Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Die Gruppen SO(3) und SU(2)

Im Rahmen des Seminars zur Theorie der Teilchen und Felder

4. Juni 2013

Jonathan Hendrich (j.hendrich@gmx.de),

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Physik spielen Drehungen eine wichtige Rolle und treten in den verschiedensten Gebieten auf. Um sie zu beschreiben wird die Drehgruppe SO(3) verwendet. Im Folgenden wird diese Gruppe untersucht. Es werden allgemeine Eigeschaften genannt und eine explizite Darstellung hergeleitet. Anschließende wird gezeigt, dass man die SU(2) aus der unitären Darstellung der SO(3) erhalten kann.

2 Definitionen der Gruppentheorie

In diesem Kapitel werden einige elementare Begriffe aus der Gruppentheorie definiert, die für dieses Protokoll eine Rolle spielen.
Zuächst zu der **Definition einer Gruppe:** Eine Gruppe ist eine Menge $\mathcal{G}$ von Elementen. Die Elemente der Gruppe sind mit einer Multiplikationsvorschrift verknüpft über

$$a * b = c \in \mathcal{G} \qquad \forall a, b \in \mathcal{G}. \tag{1}$$

Des Weiteren müssen folgende Eigenschaften erfüllt sein:
1. Es existiert ein Einselement $e \in \mathcal{G}$ mit

$$a * e = e * a = a \qquad \forall a \in \mathcal{G}. \tag{2}$$

2. Es existiert ein inverses Element $a^{-1} \in \mathcal{G}$ mit

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e, \qquad a \in \mathcal{G}. \tag{3}$$

3. Die Multiplikation ist assoziativ

$$a * (b * c) = (a * b) * c \qquad \forall a, b, c \in \mathcal{G}. \tag{4}$$

Erzeugendensystem: Ein Erzeugendensystem ist ein Satz von Elementen $a, b, c, ... \in \mathcal{G}$, mit denen jedes Element in $\mathcal{G}$ durch ein Produkt endlich vieler Elemente des Satzes beschrieben werden kann.

Darstellung einer Gruppe: Es existiert ein Satz von linearen Operatoren $R(\mathcal{G})$ in einem Vektorraum $\mathcal{L}$, für den gilt

$$a * b = c \qquad \Rightarrow \qquad R(a) * R(b) = R(c). \tag{5}$$

Die Darstellung einer Gruppe ist die Realisierung einer Gruppe auf eine algebraische Struktur mithilfe von Matrizen. Eine Darstellung ist **irreduzibel**, wenn bis auf $\{0\}$ und $\mathcal{L}$ keine invarianten Unterräume existieren.

Lie-Gruppen sind Gruppen mit bestimmten Eigenschaften. Die Elemente einer Lie-Gruppe $a(\vartheta^1, \vartheta^2, ..., \vartheta^n) \in \mathcal{G}$ sind von den kontinuierlichen Parametern ϑ^i abhängig. Dabei entspricht das Element am Nullpunkt der Parametrisierung dem Einheitselement $a(0) = e$. Für $a(\vec{\vartheta})a(\vec{\varphi}) = a(\vec{\xi})$ gibt es eine Abbildung $g(\vec{\vartheta}, \vec{\varphi}) = \xi$, die die Parameter miteinander verknüpft. Diese Abbildung erfüllt folgende Eigenschaften:

$$g(0, \vec{\vartheta}) = g(\vec{\vartheta}, 0) = \vec{\vartheta}, \tag{6}$$

$$g(\vec{\vartheta}, g(\vec{\varphi}, \vec{\xi})) = g(g(\vec{\vartheta}, \vec{\varphi}), \vec{\xi}), \tag{7}$$

$$g(\vec{\vartheta}, \vec{\vartheta}') = 0 \qquad \forall a(\vec{\vartheta}') = a^{-1}(\vec{\vartheta}). \tag{8}$$

Eine wichtige Eigenschaft von Lie-Gruppen ist, dass sie kontinuierlich sind. Daraus folgt, dass infinitesimale Elemente der Form

$$a(\vec{\vartheta}) = 1 + i\vec{\vartheta}\vec{T} \tag{9}$$

existieren. Dabei stellen

$$T^k = -i\frac{\partial a}{\partial \vartheta^k}|_{\vartheta=0} \tag{10}$$

die Generatoren oder Erzeugenden der Lie-Gruppe dar. In einer Lie-Gruppe ist die Lie-Algebra als Multiplikation zweier Generatoren definiert

$$\left[T^a, T^b\right] = it^{abc}T^c. \tag{11}$$

Bei diesem Kommutator ist t^{abc} die Strukturkonstante der Lie-Algebra. Abschließend folgen zwei wichtige Sätze, auf die später Bezug genommen wird.

Satz 1: Jede Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe ist äquivalent zu einer unitären Darstellung.

Satz 2: Jede irreduzible Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe in einem Hilbertraum ist endlichdimensional.

3 Die Gruppe SO(3)

3.1 Allgemeines zur SO(3)

Die SO(3) stellt Rotationen im dreidimensionalen Raum dar. Dabei handelt es sich um lineare Transformationen der Form

$$\vec{x}' = R\vec{x} \qquad R \in SO(3). \tag{12}$$

In der Gleichung (12) ist R eine Drehmatrix und ein Element der SO(3). Ausgeschrieben bedeutet SO(3) spezielle orthogonale Gruppe in drei Dimensionen, mit

orthogonal:

$$R^{-1} = R^T \qquad \Rightarrow \qquad RR^T = 1, \tag{13}$$

speziell:

$$det(R) = 1. \tag{14}$$

Berechnet man das Skalarprodukt des transformierten Vektors

$$\vec{x}'\vec{x}' = R\vec{x}R\vec{x} = RR^\dagger\vec{x}\vec{x} = RR^T\vec{x}\vec{x} = \vec{x}\vec{x} \tag{15}$$

wird ersichtlich, dass die Drehungen der SO(3) längeninvariant sind. Des Weiteren sind die Drehungen orientierungstreu, ein Rechtssystem wird immer in ein Rechtssystem übergehen. Allgemein kann man zwischen zwei Klassen von Drehungen unterscheiden:

Aktive Drehungen: Ein Vektor $\vec{x}$ wird gedreht und damit in einen neuen Vektor $\vec{x}'$ überführt. Das Koordinatensystem bleibt unverändert.

Passive Drehungen: Die Basis eines Koordinatensystems wird gedreht. Bezüglich der ursprünglichen Basis sind die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{x}'$ gleich.

Eine aktive Drehung um den Winkel φ entspricht einer passiven Drehung um den Winkel $-\varphi$.

3.2 Parametrisierungen der SO(3)

In diesem Kapitel werden zwei Möglichkeiten vorgestellt, mit denen die SO(3) Parametrisiert werden kann.

3.2.1 Rodrigues-Formel

Zunächst wird die Parametrisierung durch die Rodrigues-Formel untersucht. Um diese herzuleiten, betrachtet man die Drehung eines Vektors $\vec{v}$ im dreidimensionalen Raum, wie es in Abbildung 1 dargestellt ist. Zur Vereinfachung der Herleitung wird angenommen,

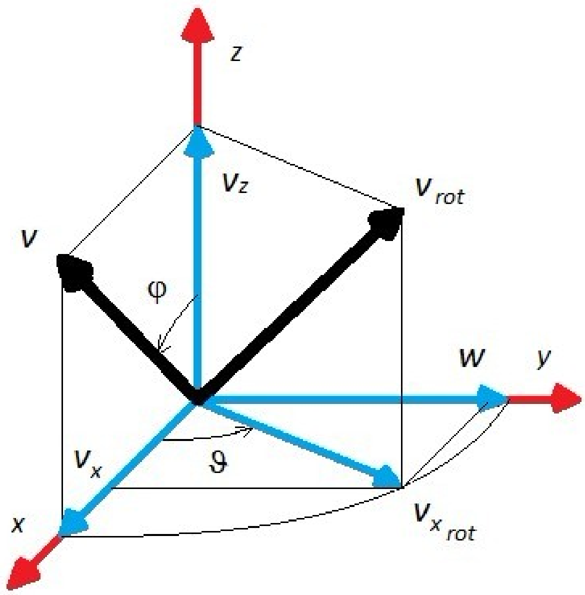

Abb. 1: Kizze zur Herleitung der Rodrigues-Formel.Der Vektor $\vec{v}$ wird um die z-Achse gedreht.
Quelle: http://jerryxinyuhou.co.uk/wordpress/wp-content/uploads/2012/04/Rodrigues-Rotation4.jpg

dass $\vec{v}$ in der x,z-Ebene liegt. Die Projektion von $\vec{v}$ auf die z- Achse wird gebildet durch

$$\vec{v}_z = (\vec{e}_3 * \vec{v})\vec{e}_3, \tag{16}$$

wobei $\vec{e}_3$ der Einheitsvektor in z-Richtung ist. Damit beträgt die Projektion von $\vec{v}$ auf die x-Achse

$$\vec{v}_x = \vec{v} - \vec{v}_z. \tag{17}$$

Rotiert man $\vec{v}_x$ um 90°, erhählt man einen Vektor der auf der y-Achse liegt

$$\vec{\omega} = \vec{e}_3 \times \vec{v}. \tag{18}$$

Die Projektion des Rotierten Vektors $\vec{v}_{rot}$ auf die x,y-Ebene kann gebildet werden zu

$$\vec{v}_{x,rot} = \vec{v}_x cos(\vartheta) + \vec{\omega} sin(\vartheta) = (\vec{v} - (\vec{e}_3 * \vec{v})\vec{e}_3) cos(\vartheta) + (\vec{e}_3 \times \vec{v}) sin(\vartheta). \tag{19}$$

Überlegt man sich nun, dass der Anteil von $\vec{v}$, der parallel zur Drehachse liegt, nicht von der Drehung verändert wird, ergibt sich der rotierte Vektor zu

$$\vec{v}_{rot} = \vec{v}_{x,rot} + \vec{v}_z = \vec{v} cos\vartheta + (\vec{e}_3 \times \vec{v}) sin(\vartheta) + \vec{e}_3(\vec{e}_3 * \vec{v})(1 - cos(\vartheta)). \tag{20}$$

Dieser Audruck ist die Rodrigues-Formel. Um sie auf allgemeine Drehungen zu erweitern, wird der Drehvektor $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eingeführt. Man erhält die Rodrigues-Formel in Komponentenschreibweise

$$x'^{\mu} = x^{\mu} cos(\alpha) + \frac{\alpha_{nu} x^{\nu}}{\alpha^2} \alpha^{\mu} (1 - cos(\alpha)) + \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda} \alpha^{\lambda} x^{\nu}}{\alpha} sin(\alpha). \tag{21}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Komponenten der Drehmatrix direkt ablesen:

$$R^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} cos(\alpha) + \frac{\alpha^{\mu} \alpha_{\nu}}{\alpha^2} (1 - cos(\alpha)) + \frac{\epsilon^{\mu\nu\lambda} \alpha^{\lambda}}{\alpha} sin(\alpha). \tag{22}$$

Wählt man nun als Rotationsachse einen kartesischen Basisvektor, findet man die drei schon bekannten Rotationsmatrizen

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}, \qquad R_y = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & 0 & sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\alpha) & 0 & cos(\alpha) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Um eine eindeutige Drehung zu erhalten, ist es nötig den Drehwinkel $|\vec{\alpha}| = \alpha$ auf ein Intervall von $0 \leq \alpha < \pi$ zu beschränken. Um allerdings alle Drehungen zu betrachten, muss der Winkel $\alpha = \pi$ hinzugenommen werden. Wie in Abbildung 2 zu sehen ist, würde die Drehung dadurch nicht mehr eindeutig sein. Aus diesem Grund müssen die beiden Antipodenpunkte mit einander identifiziert werden, um so die Eindeutigkeit der Drehung zu erhalten. Da bei der Rodrigues-Formel ein Objekt gedreht wird, ist diese Drehung aktiv zu verstehen. Die Rodrigues-Formel liefert damit drei kontinuierliche Parameter α_1, α_2 und α_3.

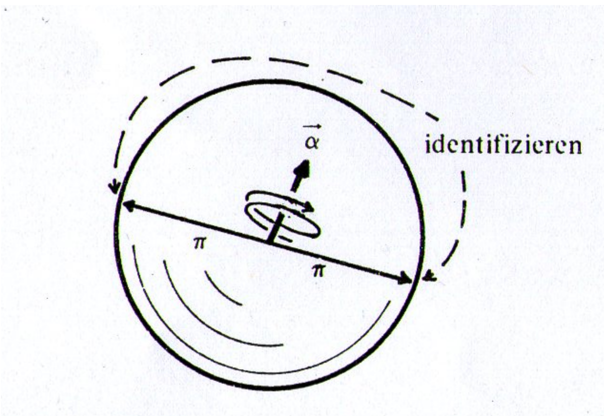

Abb. 2: Die Identifizierung der Antipodenpunkte erhält die Eindeutigkeit der Drehung. Quelle: Roman Sexl, Helmuth Urbantke, Relativität, Gruppen, Teilchen, Springer Verlag, 1992

3.2.2 Die Euler‘schen Winkel

Die Idee dieser Parametrisierung ist, dass eine endliche Drehung aus drei aufeinander folgenden Drehungen zusammengesetzt werden kann. In dieser Parametrisierungsmöglichkeit werden die Basisvektoren $\vec{e}_\mu$ gedreht, es handelt sich also um eine passive Drehung. Als Knotenlinie bezeichnet man die Schnittlinie der ursprünglichen x,y-Ebene mit der gedrehten, wie in Abbildung 3 verdeutlicht wird.

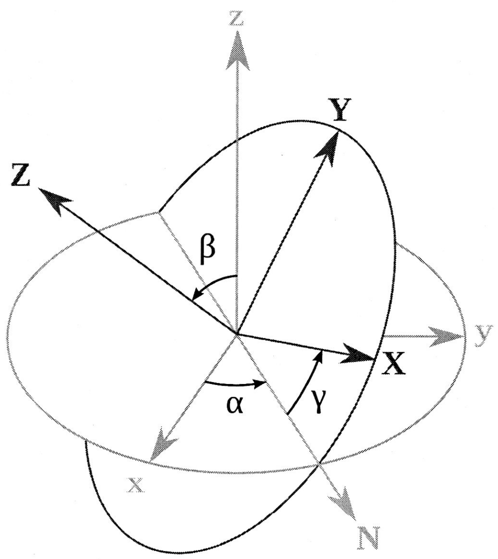

Abb. 3: Drehung der Basisvektoren um die Euler´schen Winkeln.
Quelle: Roman Sexl, Helmuth Urbantke, Relativität, Gruppen, Teilchen, Springer Verlag, 1992

Das Koordinatensystem wird durch drei Einzeldrehungen rotiert:

1. Eine Drehung um die z-Achse um den Winkel $0 \leq \alpha \leq 2\pi$,
2. Eine Drehung um die Knotenlinie um den Winkel $0 \leq \beta \leq 2\pi$,
3. Eine Drehung um die neue z-Achse um den Winkel $0 \leq \gamma \leq 2\pi$.

Damit existieren auch in dieser Parametrisierung drei kontinuierliche Parameter α, β und γ. Die Drehmatrix ergibt sich aus den Matrizen der einzelnen Drehungen

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} cos(\gamma) & -sin(\gamma) & 0 \\ sin(\gamma) & cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\beta) & -sin(\beta) \\ 0 & sin(\beta) & cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

3.3 Infinitesimale Drehungen

Infinitesimale Drehungen weichen nur sehr gering von dem Einheitselement ab

$$R = 1 + \Omega. \tag{26}$$

Aus der Orthogonalität der Drehmatrix folgt , dass Ω antisymmetrisch sein muss

$$RR^T = 1 = (1+\Omega)(1+\Omega^T) = 1 + \Omega + \Omega^T + \sigma(\Omega^2) \tag{27}$$

$$\Rightarrow \Omega = -\Omega^T. \tag{28}$$

Diese Bedingung ist allgemein von einer Matrix der Form

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 0 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} = \vec{\alpha}\vec{\Lambda} \tag{29}$$

erfüllt. Hierbei ist mit $\vec{\Lambda}$ das Matrizentripel

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

gemeint. Für die Matrixelemente gilt damit

$$(\Lambda_\lambda)_{\mu\nu} = -\epsilon_{\lambda\mu\nu}. \tag{31}$$

Der Sinn, infinitesimale Drehungen zu betrachten, liegt darin, dass endliche Drehungen aus beliebig kleinen Drehungen zusammengesetzt werden können. Eine Drehung um den Winkel α entspricht zwei Drehungen um den Winkel $\frac{\alpha}{2}$

$$R(\vec{\alpha}) = R(\frac{\vec{\alpha}}{2})R(\frac{\vec{\alpha}}{2}) = ... = \left[R(\frac{\vec{\alpha}}{N})\right]^N. \tag{32}$$

Im Limes $N \to \infty$ folgen daraus infinitesimale Drehungen, die angenährt werden können als

$$R(\frac{\vec{\alpha}}{N}) \approx \left[1 + \frac{\vec{\alpha}\vec{\Lambda}}{N}\right]^N \Rightarrow R(\vec{\alpha}) = e^{\vec{\alpha}\vec{\Lambda}}. \tag{33}$$

In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass die SO(3) parametrisierbar ist und die entsprechenen Parametrisierungen kontinuierlich und wesentlich sind. Des Weiteren existieren infinitesimale Elemente. Es lässt sich somit zeigen, dass die SO(3) eine Lie-Gruppe ist, mit den Generatoren $(\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3)$. Man kann einen Casimiroperator definieren

$$C = \sum_\mu t_\mu^2. \tag{34}$$

Der Casimiroperator hat die wichtige Eigenschaft, mit allen anderen Generatoren der Darstellung zu vertauschen

$$[C, t_\mu] = 0. \tag{35}$$

Mit Hilfe des Casimiroperators können die expliziten Darstellungen der SO(3) ermittlelt werden, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird.

4 Die unitäre Darstellung der SO(3)

4.1 Die SO(3) im Hilbertraum

In diesem Kapitel wird die Darstellung der SO(3) im Hilbertraum hergeleitet. Dafür werden die Eigenschaften der Generatoren und deren Wirkung auf Zustände ausgenutzt.
Nach dem ersten Satz in Kapitel 1 ist die Darstellung einer kompakten Lie-Gruppe im Hilbertraum äquivalent zu einer unitären Darstellung. Unitär bedeutet

$$T^\dagger = T^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad TT^\dagger = 1. \tag{36}$$

Aus der Längeninvarianz folgt, dass die Generatoren t_μ der Darstellung antihermitesch sein müssen. Als Generatoren verwendet man allerdings die quantenmechanischen Drehimpulse $J_\mu = it_\mu$. Um die explizite Darstellung zu erhalten, betrachtet man das Eigenwertspektrum eines Generators, typischer Weise von J_3. Wirkt J_3 auf einen Eigenzustand, so erhält man den Eigenwert des Operators

$$J_3|m >= m|m > . \tag{37}$$

An dieser Stelle werden Auf- und Absteigeoperatoren definiert, die durch das Wirken auf einen Zustand den nächst höheren, bzw. niedrigeren Zustand erzeugen

$$J_\pm = J_1 \pm iJ_2. \tag{38}$$

Der Casimiroperator lässt sich schreiben als

$$J^2 = J_\pm J_\mp \mp J_3 + J_3^2, \tag{39}$$

mit dem Eigenwert λ. Nach Satz 2 in Kapitel 1 folgt, dass die Darstellung endlichdimensional ist. Es muss daher einen größten Zustand $|j >$ und einen kleinsten Zustand $|j' >$ geben, für die demnach gilt

$$J_+|j >= 0 \qquad J_-|j' = 0. \tag{40}$$

Quadriert man den Zustand $J_\pm|m >$, erhält man

$$< J_\pm m|J_\pm m >=< m|J_\mp J_\pm m >= \lambda \mp m - m^2. \tag{41}$$

Setz man in Gleichung (41) die Grenzzustände ein und verwendet die Relationen in (40), ergibt sich ein Ausdruck für den Eigenwert des Casimiroperators

$$\lambda = j^2 + j = j'^2 - j'. \tag{42}$$

Aus der Gleichung (42) kann man direkt die Beziehung zwischen den Grenzzuständen ablesen

$$j' = -j. \tag{43}$$

Nun kann man den Wertebereich von j noch weiter einschränken. Wendet man den Absteigeoperator (N-1)-fach auf den Zustand $|j>$ an, ergibt sich

$$J_3(J_-)^{N-1}|j>=(j-(N-1))|j'>=j'|j'>. \tag{44}$$

Aus der Gleichung (44) folgt

$$j-j'+1=2j+1=N. \tag{45}$$

Damit muss j halbzahlig sein. Der Eigenwert von J_3 kann die Werte

$$-j \leq m \leq j \tag{46}$$

annehmen, woraus folgt, dass die Darstellung (2j+1)-dimensional ist. Die Matrixoperatoren lassen sich nun mit Hilfe ihrer Eigenwerte konstruieren. Für J_3 und J^2 findet man die Darstellungen

$$J_3 = \begin{pmatrix} j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -j \end{pmatrix} \tag{47}$$

und

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} * j(j+1). \tag{48}$$

Mit den Eigenwerten der Auf-und Absteigeoperatoren $\rho_{\pm}(m) = \sqrt{j(j+1) \mp m - m^2}$, folgt deren Matrixdarstellung

$$J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \rho_+(j-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \rho_+(-j) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \rho_-(j) & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \rho_-(-j+1) & 0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Die beiden noch fehlenden Matrizen können über die Relaltion

$$J_1 = \frac{1}{2}(J_+ + J_-), \qquad J_2 = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) \tag{50}$$

berechnet werden. Diese Matrizen bilden die explizite Darstellung der SO(3) im Hilbertraum. Sie konnten über die Eigenwerte eines Generators und des Casimiroperators hergeleitet werden. Wie schon erwähnt, ist die gefundene Darstellung (2j+1)-dimensional. Für $j = 0$ erhält man eine eindimensionale und für $j = 1$ eine dreidimensionale Darstellung. Für den Fall $j = 2$ folgt eine fünfdimensionale Darstellung, die äquivalent zu einer Tensordarstellung ist. Im nächsten Abschnitt wird der die Darstellung für $j = \frac{1}{2}$ diskutiert.

4.2 Die SU(2) und endliche Drehungen

Für $j = \frac{1}{2}$ ergibt sich eine zweidimensionale Darstellung, deren Generatoren bis auf einen Faktor $\frac{1}{2}$ den Pauli- SPinmatrizen entsprechen. Diese Spinmatrizen sind gerade die Erzeugenden der SU(2). Somit kann man aus der Darstellung der SO(3) im Hilbertraum für $j = \frac{1}{2}$ die SU(2) ableiten.
In der SU(2) erhählt man für den Übergang von infinitesimalen zu endlichen Drehungen

$$U(\vec{\alpha}) = e^{-i\vec{\alpha}\vec{J}}. \tag{51}$$

Durch Auswerten dieser Exponentialfunktion ergibt sich die Drehung

$$U(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} cos(\frac{\alpha}{2}) - ie_3 sin(\frac{\alpha}{2}) & -i(e_1 - e_2)sin(\frac{\alpha}{2}) \\ -i(e_1 + ie_2)sin(\frac{\alpha}{2}) & cos(\frac{\alpha}{2}) + ie_3 sin(\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}. \tag{52}$$

Die Gleichung (52) wird auch als Spinordarstellung einer Drehung bezeichnet. Da die SU(2) von den Spinmatrizen erzeugt wird, eignet sie sich zur Beschreibung des Teilchenspins. Aus der Gleichung (52) kann eine wichtige Eigenschaft des Spins abgeleitet werden. In der SO(3) ist eine Drehung um den Winkel 2π gleich dem Einheitselement. Dreht man einen Vektor um 2π, erhält man den urprünglichen Vektor. Dies ist in der SU(2) nicht der Fall. Eine Drehung um 2π ergibt hier

$$U(2\pi\vec{e}) = U(\pi\vec{e})U(\pi\vec{e}) = -1. \tag{53}$$

Um den ursprünglichen Vektor zu bekommen, muss um den Winkel 4π rotiert werden. Aus diesem Grund muss die Parametrisierung der SU(2) auf ein Winkelintervall von $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ erweitert werden. Man sagt, dass die SO(3) von der SU(2) doppelt überlagert ist, was in der Abbildung 4 illustriert ist.

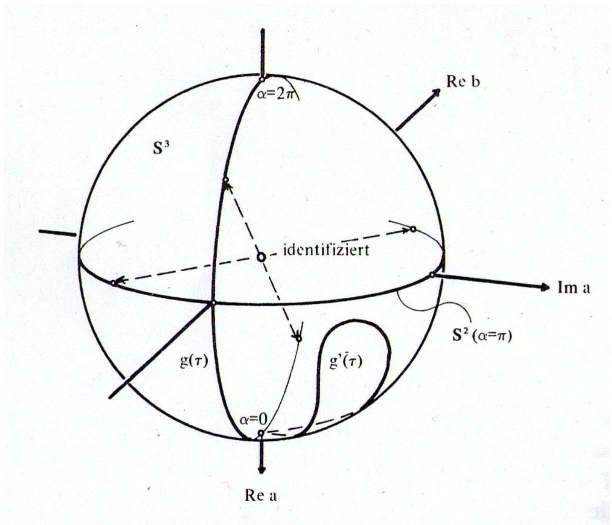

Abb. 4: Einparametrige Kurve in der SU(2). Für die SO(3) würde sich die Einheitssphäre halbieren und eine Kurve von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$ wäre geschlossen.
Quelle: Roman Sexl, Helmuth Urbantke, Relativität, Gruppen, Teilchen, Springer Verlag, 1992

In der Abbildung 4 ist die EInheitssphäre der SU(2) gezeigt. Es ist zu sehen, dass sich die Punkte $\alpha = 0$ und $\alpha = 2\pi$ genau gegenüber liegen. Eine einparametrige Kurve $g(\tau)$, die entlang der Sphäre von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$ reicht, würde das halbe Einheitsintervall der SU(2) betragen. Um die Einheitssphäre der SO(3) zu erhalten, müsste die Parametrisierung halbiert werden und die Sphäre würde sich zusammenziehen. Die Kurve $g(\tau)$ wäre dann auf dem Intervall von $\alpha = 0$ bis $\alpha = 2\pi$ geschlossen. Man spricht daher von einer doppelten Überlagerung.

Um die Spinordarstellung der SU(2) herzuleiten, werden wieder die Eigenwerte der Operatoren berachten. Zunächst werden die Zustande $|j, m>$ definiert als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}>, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> . \tag{54}$$

Für den Aufsteigeoperator gilt

$$J_+|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}>= 0 \qquad J_+|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}>= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}> . \tag{55}$$

Somit können die Generatoren der SU(2) bestimmt werden zu

$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{56}$$

Diese Matrizen entsprechen bis auf einen multiplikativen Faktor den Pauli-Matrizen. Die SU(2) wird daher von den Spinmatrizen erzeugt und man erknennt die Relation

$$J_i = \frac{\sigma_i}{2}. \tag{57}$$

Die Spinordastellung der SU(2) lässt sich somit aus der unitären Darstellung der SO(3) für $j = \frac{1}{2}$ herleiten.

5 Literaturverzeichnis

-Roman Sexl, Helmuth Urbantke, *Relativität, Gruppen, Teilchen*, Springer Verlag, 1992

-Zhong-Qi Ma, *Group Theory for Physicists*, World Scientific, 2007

-B.P. Zelobenko, *Compact Lie Groups and their Representation*, Translations of Mathematical Monographs Vol. 40, American Mathematical Society, 1973

-Walter Greiner, Berndt Müller, *Theoretische Physik* Band 5: Quantenmechanik 2, Verlag Harri Deutsch, 1985