliebige Permutation $P\Psi$ von Ψ wieder Eigenfunktion zum selben Eigenwert E ist.

Diese Tatsache führt dazu, dass die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen der S_n den Entartungsgrad des entsprechenden Energieniveaus angeben, wie im Folgenden gezeigt wird.

3.2 Zwei ununterscheidbare Teilchen, S_2

Es werden zwei Teilchen (1,2) in unterschiedlichen Einteilchenzuständen (u, d) betrachtet. Durch Permutation lassen sich also zwei linear unabhängige Vektoren aufstellen

$$\Psi_1 = u(1)d(2) \quad \text{und} \quad \Psi_2 = d(1)u(2).$$

Es fällt sofort auf, dass diese keine Symmetrieeigenschaften besitzen. Statt also diese beiden Vektoren zu nehmen, um die S_2 aufzuspannen, konstruiert man zwei andere linear unabhängige Vektoren mit wohldefinierten Symmetrieeigenschaften: einen total

symmetrischen Ψ_S und einen total antisymmetrischen Ψ_A , welche gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\Psi_S &= \frac{1}{2}(u(1)d(2) + d(1)u(2)), \\ \Psi_A &= \frac{1}{2}(u(1)d(2) - d(1)u(2)).\end{aligned}$$

Man erhält sie aus dem Zustand Ψ_1 durch Anwendung des Symmetrisators

$$S = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + P_{12})$$

und Antisymmetrisators

$$A = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - P_{12}).$$

Wendet man die Operatoren der S_2 auf Ψ_S an

$$P_e \Psi_S = \Psi_S, \quad P_{12} \Psi_S = \Psi_S,$$

so sieht man, dass Ψ_S einen eindimensionalen invarianten Unterraum der S_2 bildet. Man sagt auch, Ψ_S ist Basis einer eindimensionalen irreduziblen Darstellung von S_2 .

Anwendung der Operatoren auf Ψ_A liefert

$$P_e \Psi_A = \Psi_A, \quad P_{12} \Psi_A = -\Psi_A.$$

Ψ_A bildet also einen anderen eindimensionalen invarianten Unterraum und ist somit Basis einer anderen eindimensionalen irreduziblen Darstellung der S_2 . Sowohl Ψ_S als auch Ψ_A sind Singulets.

Die bisherige Diskussion lässt sich leicht verallgemeinern. Aus einem beliebigen n -Teilchen Zustand lässt sich durch den verallgemeinerten Symmetrisator

$$S = \frac{1}{n!} \sum_{P \in S_n} P$$

ein total symmetrischer Zustand konstruieren und durch den verallgemeinerten Antisymmetrisator

$$A = \frac{1}{n!} \sum_{P \in S_n} \eta_P P$$

ein total antisymmetrischer Zustand. Dabei ist $\eta_P = \begin{cases} +1 & \text{für } P \text{ gerade} \\ -1 & \text{für } P \text{ ungerade} \end{cases}$.

Die so erhaltenen total symmetrischen bzw. antisymmetrischen Zustände kommen in der Natur in Form von Bosonen und Fermionen vor. Anders ausgedrückt: Die Natur verwendet nur die eindimensionalen irreduziblen Darstellungen der S_n .

3.3 Drei ununterscheidbare Teilchen, S_3

Aus drei Teilchen in drei verschiedenen Einteilchenzuständen (u, d, s) lassen sich durch Permutationen sechs linear unabhängige Vektoren bilden. Erneut sollen diese in Vektoren mit wohldefinierten Symmetrieeigenschaften umgeschrieben werden. Zur Vereinfachung wird die Konvention eingeführt, dass die Teilchen immer in der Reihenfolge 123 geschrieben

werden. Dann können die Teilchenzahlen weggelassen werden und es ist z.B. $u(2)d(1)s(3) \equiv dus$.

Aus dem letzten Abschnitt ist klar, wie der total symmetrische und der total antisymmetrische Zustand zu konstruieren sind:

$$\begin{aligned}\Psi_S &= S_{123} dus = \left(\frac{1}{3!} \sum_{P \in S_3} P \right) dus = \frac{1}{3!} (P_e + P_{12} + P_{13} + P_{23} + P_{123} + P_{132}) dus \\ &= \frac{1}{3!} (dus + dus + sdu + usd + sud + dsu), \\ \Psi_A &= A_{123} dus = \left(\frac{1}{3!} \sum_{P \in S_3} \eta_P P \right) dus = \frac{1}{3!} (P_e - P_{12} - P_{13} - P_{23} + P_{123} + P_{132}) dus \\ &= \frac{1}{3!} (dus - dus - sdu - usd + sud + dsu).\end{aligned}$$

Diese bilden zwei unterschiedliche eindimensionale irreduzible Darstellungen der S_3 .

Um die S_3 aufzuspannen, benötigt man aber insgesamt sechs Vektoren. Da es nur je einen total symmetrischen bzw. antisymmetrischen Vektor gibt, müssen die übrigen vier Vektoren gemischt symmetrisch sein. Man erhält sie, indem man zuerst zwei Teilchen symmetrisiert und dann zwei Teilchen antisymmetrisiert (oder andersrum), wobei ein Teilchen in beiden Operationen vorkommen muss. Welche Vektoren man bildet, ist relativ willkürlich. Eine Möglichkeit ist

$$\begin{aligned}\Psi_{G_1} &= A_{13} S_{12} \Psi = A_{13} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + P_{12}) dus = \frac{1}{4} (\mathbb{1} - P_{13}) (dus + dus) = \frac{1}{4} (dus - sdu + dus - sud) \\ \Psi_{G_2} &= A_{23} S_{12} \Psi = A_{23} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + P_{12}) dus = \frac{1}{4} (\mathbb{1} - P_{23}) (dus + dus) = \frac{1}{4} (dus - usd + dus - dsu) \\ \Psi_{G_3} &= A_{23} S_{13} \Psi = A_{23} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + P_{13}) dus = \frac{1}{4} (\mathbb{1} - P_{23}) (dus + sdu) = \frac{1}{4} (dus - usd + sdu - sud) \\ \Psi_{G_4} &= A_{12} S_{13} \Psi = A_{12} \frac{1}{2} (\mathbb{1} + P_{13}) dus = \frac{1}{4} (\mathbb{1} - P_{12}) (dus + sdu) = \frac{1}{4} (dus - dus + sdu - dsu).\end{aligned}$$

Man könnte nun annehmen, dass diese vier Vektoren eine vierdimensionale irreduzible Darstellung der S_n bilden. Dies ist jedoch nicht der Fall, wie man durch Anwenden der Operatoren der S_3 auf diese Zustände sehen kann. Es ist nämlich einerseits

$$\begin{aligned}P_{12} \Psi_{G_1} &= \frac{1}{4} (dus - dsu + dus - usd) = \Psi_{G_2} \\ P_{13} \Psi_{G_1} &= \frac{1}{4} (sdu - dus + sud - dus) = -\Psi_{G_1} \\ P_{23} \Psi_{G_1} &= \frac{1}{4} (usd - sud + dsu - sdu) = \Psi_{G_1} - \Psi_{G_2} \\ P_{123} \Psi_{G_1} &= P_{13} P_{12} \Psi_{G_1} = P_{13} \Psi_{G_2} = \frac{1}{4} (sdu - dsu + sud - usd) = \Psi_{G_2} - \Psi_{G_1} \\ P_{132} \Psi_{G_1} &= P_{12} P_{13} \Psi_{G_1} = P_{12} (-\Psi_{G_1}) = \Psi_{G_2}\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
P_{12}\Psi_{G_2} &= \Psi_{G_1} & \text{denn } P_{12}\Psi_{G_1} &= \Psi_{G_2} \text{ und } P_{ij}^2 = \mathbb{1} \\
P_{13}\Psi_{G_2} &= \Psi_{G_2} - \Psi_{G_1} \\
P_{23}\Psi_{G_2} &= \frac{1}{4}(usd - uds + dsu - dus) = -\Psi_{G_2} \\
P_{123}\Psi_{G_2} &= P_{13}P_{12}\Psi_{G_2} = P_{13}\Psi_{G_1} = -\Psi_{G_1} \\
P_{132}\Psi_{G_2} &= P_{12}P_{13}\Psi_{G_2} = P_{12}(\Psi_{G_2} - \Psi_{G_1}) = \Psi_{G_1} - \Psi_{G_2}.
\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass Ψ_{G_1} und Ψ_{G_2} einen zweidimensionalen invarianten Unterraum – also ein Dublett – bilden. Analog zeigt man, dass auch Ψ_{G_3} und Ψ_{G_4} einen anderen zweidimensionalen Unterraum bilden. Die vier gemischt symmetrischen Vektoren zerfallen also in zwei zweidimensionale irreduzible Darstellungen der S_3 .

Im Allgemeinen zerfallen alle gemischt symmetrischen Vektoren von S_n in vieldimensionale irreduzible Darstellungen. Die Frage ist nun natürlich, wieso man sich für diese interessieren sollte, wenn doch in der Natur nur total symmetrische bzw. antisymmetrische Zustände vorkommen. Die Antwort ist, dass Zustände zwar in der Tat immer total symmetrisch bzw. antisymmetrisch sind, wenn *alle* Einteilchenobservablen zweier Teilchen ausgetauscht werden, aber durchaus gemischte Symmetrie besitzen können, wenn man nur den Austausch *einer* Einteilchenobservable (z.B. Ort oder Spin) betrachtet. Dies wird in der Physik oft getan. So wird z.B. eine Wellenfunktion häufig in einen Orts- und in einen Spinanteil aufgespalten, die dann separat untersucht werden können und eben gemischte Symmetrie besitzen können. Diese Symmetrie muss natürlich so beschaffen sein, dass die Gesamtwellenfunktion entweder total symmetrisch oder antisymmetrisch ist.

Aus Abschnitt 2 ist bekannt, dass alle Permutationen einer gegebenen Eigenfunktion mit Eigenwert E denselben Eigenwert besitzen. *Somit gibt also die Dimension einer irreduziblen Darstellung den Entartungsgrad des entsprechenden Energieniveaus an.*

Für die S_3 war es noch recht einfach, die Dimension der mehrdimensionalen irreduziblen Darstellungen zu bestimmen, da es nur vier gemischt symmetrische Zustände gibt. Mit zunehmender Dimension der Permutationsgruppe wird es aber immer aufwendiger. Für die S_5 gibt es insgesamt 120 aufzustellende Vektoren, von denen 118 gemischte Symmetrie aufweisen. Auf diese die Gruppenoperatoren anzuwenden, um zu sehen, welche Vektoren invariante Unterräume bilden, ist eine langwierige Arbeit, die man sich gerne sparen möchte. In der Tat ist es möglich, sich dieser Arbeit zu entziehen, wenn man die Standard Young Tableaus aufstellen kann.

3.4 Young Schemata und Tableaus

Young Schemata dienen der graphischen Veranschaulichung symmetrischer, antisymmetrischer und gemischt symmetrischer Zustände. Dafür wird jedes Teilchen durch ein Kästchen dargestellt. Kästchen in einer Zeile repräsentieren einen symmetrischen Zustand, Kästchen in einer Spalte einen antisymmetrischen. Die Young Schemata der S_2 und S_3 sind also

$$\begin{aligned}
S_2 : \quad \Psi_S &= \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} & \Psi_A &= \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \\
S_3 : \quad \Psi_S &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \end{array} & \Psi_A &= \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} & \Psi_G &= \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}.
\end{aligned}$$

Für die Young Schemata, die gemischt symmetrische Zustände repräsentieren, trifft man die Konvention, dass es in einer Zeile nicht mehr Kästchen als in der darüberliegenden Zeile geben darf, d.h. $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}$ ist verboten.

Ein Young Tableau ist ein Young Schema, das mit natürlichen Zahlen gefüllt ist. Die Zahlen repräsentieren die Einteilchenzustände, in denen sich das jeweilige Teilchen befindet.

Beim Standard Young Tableau – welche wichtig sind, um die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen zu bestimmen – dürfen die Kästchen nur nach bestimmten Regeln mit Zahlen gefüllt werden:

- Die Zahlen dürfen in einer Zeile (von links nach rechts) nicht abnehmen,
- die Zahlen müssen in einer Spalte (von oben nach unten) zunehmen.

So sind die Standard Young Tableaus der symmetrischen Zustände zweier Teilchen in drei möglichen Einteilchenzuständen gegeben durch

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

und die der antisymmetrischen Zustände durch

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}.$$

Dass zwei Zahlen in einer Zeile mehrfach auftreten dürfen, aber niemals mehrfach in einer Spalte, entspricht gerade der Tatsache, dass Teilchen im selben Einteilchenzustand symmetrisiert, aber niemals antisymmetrisiert vorkommen können. Die Regeln zum Erstellen von Standard Young Tableaus stellen also sicher, dass das Pauli Verbot erfüllt ist.

Um nun die Dimensionen der irreduziblen Darstellungen der S_n zu bestimmen, müssen alle Young Schemata mit n Kästchen betrachtet werden. Jedes Schema repräsentiert eine andere Permutationssymmetrie und somit eine andere Darstellung. Die Dimension der jeweiligen irreduziblen Darstellung ergibt sich einfach durch Abzählen der Standard Young Tableaus. Dazu zwei Beispiele:

Bestimmung der Dimensionen der irreduziblen Darstellungen der S_3 Die Young Schemata der S_3 sind $\square\square\square$, $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}$. Seien nun alle drei Teilchen in verschiedenen Einteilchenzuständen. Dann sind die Standard Young Tableaus gegeben durch

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \end{array}.$$

Da es nur je ein Standard Young Tableau für die total symmetrischen bzw. antisymmetrischen Zustände gibt, handelt es sich bei ihnen um zwei jeweils 1-dimensionale irreduzible Darstellungen. Für den gemischt symmetrischen Zustand gibt es zwei Standard Young Tableaus, d.h. die Dimension der irreduziblen Darstellung ist zwei. Wie aus Abschnitt 3.3 bekannt, gibt es zwei solcher 2-dimensionalen irreduzibler Darstellungen.

Allgemein kann folgendes gezeigt werden: *Wenn eine irreduzible Darstellung der S_n N -dimensional ist, dann gibt es genau N solcher Darstellungen¹.* Mit 'solchen Darstellungen' sind dabei die Darstellungen mit der gleichen Permutationssymmetrie gemeint.

Ist man nur am Entartungsgrad interessiert, kann man hier aufhören. Möchte man aber explizit die zugehörigen Vektoren wissen, so stellt man fest, dass zwei Vektoren

¹Dies gilt nur, wenn alle Teilchen in verschiedenen Zuständen sind.

mit gemischter Symmetrie fehlen. Die beiden gemischt symmetrischen Standard Young Tableaus der S_3 entsprechen den Zuständen Ψ_{G_1} und Ψ_{G_4} . Die anderen beiden Zustände sind durch die Nicht-Standard Young Tableaus $\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$ ($= \Psi_{G_2}$) und $\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array}$ ($= \Psi_{G_3}$) gegeben.

Bestimmung der Dimensionen der irreduziblen Darstellungen der S_4 Die Standard Young Tableaus von vier Teilchen in vier verschiedenen Einteilchenzuständen sind

$\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c } \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}$
	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}$	
	$\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$		$\begin{array}{ c c } \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$	

Die total symmetrischen bzw. antisymmetrischen Standard Young Tableaus stellen wieder je eine 1-dimensionale irreduzible Darstellung dar. Von dem Standard Young Tableau, in welchem drei Teilchen symmetrisiert und zwei antisymmetrisiert sind, gibt es insgesamt drei. Somit handelt es sich um eine 3-dimensionale irreduzible Darstellung – ein Triplett. Nach dem oben erwähnten allgemeinen Satz gibt es genau drei irreduzible Darstellungen, die diese Permutationssymmetrie besitzen. Die Situation ist analog für das Standard Young Tableau, in welchem zwei Teilchen symmetrisiert und drei antisymmetrisiert sind, auch hier handelt es sich also um drei 3-dimensionale irreduzible Darstellungen. Das quadratische Young Schema besitzt zwei Standard Anordnungen und repräsentiert daher zwei 2-dimensionale irreduzible Darstellungen – ein Dublett. Insgesamt hat man damit die 24 Vektoren, die durch Permutationen von vier Teilchen in unterschiedlichen Zuständen gebildet werden, in $1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 = 24$ Basisvektoren mit wohldefinierten Symmetrieeigenschaften umgeschrieben. Ist man wiederum explizit an all diesen Vektoren interessiert, so kann man sie mit Hilfe der Nicht-Standard Young Tableaus bestimmen.

4 Ausblick: S_n , $SU(2)$ und $SU(3)$

S_n und $SU(2)$ Die Basisvektoren der $SU(2)$ sind $\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle$ und $\Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle$. Mit den Young Tableaus können sie auch als $\Psi_1 = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$ und $\Psi_2 = \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array}$ geschrieben werden. Die Standard Young Tableaus der S_2 für diese beiden Teilchen, die nun nicht notwendigerweise in unterschiedlichen Zuständen sein müssen, lauten

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}.$$

Dabei entsprechen die drei symmetrischen Tableaus dem bekannten Spin Triplet²

$$\left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} |\uparrow\uparrow\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{array} \right\}$$

und das antisymmetrische Tableau dem Spin Singulett

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle).$$

Aus den Standard Young Tableaus kann man auf analoge Weise leicht die Multiplizitäten der Zustände von drei oder mehr Teilchen in den beiden möglichen Zuständen spin-up und spin-down bestimmen.

S_n und $SU(3)$ Die bisher betrachteten Zustände u, d, s können als quark flavours interpretiert werden. Somit gibt es einen Zusammenhang zwischen der S_n und der $SU(3)$ flavour Symmetrie. Die irreduziblen Darstellungen der S_3 liefern die Baryon flavour Wellenfunktionen. Zum Beispiel stellt der bereits betrachtete total symmetrische Zustand

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} = \Psi_S = \frac{1}{\sqrt{6}}(uds + dus + sdu + usd + dsu + sud) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline u & d & s \\ \hline \end{array}$$

das Σ^{*0} Baryon dar. Neben dem bekannten Standard Young Tableau kann dieser Zustand noch durch das sogenannte Weyl Tableau $\begin{array}{|c|c|c|} \hline u & d & s \\ \hline \end{array}$ beschrieben werden. Dieses repräsentiert die Tatsache, dass der Zustand auch unter Austausch der flavours in $SU(3)$ total symmetrisch ist. Da zwei oder mehr Teilchen im selben Zustand symmetrisiert vorkommen können, gibt es noch mehr total symmetrische Zustände:

Δ^{++}	uuu	$\begin{array}{ c c c } \hline u & u & u \\ \hline \end{array}$
Δ^+	$\frac{1}{\sqrt{3}}(udu + udu + duu)$	$\begin{array}{ c c c } \hline u & u & d \\ \hline \end{array}$
Δ^0	$\frac{1}{\sqrt{3}}(udd + dud + ddu)$	$\begin{array}{ c c c } \hline u & d & d \\ \hline \end{array}$
Δ^-	ddd	$\begin{array}{ c c c } \hline d & d & d \\ \hline \end{array}$
Σ^{*+}	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uus + usu + suu)$	$\begin{array}{ c c c } \hline u & u & s \\ \hline \end{array}$
Σ^{*0}	$\frac{1}{\sqrt{6}}(uds + dus + sdu + usd + dsu + sud)$	$\begin{array}{ c c c } \hline u & d & s \\ \hline \end{array}$
Σ^{*-}	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dds + dsd + sdd)$	$\begin{array}{ c c c } \hline d & d & s \\ \hline \end{array}$
Ξ^{*0}	$\frac{1}{\sqrt{3}}(uss + sus + ssu)$	$\begin{array}{ c c c } \hline u & s & s \\ \hline \end{array}$
Ξ^{*-}	$\frac{1}{\sqrt{3}}(dss + sds + ssd)$	$\begin{array}{ c c c } \hline d & s & s \\ \hline \end{array}$
Ω^-	sss	$\begin{array}{ c c c } \hline s & s & s \\ \hline \end{array}$

Diese zehn Zustände stellen das bekannte Baryon Dekuplett dar. Auf analoge Weise lassen sich die gemischt symmetrischen Zustände konstruieren, die das Baryon Oktett bilden.

²Achtung: Da die Teilchen hier in unterschiedlichen Zuständen sind, gilt der allgemeine Satz von oben nicht. Es gibt also *nicht* drei Spin Triplets sondern nur das eine.

5 Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, dass die Permutationsgruppe S_n nützlich ist, wenn Systeme ununterscheidbarer Teilchen betrachtet werden. Die 1-dimensionalen irreduziblen Darstellungen der S_n werden von der Natur in Form von Bosonen und Fermionen verwendet. Man erhält diese 1-dimensionalen irreduziblen Darstellungen durch Anwenden des Symmetrisator bzw. Antisymmetrisators auf einen beliebigen Zustand.

Aber auch die höher dimensional irreduziblen Darstellungen sind wichtig, und zwar dann, wenn nur der Austausch *einer* Observable (z.B. Spin *oder* Ort) betrachtet wird. Die Dimension der irreduziblen Darstellung gibt dann gerade den Entartungsgrad des zugehörigen Energieniveaus an. Die Dimension lässt sich leicht mit Hilfe der Standard Young Tableaus bestimmen.

Im letzten Kapitel wurde noch der Zusammenhang zwischen der S_n und den beiden wichtigen Gruppen $SU(2)$ und $SU(3)$ angedeutet. Da diese jedoch erst in den kommenden Vorträgen im Detail behandelt werden sollen, wurde auf eine detaillierte Darstellung verzichtet.

Literatur

- [1] W. Greiner, B. Müller *Theoretische Physik Band 5: Quantenmechanik Teil 2: Symmetrien* 3. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (1990)
- [2] F. Porter "The Permutation Group and Young Diagrams" (2009) <http://www.hep.caltech.edu/~fcp/math/groupTheory/young.pdf> (Version vom 11.05.2015)