Quantenlogik

Michèle Pinkernell

14. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bei der Anwendung logischer Gesetze auf die Quantenmechanik, stieß man auf Schwierigkeiten. Das kann man sich am Beispiel der Orts- und Impulsmessung eines Teilchens klarmachen.
In der klassischen Physik kennt man nach der Ortsmessung den Ort und nach der Impulsmessung den Impuls eines Körpers. Es ist also möglich seinen Ort **und** Impuls gleichzeitig beliebig genau zu kennen. Ferner ist ein einmal gefundenes Ergebnis dauerhaft gültig.
In der Quantenphysik dagegen kennt man nach einer Ortsmessung nur den Ort eines Teilchen. Je genauer man diesen kennt, desto weniger kann über seinen Impuls ausgesagt werden. Umgekehrt ist nach der Impulsmessung der Impuls bekannt und der Ort unbekannt. Nach einer Messung sind also entweder Ort **oder** Impuls bekannt. Ein einmal gefundenes Ergebnis kann durch eine Messung zerstört werden.
Das wirkt sich auf die Logik aus, denn einmal bewiesene Aussagen sind nicht dauerhaft gültig. Deshalb ist es notwendig die Aussagen der klassischen Logik zu modifizieren, wenn sie auf die Quantenmechanik angewendet werden sollen.

2 Messprozess

Zur Messung atomarer Systeme stehen Geräte zur Verfügung, die aus Elementarteilchen aufgebaut sind. Deshalb beeinflussen sie durch die Messung das Ergebnis. dieser Zusammenhang wird durch die Theorie des quantenmechanischen Messprozesses untersucht:
Es werden ein System S und Messgerät M betrachtet. Es werde die Observable A mit Messwerten A_i gemessen. Im Zeitintervall Δt wechselwirken M und S miteinander. Dann wird am Messgerät M der Wert A_i abgelesen. Das System S sei in Zustand $|\varphi\rangle$, das Messgerät M in Zustand $|\Phi\rangle$.
Der Hamiltonoperator von $S + M$ sei $H = H_0 + H_\mathrm{W}$
Dabei beschreibt H_W die Wechselwirkung von S und M im Zeitintervall Δt. Das Zeitintervall Δt beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ endet zum Zeitpunkt $t = t'$.
Die Zeitabhängigkeit von $|\varphi\rangle$ und $|\Phi\rangle$ wird nur durch H_W beschrieben.
Gedanklich kann der Messprozess in folgende Schritte unterteilt werden:

1. Zerlegung
2. Erweiterung
3. Aufnahme
4. Restauration
5. Schnitt
6. Ablesen

2.1 Zerlegung

Der Zustand $|\varphi\rangle$ wird nach dem Spektrum $|A_i\rangle$ des Operators A zerlegt.

$$|\varphi\rangle = \sum_i \langle A_i|\varphi\rangle |A_i\rangle \tag{1}$$

$|\langle A_i|\varphi\rangle|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit, nach der Messung den Eigenwert $|A_i\rangle$ als Messergebnis für den Operator A zu erhalten.

2.2 Erweiterung

Das Messgerät M wird einbezogen, indem der die Zustände des Systems $S+M$ eingeführt werden.
Es gilt $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\Phi\rangle$ und $|\Psi_i\rangle = |A_i\rangle \otimes |\Phi\rangle$. Mit Gleichung (1) erhält man

$$|\Psi\rangle = \sum_i \langle A_i|\varphi\rangle |\Phi_i\rangle. \tag{2}$$

Zerlegung und Erweiterung sind rein formale Vorgänge und können auch umgekehrt durchgeführt werden.

2.3 Aufnahme

S und M wechselwirken im Zeitintervall Δt miteinander. $|\Psi\rangle$ verändert sich im Zeitintervall $0 \leq t \leq t'$. Ausgedrückt werden kann das, wenn der Zeitentwicklungsoperator $e^{iH_{\mathrm{W}}t}$ auf $|\Psi\rangle$ angewendet wird. Es gilt

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= |\Psi\rangle \\ |\Psi(t)\rangle &= e^{iH_{\mathrm{W}}t}|\Psi\rangle \\ |\Psi_i(t)\rangle &= e^{iH_{\mathrm{W}}t}|\Psi_i\rangle \end{aligned}$$

Nach der Messung, wenn $t \geq t'$, ist System $S+M$ im Zustand $|\Psi'\rangle$

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &= |\Psi(t')\rangle = \sum_i \langle A_i|\varphi\rangle |\Psi_i'\rangle \\ \text{wobei} \qquad |\Psi_i'\rangle &= |\Psi_i(t')\rangle \end{aligned}$$

Dabei tritt ein Problem auf:
Der Zustand $|\Psi'\rangle$ ist nicht mehr Produkt aus zwei Zuständen, von denen der eine das Objekt und andere das Messgerät ist.
$|\Psi'\rangle$ zwar immer noch separierbar, aber die Zustände $|\Phi'_{A_k}\rangle$ hängen von Messwert A_k' ab.
Es gilt

$$|\Psi_k'\rangle = e^{iH_{\mathrm{W}}t'}|A_k\rangle \otimes |\Phi\rangle = |A_k'\rangle \otimes |\Phi'_{A_k}\rangle.$$

Der Gesamtzustand $|\Psi'\rangle$ kann nicht mehr in einen Teil, der System beschreibt und anderen, der Messgerät beschreibt, zerlegt werden. Es gilt

$$|\Psi'\rangle = \sum_k \langle A_k|\varphi\rangle |A'_k\rangle \otimes |\Phi'_{A_k}\rangle.$$

Es werde angenommen, dass das Messgerät beliebig empfindlich ist. damit gilt

$$\begin{aligned} |A'_k\rangle &= |A_k\rangle \\ |\Psi'\rangle &= \sum_k \langle A_k|\varphi\rangle |A_k\rangle \otimes |\Phi_{A_k}\rangle. \end{aligned}$$

Wenn H_{W} hermitisch ist, sind die Zustände des Messgeräts normiert. Im Allgemeinen sind sie nicht orthogonal.
Bei M handelt es sich nur dann um ein geeignetes Messgerät, wenn nach der Messung von A die Werte $|\Phi_{A_k}\rangle$ einem bestimmten Zustand zugeordnet werden können.
Wenn $|\Phi_{A_k}\rangle$ orthonormal ist, dann ist $|\Phi_{A_k}\rangle$ auch orthogonal zu Ausgangszuständen.

2.4 Restauration

Dabei handelt es sich um ein gedankliches rückgängig Machen der Messung. Wenn die Zustände $|\Phi_{A_k}\rangle$ in einen bestimmten Zustand $|\Phi''\rangle$ übergehen, zerfällt

$$|\Psi'\rangle = \sum_k \langle A_k|\varphi\rangle |A_k\rangle \otimes |\Phi_{A_k}\rangle$$

in ein Produkt

$$|\Psi''\rangle = |\Phi''\rangle \sum_k \langle A_k|\varphi\rangle |A_k\rangle.$$

Die Zustände interferieren wieder. Es ist noch nicht entschieden, welcher Zustand eingenommen wird.

2.5 Schnitt

Das Objektsystem wird vom Messapparat isoliert. Die Interferenzterme verschwinden. Die Erweiterung wird rückgängig gemacht. Das System wird auf den Teil des Hilbertraumes projiziert, der dem Objekt S entspricht. Dabei gehen Informationen verloren.
Über den wirklichen Wert von A sind nur Wahrscheinlichkeitsaussage möglich. Der Beobachter wird als erkennendes Subjekt einbezogen.

2.6 Ablesung

Sobald man das Messergebnis erfährt, hat man eine Information gewonnen.

3 Stern-Gerlach-Versuch

Dieses theoretische Konstrukt wird schnell klar, wenn es an einem Beispiel erläutert wird. Als Beispiel dient der Stern-Gerlach-Versuch. In Abbildung 1 ist das Magnetfeld beim Stern-Gerlach-Versuch dargestellt und in Abbildung 2 die Flugbahn eines Silberatoms durch die Anordnung. In Abbildung 3 ist durch die gestrichelte Linie dargestellt, was nach der klassischen Physik erwartet worden ist. Die durchgezogene Linie stellt das tatsächliche Versuchsergebnis dar.

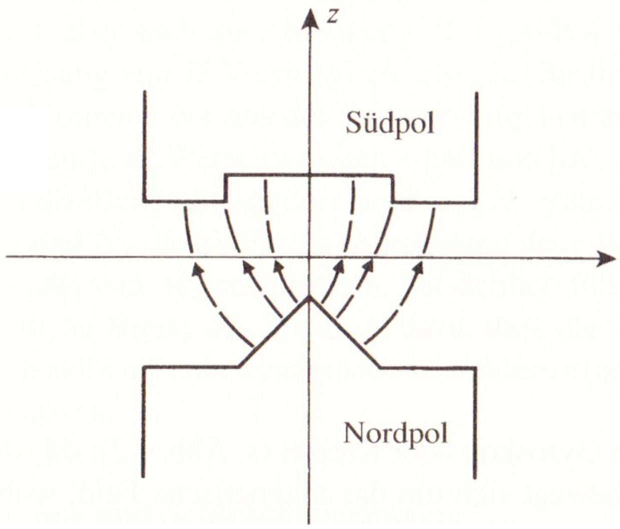

Abbildung 1: Magnetfeld beim Stern-Gerlach-Versuch[Cohen-Tannoudji]

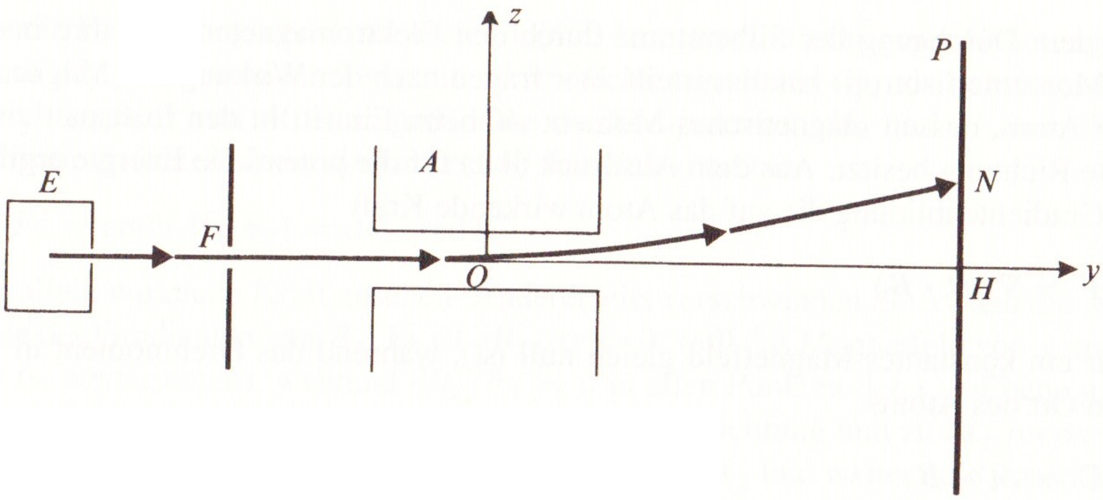

Abbildung 2: Bahn des Silberatoms beim Stern-Gerlach-Versuch[Cohen-Tannoudji]

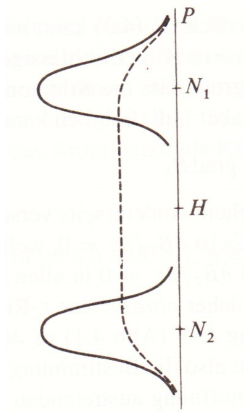

Abbildung 3: Versuchsergebnis[Cohen-Tannoudji]

Nach klassischer Logik könnte man erwarten, dass sich

- bei N_1 lauter Teilchen mit Spin $\uparrow$ und
- bei N_2 lauter Teilchen mit Spin $\downarrow$

befinden. Dass dem *nicht* so ist, zeigt folgender Versuch:
Es werden drei Stern-Gerlach-Anordnungen hintereinander geschaltet, wie beispielsweise in Abbildung 4 dargestellt. Befänden sich in N_1 lauter Teilchen mit Spin $\uparrow$, fände man den in Abbildung 4 dargestellten Strahlenverlauf. Der Erwartung entspricht das Ergebnis

$$|\uparrow y\rangle \wedge (|x\uparrow\rangle \vee |y\downarrow\rangle) \rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle \vee |\uparrow\downarrow\rangle.$$

Aber gemessen wird der in Abbildung 5 dargestellte Verlauf

$$|\uparrow y\rangle \wedge (|x\uparrow\rangle \vee |y\downarrow\rangle) \rightarrow |\uparrow\uparrow\rangle \wedge |\downarrow\uparrow\rangle) \vee (|\uparrow\downarrow\rangle \wedge |\downarrow\downarrow\rangle)\,.$$

Das widerspricht den Regeln der klassischen Logik.
Fazit: Die klassische Logik ist nicht anwendbar.

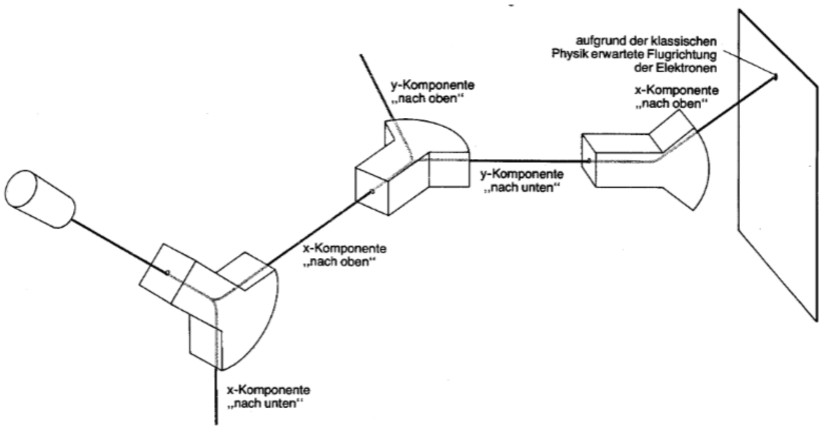

Abbildung 4: Erwartung des Strahlengangs durch drei hintereinander angeordnete Apparate nach klassischer Physik[Kohn]

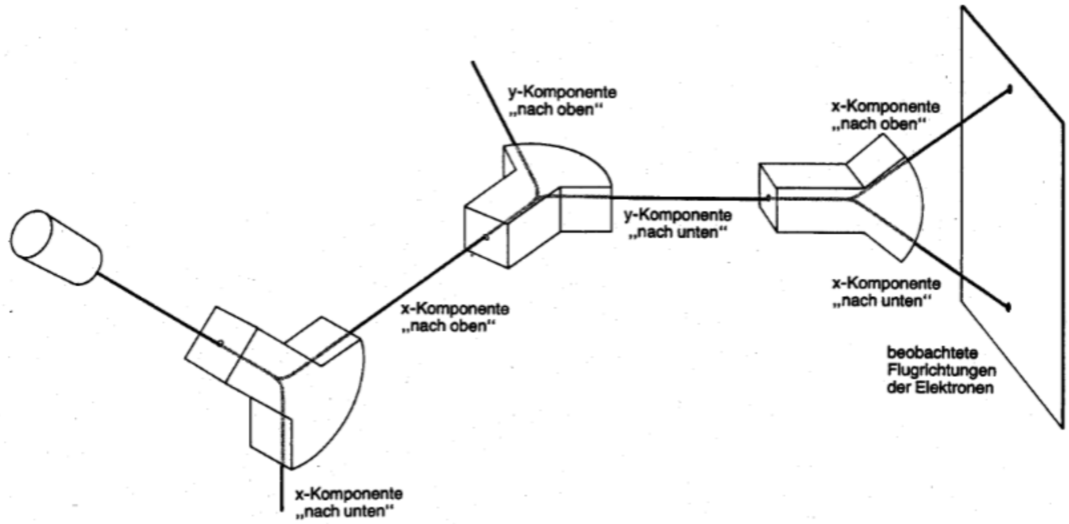

Abbildung 5: Tatsächlicher Strahlengangs durch drei hintereinander geschaltete Stern-Gerlach-Versuchsanordnungen [Kohn]

4 Quantenlogik

Um die klassische Logik auf die Anforderungen aus Quantenlogik übertragen zu können, verwendet man die dialogische Logik. Dabei werden logische Aussagen durch einen Dialog zwischen zwei Sprecherbeobachtern[1] abgeleitet. Es handelt sich dabei um einen Proponenten P[2] und einen Opponenten O[3]. Zwischen den beiden gelten folgende Rahmenregeln:

1. Zugeständnisse an Proponent P werden Dialog vorangestellt. Darauf darf immer zugegriffen werden.
2. Der Proponent P legt das Anfangsargument vor.
3. Der Opponent O darf das Argument angreifen. Damit verpflichtet er den Proponent, das Anfangsargument zu verteidigen.
4. Daraufhin entsteht eine Folge von Behauptungen, Angriffen und Verteidigung beider Dialogpartner.
5. Wer kein Argument mehr vorbringen kann, verliert den Dialog.

[1] Der Ausdruck „Sprecherbeobachter“ bezeichnet jemanden, der sowohl sprechen als auch beobachten kann.
[2] Einen, der vorlegt.
[3] Einen, der dagegenhält.

4.1 Illustrierendes, einfaches Beispiel

Der Proponent behauptet aus A folgt B. Ziel des Opponenten ist das zu widerlegen. Nachdem er dem Prinzip der effektiven Logik folgt, muss O erst einmal beweisen, dass A stimmt. Wäre A falsch, hätte P bereits gewonnen, denn „ex falso quodlibet“[4] .
Formal kann das in einer Tabelle dargestellt werden

	Opponent	Proponet
0.	[ ]	$A \to B$
1.	A (0)	$A?$ (1)
2.	$A!$	B (0)
3.	$B?$ (2)	B !

Die einzelnen Schritte bedeuten:

- In 0. legt P vor, indem er behauptet aus A folgt B
  (symbolisiert durch $A \to B$).
- In 1. behauptet O, dass die Aussage A, die in 0. vorgelegt wurde, stimmt
  (symbolisiert durch A (0)).
  P zweifelt an, dass die Aussage A, die O in 1. behauptet, stimmt
  (symbolisiert durch $A?$ (1)).
- In 2. beweist O die Aussage A
  (symbolisiert durch $A!$),
  und P behauptet die Aussage B, die in 0. vorgelegt wurde
  (symbolisiert durch B (0)).
- In 3. zweifelt O die Aussage B an
  (symbolisiert durch $B?$ (2)),
  und P beweist die Aussage B
  (symbolisiert durch B !).

Damit gewinnt P.

4.2 Ein zweiter Beispieldialog

Der Proponent behauptet aus A folgt, dass aus B Aussage A folgt.
Als Tabelle erhält man

	Opponent	Proponet
0.	[ ]	$A \to (B \to A)$
1.	A (0)	$A?$ (1)
2.	$A!$	$B \to A$ $\langle 0 \rangle$
3.	B (2)	$B?$ (3)
4.	$B!$	A $\langle 2 \rangle$
5.	$A?$ (2)	$A!$

Die einzelnen Schritte bedeuten:

[4] Aus einer falschen Aussage kann man folgern, was man will.

- In 0. legt P vor, indem er behauptet, dass aus A folgt, dass aus B Aussage A folgt.
- In 1. behauptet O, dass die Aussage A stimmt. P zweifelt das an.
- In 2. beweist O die Aussage A, und P behauptet, dass aus B Aussage A folgt.
- In 3. behauptet O die Aussage B, und P zweifelt die Aussage B an.
- In 4. beweist O die Aussage B, und P behauptet die Aussage A.
- In 5. zweifelt O die Aussage A an, und P beweist die Aussage A.

Damit gewinnt P.

4.3 Logikkalkül

Der Kalkül der affirmativen Logik lautet

(L_1) $A \to A$
(L_2) $A \to B, , B \to C \Rightarrow A \to C$
(L_3) $A \wedge B \to A$
(L_4) $A \wedge B \to B$
(L_5) $C \to A, , C \to B \Rightarrow C \to A \wedge B$
(L_6) $A \to A \vee B$
(L_7) $B \to A \vee B$
(L_8) $A \to C, , B \to C \Rightarrow A \wedge B \to C$
(L_9) $(A \wedge (A \to B)) \to B$
(L_{10}) $A \wedge C \leq B \Rightarrow C \to (A \to B)$

Durch Einführung von Negation $\neg$, wahr $\bigvee$ und falsch $\bigwedge$ kann er auf die effektive Logik erweitert werden. Dadurch kommen noch folgende zwei Sätze hinzu:

(L_{11}) $A \wedge \neg A \to \bigwedge$
(L_{12}) $A \wedge C \to \bigwedge \Rightarrow C \to \neg A$

Die Erweiterung auf die klassische Logik erfolgt durch die beiden Sätze:

(L_{13}) $\bigvee \to A \vee \neg A$ (Tertium non datur)
(L_{14}) $A = \neg\neg A$ (folgt aus (L_{13}))

4.4 Modifikation des Logikkalküls

In klassischer Physik ist bestimmbar, ob Teilchen an der Stelle x ist oder nicht. In Quantenmechanik sind nur Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich. Die Regeln der klassischen Logik sind auf die Quantenmechanik übertragbar, wenn kommensurable Eigenschaften vorliegen, d. h. wenn Messungen vertauschbar sind. Für inkommensurable Eigenschaften muss L_{10} abgeschwächt werden.
Das quantenmechanische Pendant dazu ist (Q_{10}) $A \wedge C \to B \Rightarrow (A \to C) \leq (A \to B)$

In der klassischen Physik sind Aussagen beweisbar durch Messung der zugehörigen Observablen. Ab diesem Zeitpunkt ist die gemessene Observable in der dialogischen Logik verfügbar.
In Quantenmechanik ist sie nur so lange gültig, bis eine inkommensurable Messung vorgenommen wird. Danach ist sie nicht mehr zitierbar.
Angewendet auf den Beispieldialog von oben mit dem Zusatz, dass A und B inkommensurabel sind.

	Opponent	Proponet
0.	[ ]	$A \to (B \to A)$
1.	A (0)	$A?$ (1)
2.	$A!$	$B \to A$ $\langle 0 \rangle$
3.	B (2)	$B?$ (3)
4.	$B!$	A $\langle 2 \rangle$
5.	$A?$ (2)	nicht mehr verfügbar

Die Schritte 0. bis 4. sind identisch. Der letzte Schritt bedeutet, dass O die Aussage B anzweifelt. Durch die Messung von B ist sie nicht mehr verfügbar und damit gewinnt O.

5 Zusammenfassung

Die Quantenlogik erlaubt eine widerspruchsfreie Beschreibung quantenmechanischer Experimente. Leider liefert sie keine Interpretation der Quantenmechanik. Sie wirft sogar neue Probleme auf. Man könnte sich fragen, ob die Quantenlogik umfassender als die klassische Logik ist.

6 Literatur

Literatur

[Cohen-Tannoudji] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloë: *Quantenmechanik*; Walter de Gruyter, Berlin, 2009.

[Kohn] Martin Kohn: *Quntenlogik*; Münster, 2009.

[Mittelstaedt1976] Peter Mittelstaedt: *Philosophische Probleme der modernen Physik*; Bibliographisches Institut, Mannheim, 1976.

[Mittelstaedt1986] Peter Mittelstaedt: *Sprache und Realität in der modernen Physik*; Bibliographisches Institut, Mannheim, 1986.

[Scholz] Heinrich Scholz, Gisbert Hasenjäger: *Grundzüge der mathematischen Logik*; Springer, Berlin, 1961.

[Münster] Gernot Münster: *Quantentheorie*; Walter de Gruyter, Berlin, 2010.