

# Symmetriebrechung und Goldstone-Theorem

Matthias Kemper

3. Juli 2013

Das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung wird hier zunächst anhand von Beispielen aus der klassischen Physik veranschaulicht. Anschließend fokussieren wir uns auf die relativistische Quantenfeldtheorie. Das Goldstone-Theorem, das die Existenz masseloser Teilchen bei spontaner Brechung einer Symmetrie voraussagt, wird an einem Beispiel illustriert und dann allgemeiner bewiesen. Schließlich sehen wir, wie im Fall von Eichsymmetrien der Higgs-Mechanismus masselose Teilchen vermeidet und dafür den Eichbosonen Masse verleiht.

## 1 Einführung

Wir betrachten die Bewegung eines klassischen Punktteilchens in einem Potential  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Das Potential sei invariant unter der Wirkung einer Untergruppe  $G$  der euklidischen Gruppe  $E(n)$ , also z. B. rotationssymmetrisch ( $G \cong O(n)$ ).

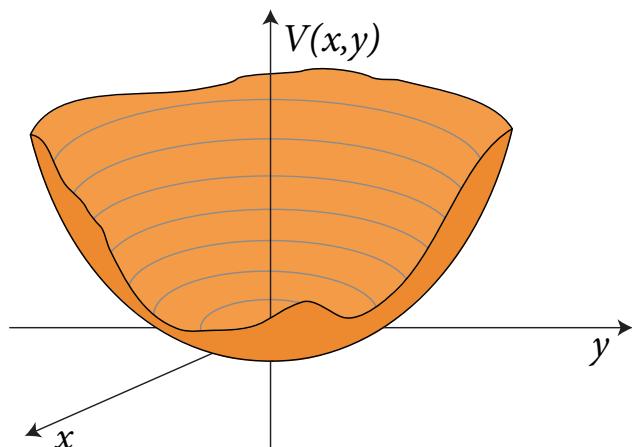
Die zentrale Frage lautet nun:

Wie verhält sich das *Minimum* des Potentials unter der Wirkung der Symmetriegruppe?

Die Rolle des Minimums werden später der Grundzustand (Quantenmechanik, Festkörperphysik) bzw. das Vakuum (relativistische Quantenfeldtheorie) einnehmen.

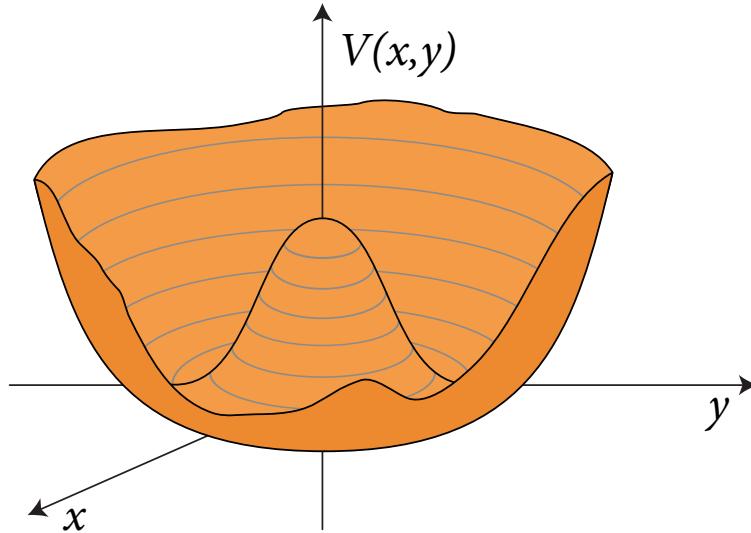
**Erste Möglichkeit:** Das Minimum bleibt invariant unter  $G$ .

Beispiel:  $V(x, y) = x^2 + y^2$  ,  $G \cong O(2)$  .



**Zweite Möglichkeit:** Ein (willkürlich gewähltes) Minimum wird unter der Wirkung von  $G$  in ein anderes Minimum überführt – man sagt, die Symmetrie ist *spontan gebrochen*.

Beispiel:  $V(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$ ,  $G \cong O(2)$ .



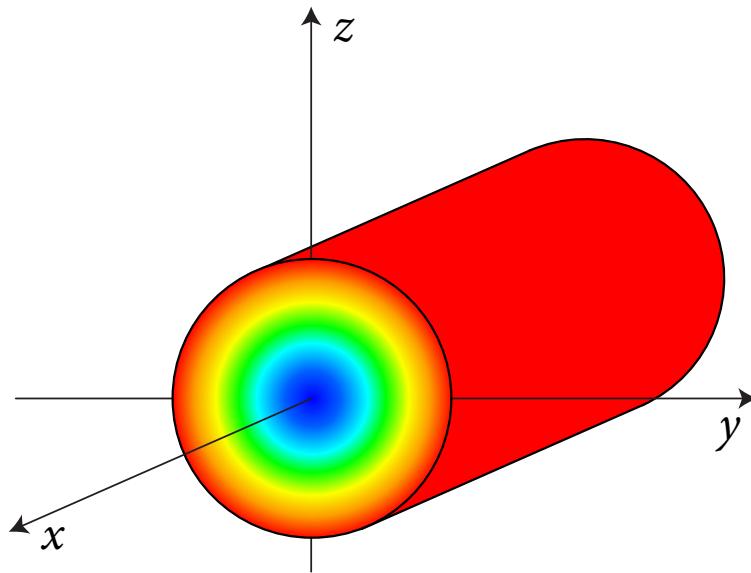
**Weitere Möglichkeit:** Ein Minimum bleibt nur unter einer Untergruppe  $H$  von  $G$  invariant.

Beispiel:

$$V(x, y, z) = y^2 + z^2,$$

$$G = \{\text{Drehungen um } x\text{-Achse und Verschiebungen in } x\text{-Richtung}\} \cong O(2) \times \mathbb{R},$$

$$H = \{\text{Drehungen um } x\text{-Achse}\} \cong O(2) \times \{0\}.$$



## 1.1 Symmetriebrechung beim Ferromagneten

Oberhalb der Curie-Temperatur  $T_C$  sind die Ausrichtungen der Spins in einem Ferromagneten isotrop verteilt, makroskopisch liegt die volle  $O(3)$ -Rotationssymmetrie vor, d. h. keine Raumrichtung ist ausgezeichnet.

Bei Temperaturen unterhalb von  $T_C$  führt eine spontane Magnetisierung zur Auszeichnung einer Vorzugsrichtung. Der im konkreten physikalischen System vorliegende Grundzustand bricht die Symmetrie auf eine Untergruppe  $O(2)$  (Drehungen um die Vorzugsrichtung).

## 1.2 Spontane Symmetriebrechung in der Quantenmechanik

In der Quantenmechanik endlich vieler Freiheitsgrade kann keine spontane Symmetriebrechung auftreten. Dies ist eine Konsequenz des Stone-von Neumannschen Eindeutigkeitssatzes, der besagt, dass die Schrödingerdarstellung der Quantenmechanik die bis auf unitäre Äquivalenz einzige irreduzible Darstellung der Heisenbergschen Vertauschungsrelationen  $[q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$  für Orts- und Impulsoperator auf einem Hilbertraum ist.<sup>1</sup> Gäbe es nun eine Symmetrie, die den Grundzustand in einen anderen Zustand überführt, könnte man aus diesem eine inäquivalente Darstellung konstruieren, im Widerspruch zum Stone-von Neumannschen Satz. Eine genauere Erläuterung im Rahmen der algebraischen Formulierung der Quantentheorie findet man in [Ear03].

In der Quantentheorie unendlich vieler Freiheitsgrade (Festkörperphysik, relativistische Quantenfeldtheorie, ...) gilt der Eindeutigkeitssatz nicht mehr und tatsächlich lassen sich dort Modelle mit spontaner Symmetriebrechung finden. Dazu wollen wir uns zunächst überlegen, was spontane Symmetriebrechung in diesem Kontext überhaupt bedeutet.

## 2 Situation in der relativistischen Quantenfeldtheorie

Wir betrachten eine auf Feldern  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$  definierte Wirkung  $\mathcal{S}[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x))$ . Als *globale innere Symmetrie* bezeichnet man eine Darstellung einer Liegruppe  $G$  auf den Feldern  $\phi$ , die vom Raumzeitpunkt unabhängig ist<sup>2</sup> und  $\mathcal{L}$  (oder allgemeiner  $\mathcal{S}$ ) invariant lässt. Die Generatoren (eine Basis der zugehörigen Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$ ) bezeichnen wir mit  $T^a$ ,  $a = 1, \dots, \dim(G)$ . Wir unterscheiden im Folgenden nicht zwischen den Elementen von Liegruppe bzw. Liealgebra und ihren Darstellungen.

Nach dem Noether-Theorem gibt es zu jedem Generator  $T^a$  einen erhaltenen Strom  $j^{a,\mu}(x)$  mit  $\partial_\mu j^{a,\mu}(x) = 0$ , sodass die Ladung

$$Q^a(t) \equiv \int d^3x j^{a,0}(\vec{x}, t) = Q^a$$

eine zeitunabhängige Erhaltungsgröße ist.

Nach Quantisierung erzeugen die hermitischen Operatoren  $Q^a$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  auf den Feldoperatoren (vgl. [Wei95], Abschnitt 7.3):

$$[Q^a, \phi] = T^a(\phi)$$

---

<sup>1</sup>Für Präzisierung der Aussage und Beweis des Satzes siehe z. B. [Str05].

<sup>2</sup>D. h. Wirkung der Gruppenelemente und Raumzeittranslation vertauschen. Daraus folgt, dass der Impulsoperator mit den Generatoren der Symmetrietransformation vertauscht.

## 2.1 Das Fabri-Picasso-Theorem

Wie kann sich nun das Vakuum  $|0\rangle$  unter der Symmetrie verhalten? Die Antwort auf diese Frage gibt das

**Theorem (Fabri, Picasso)** *Unter einer globalen inneren Symmetrie der Lagrangedichte  $\mathcal{L}$  gilt entweder*

*i)  $Q^a|0\rangle = 0$  oder*

*ii)  $Q^a|0\rangle$  liegt nicht im Hilbertraum (d. h.  $|0\rangle$  liegt nicht im Definitionsbereich des unbeschränkten, also nicht überall definierten Operators  $Q^a$ ).*

Gilt Fall **i)** für alle  $a$ , so ist  $\langle 0|T^a(\phi)|0\rangle = \langle 0|[Q^a, \phi]|0\rangle = 0$ . Für endliche Transformationen  $g = e^{i\theta^a T^a} \in G$  sieht man durch Ausschreiben der Exponentialreihe<sup>3</sup>

$$\langle 0|g(\phi)|0\rangle = \langle 0|\exp(i\theta^a \text{ad}_{Q^a})\phi|0\rangle = \langle 0|\phi|0\rangle ,$$

das Vakuum bleibt invariant unter  $G$ . Im Fall **ii)** sprechen wir von *spontaner Symmetriebrechung* und schreiben etwas salopp  $Q^a|0\rangle \neq 0$ .

*Beweis des Fabri-Picasso-Theorems:* Mit dem Viererimpulsoperator  $P_\mu$  gilt

$$j^0(x) = e^{-iP \cdot x} j^0(0) e^{iP \cdot x} .$$

Da das Vakuum translationsinvariant ist ( $e^{iP \cdot x}|0\rangle = |0\rangle$ ) und der Generator  $Q^a$  der inneren Symmetrie mit  $P$  vertauscht, folgt daraus

$$\langle 0|j^0(x)Q^a|0\rangle = \langle 0|j^0(0)Q^a|0\rangle .$$

Damit gilt für die Norm von  $Q^a|0\rangle$

$$\langle 0|Q^a Q^a|0\rangle = \int d^3x \langle 0|j^0(x)Q^a|0\rangle = \int d^3x \langle 0|j^0(0)Q^a|0\rangle .$$

Dieser Ausdruck divergiert, sofern nicht  $Q^a|0\rangle = 0$  ist. □

## 3 Das Nambu-Goldstone-Theorem

Zentrales Ergebnis dieses Abschnitts ist das

**Theorem (Nambu, Goldstone)** *Wird die Symmetrie einer Lagrangedichte spontan gebrochen, so gibt es zu jedem Generator  $T^a$  mit  $Q^a|0\rangle \neq 0$  ein masseloses Teilchen.*

Bevor wir zum Beweis kommen, wollen wir uns das (rein klassisch) an einem Beispiel veranschaulichen.

---

<sup>3</sup>mit Notation  $\text{ad}_A(B) := [A, B]$

### 3.1 Goldstone-Modell

Das einfachste feldtheoretische Modell mit spontaner Symmetriebrechung wird beschrieben durch die Lagrangedichte

$$\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) + \mu^2\phi^2 - \lambda(\phi^2)^2 \quad \text{mit} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \text{ reell}, \quad \lambda, \mu^2 > 0 .^4$$

Diese ist invariant unter einer globalen  $O(2)$ -Symmetrie. Die Minima des „Potentials“  $V(\phi) = -\mu^2\phi^2 + \lambda(\phi^2)^2$  liegen bei

$$\phi_0^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv v^2 ,$$

d. h. die Symmetrie ist spontan gebrochen. Wählt man als Minimum  $\phi_0 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ , so kann man das

Feld neu als  $\phi' = \phi - \phi_0 = \begin{pmatrix} \eta \\ \psi \end{pmatrix}$  definieren und erhält

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\phi', \partial\phi') &= (\partial_\mu\phi')(\partial^\mu\phi') + \mu^2(\eta + v)^2 + \mu^2\psi^2 - \lambda((\eta + v)^2 + \psi^2)^2 \\ &= (\partial_\mu\phi')(\partial^\mu\phi') - (6\lambda v^2 - \mu^2)\eta^2 + (2\mu^2v - 4\lambda v^3)\eta - (2\lambda v^2 - \mu^2)\psi^2 + \text{W.w.} \\ &= (\partial_\mu\psi)(\partial^\mu\psi) + (\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - 2\mu^2\eta^2 + \text{W.w.} \end{aligned}$$

Konstante Terme können vernachlässigt werden, die Terme höherer als quadratischer Ordnung beschreiben Wechselwirkungen. Der  $\eta^2$ -Term beschreibt ein Teilchen mit Masse  $2\mu^2$  (nun mit korrektem Vorzeichen), doch viel spannender ist das Fehlen eines  $\psi^2$ -Terms:  $\psi$  lässt sich als masseloses Teilchen interpretieren.

### 3.2 Zum Beweis des Nambu-Goldstone-Theorems

Allein in der Originalarbeit [GSW62] werden drei verschiedene Beweise des Nambu-Goldstone-Theorems präsentiert, eine Lehrbuchversion findet man beispielsweise in [Ait82] und eine rigorose Variante in [Str08]. Der im Folgenden dargestellte störungstheoretische Beweis aus [Wei96] hat den Vorteil, dass er sich gut als Verallgemeinerung des Vorgehens im vorherigen Abschnitt lesen lässt. Um nicht nur klassisch zu rechnen, sondern auch Quanteneffekte mit einzubeziehen, benutzen wir den Begriff des *effektiven Potentials*, das ziemlich analog zum klassischen Potential behandelt werden kann. Für den Weg dahin wird etwas Maschinerie aus der Quantenfeldtheorie benötigt, die hier nur kurz skizziert werden kann; ausführlichere Informationen findet man in den meisten Lehrbüchern zu Quantenfeldtheorie. Man könnte auch die folgenden beiden Abschnitte überspringen und sich dann überlegen, was die im Beweis verwendeten Resultate aus diesen Abschnitten im klassischen Fall aussagen und wie dies die vom Goldstone-Modell bekannte Vorgehensweise verallgemeinert.

### 3.3 Voraussetzungen aus der Quantenfeldtheorie

- Aus der Funktionalintegralquantisierung erhält man das *erzeugende Funktional der Greenfunktionen*

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \int \mathcal{D}\phi e^{i(S[\phi] + J \cdot \phi)} \quad \text{mit} \quad J \cdot \phi \equiv \int d^4x J_i(x) \phi_i(x) ,$$

dabei ist  $W[J]$  das *erzeugende Funktional der zusammenhängenden Greenfunktionen*

---

<sup>4</sup>Manche Autoren setzen ein negatives Vorzeichen vor den  $\phi^2$ -Term, damit er wie ein gewöhnlicher Massenterm aussieht, und fordern dann  $\mu^2 < 0$ .

- Die Legendretransformierte

$$\Gamma[\varphi] = J \cdot \varphi - W[J] \quad \text{mit} \quad \varphi = \frac{\delta W[J]}{\delta J} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi} = J$$

heißt *effektive Wirkung*.

- Für Vakuumserwartungswerte liegen keine äußeren Quellen vor, es ist also

$$\left. \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi} \right|_{\varphi=\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle} = 0 .$$

- In diesem Fall gilt für den *Propagator*

$$\Delta_{ij} = \left. \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J_i \delta J_j} \right|_{J=0} = \left. \frac{\delta \varphi_j}{\delta J_i} \right|_{J=0}, \quad \text{also} \quad \Delta_{ij}^{-1} = \left. \frac{\delta J_j}{\delta \varphi_i} \right|_{\varphi=\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle} = \left. \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i \delta \varphi_j} \right|_{\varphi=\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle} . \quad (1)$$

Hier ist das Inverse bezüglich Faltung gemeint.

- Unter der Annahme eines Poincaré-invarianten Vakuums ist  $\langle 0|\hat{\phi}(x)|0\rangle$  unabhängig vom Raumzeitpunkt. Für raumzeitlich konstante Felder  $\Phi(x) \equiv \Phi$  setzen wir

$$\Gamma[\Phi] = \int d^4x V_{\text{eff}}(\Phi)$$

mit dem *effektiven Potential*  $V_{\text{eff}}$ . Dann ist für den Vakuumserwartungswert

$$0 = \left. \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi(x)} \right|_{\varphi=\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle} = \left. \frac{\partial V_{\text{eff}}(\Phi)}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle} . \quad (2)$$

Dies entspricht der Bedingung für das Minimum eines klassischen Potentials.

- Symmetrien der Wirkung sind auch Symmetrien des effektiven Potentials.

### 3.4 Was sind masselose Teilchen in der QFT?

Um eine Idee zur Beantwortung dieser Frage zu bekommen, betrachten wir zunächst skalare Felder: Diese erfüllen die Klein-Gordon-Gleichung  $(\square + m^2)\phi(x) = 0$  mit Masse  $m$ .

Das Inverse des Klein-Gordon-Operators ist der Propagator  $\Delta(x; m^2)$  mit  $(\square + m^2)\Delta(x; m^2) = \delta(x)$ , im Impulsraum (nach Fouriertransformation) lässt sich dieser schreiben als Multiplikationsoperator

$$\tilde{\Delta}(k; m^2) = \frac{1}{m^2 - k^2 - i\epsilon} .$$

Ein masseloses Teilchen entspricht also einem Pol bei  $k^2 = 0$  bzw. einer Nullstelle des Inversen  $\tilde{\Delta}^{-1}(k=0)$ .

Für mehrkomponentige Felder haben wir aus (1)

$$\Delta_{ij}^{-1}(x-y) = \left. \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i(x) \delta \varphi_j(y)} \right|_{\varphi=\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle}$$

oder im Impulsraum

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(\Phi)}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \Big|_{\Phi=\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle} &= \frac{\partial}{\partial \Phi_i} \Bigg|_{\Phi=\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle} \frac{\delta \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_j(0)} \Bigg|_{\varphi \equiv \Phi} = \int d^4x \frac{\delta^2 \Gamma[\varphi]}{\delta \varphi_i(x) \delta \varphi_j(0)} \Bigg|_{\varphi=\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle} \\ &= \int d^4x \Delta_{ij}^{-1}(x) e^{i0 \cdot x} = \tilde{\Delta}_{ij}^{-1}(k=0). \end{aligned}$$

Im mehrkomponentigen Fall entsprechen masselose Teilchen also gerade den Eigenvektoren der Matrix  $\left( \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(\Phi)}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \Big|_{\Phi=\langle 0|\hat{\phi}|0\rangle} \right)_{ij}$  zum Eigenwert 0.

### 3.5 Störungstheoretischer Beweis des Nambu-Goldstone-Theorems

Wir verwenden zur Abkürzung  $v \equiv \langle 0|\hat{\phi}|0\rangle$ .

Da das effektive Potential invariant unter  $G$  ist, erhält man

$$V_{\text{eff}}(\Phi) = V_{\text{eff}}(e^{itT^a}\Phi) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

durch Differenzieren nach  $t$  an der Stelle  $t=0$

$$0 = \frac{\partial V_{\text{eff}}(\Phi)}{\partial \Phi_j} T_{jk}^a \Phi_k.$$

Erneutes Ableiten nach  $\Phi_i$  liefert

$$0 = \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(\Phi)}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} T_{jk}^a \Phi_k + \frac{\partial V_{\text{eff}}(\Phi)}{\partial \Phi_j} T_{ji}^a.$$

Für das Vakuum gilt nun gemäß (2) die Bedingung  $\frac{\partial V_{\text{eff}}(\Phi)}{\partial \Phi} \Big|_{\Phi=v} = 0$ , also erhalten wir an dieser Stelle

$$0 = \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}(\Phi)}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \Big|_{\Phi=v} T_{jk}^a v_k = \tilde{\Delta}_{ij}^{-1}(k=0) T_{jk}^a v_k.$$

Für jeden spontan symmetriegerbrochenen Generator ( $T^a v \neq 0$ ) ist  $T^a v$  ein Eigenvektor von  $\tilde{\Delta}^{-1}(k=0)$  zum Eigenwert 0, was nach obigen Überlegungen einem masselosen Teilchen entspricht.

### 3.6 Beispiele für Goldstone-Bosonen

- Brechung der Rotationssymmetrie beim Ferromagneten  $\Rightarrow$  *Magnonen*
- Brechung der Translationssymmetrie in Fluiden oder Festkörpern  $\Rightarrow$  *Phononen*
- Die chirale Flavour-Symmetrie in der QCD wird durch die Quarkmassen explizit gebrochen. Wenn man die Quarkmassen jedoch vernachlässigt, wird diese Symmetrie spontan gebrochen und die *Pionen* als nicht masselose, aber vergleichsweise leichte Hadronen lassen sich als zugehörige (Pseudo-)Goldstone-Bosonen interpretieren.

## 4 Der Higgs-Mechanismus

Bei den Beispielen für Goldstone-Bosonen wurde kein Elementarteilchen genannt – und tatsächlich sind auch keine masselosen skalaren Elementarteilchen bekannt. Demnach wäre das Goldstone-Theorem aus Sicht der Elementarteilchenphysik eher als Rückschlag für die Idee der spontanen Symmetriebrechung zu werten.

Doch bisher haben wir nur spontan gebrochene *globale* Symmetrien betrachtet. Was passiert, wenn man dies auf *lokale* Symmetrien (Eichtheorien) zu übertragen versucht?

Es wird sich herausstellen, dass die Goldstone-Moden in diesem Fall in der Eichfreiheit verschwinden, also keine masselosen Teilchen auftreten, aber stattdessen die Eichbosonen massiv werden. Dieses heute als *Higgs-Mechanismus* bekannte Phänomen wurde im Jahr 1964 nahezu unabhängig von F. Englert und R. Brout [EB64], P. Higgs [Hig64a, Hig64b] sowie G. Guralnik, C. Hagen und T. Kibble [GHK64] beschrieben. Peter Higgs stellte dabei am deutlichsten das Auftreten eines weiteren massiven Skalarteilchens heraus, das später (wie der ganze Mechanismus) nach ihm benannt wurde.

Wie schon Higgs in seinen Artikeln von 1964 werden wir das Phänomen an einem einfachen Beispiel rein klassisch untersuchen.

### 4.1 Einfaches Modell

Wir betrachten eine abelsche Eichtheorie gekoppelt an ein komplexes Skalarfeld  $\phi$  mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) + \mu^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4 , \quad \mu^2, \lambda > 0 .$$

Dabei ist  $A_\mu$  das Eichfeld,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  und  $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ . Wie im Goldstone-Modell ist die (globale) U(1)-Symmetrie spontan gebrochen, ein Minimum des „Potentials“ liegt bei  $|\phi_0|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v$ .

**Freiheitsgrade:**  $3_{A_\mu} - 1_{U(1)} + 2_\phi = 4$

Für das Eichboson sind nur zwei Polarisationsrichtungen zulässig, was wir der U(1)-Eichsymmetrie zurechnen.

**Erster Schritt: Entwicklung um das Vakuum** Mit der Reparametrisierung  $\phi(x) = (v + \eta(x))e^{i\rho(x)}$  und der Schreibweise  $|V|^2 := V_\mu^*V^\mu$  für beliebige komplexwertige Vektorfelder  $V^\mu$  erhält man

$$|D\phi|^2 = |e^{i\rho}[\partial + i(\partial\rho) + ieA](v + \eta)|^2 = (\partial\eta)^2 + e^2(v + \eta)^2(A + \frac{1}{e}\partial\rho)^2 ,$$

also eingesetzt in die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2v^2\left(1 + \frac{\eta}{v}\right)^2(A - \partial\rho/e)^2 + (\partial_\mu\eta)^2 - 2\mu^2\eta^2 - 4\lambda v\eta^3 - \lambda\eta^4 .$$

**Freiheitsgrade:** Scheinbar  $3_{A_\mu} + 1_\eta + 1_\rho = 5$ , doch die U(1)-Eichsymmetrie ist nach wie vor vorhanden, wenn auch nicht direkt ablesbar (manifest).

**Zweiter Schritt: Wahl einer Eichung** Wenn man nun die Eichtransformation  $\phi \rightarrow \phi e^{-i\rho} = v + \eta$ ,  $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\rho/e$  durchführt, erhält man

$$\mathcal{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e^2v^2\left(1 + \frac{\eta}{v}\right)^2A_\mu^2 + (\partial_\mu\eta)^2 - 2\mu^2\eta^2 - 4\lambda v\eta^3 - \lambda\eta^4 .$$

Das masselose  $\rho$ -Feld ist durch die Wahl der Eichung vollständig verschwunden, während das massive Eichboson nun drei Freiheitsgrade besitzt. Das verbleibende Skalarfeld  $\eta$  ist ein *Higgs-Boson*.

**Freiheitsgrade:**  $3_{A_\mu} + 1_\eta = 4 \quad \checkmark$

Durch den Higgs-Mechanismus verschiebt sich das Vakuum also so, dass die Eichbosonen massiv werden.

## 4.2 Ausblick: Standardmodell

Bekannt wurde der Higgs-Mechanismus durch seine Anwendung im Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung (S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg 1967).

- Ausgangspunkt: Eine (nichtabelsche)  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ -Eichtheorie erklärt die elektroschwache Wechselwirkung zunächst unzureichend, da die Austauschteilchen (Eichbosonen) masselos erscheinen, was der geringen Reichweite der schwachen Wechselwirkung widerspricht.
- Higgs-Mechanismus: Ein zusätzlich postulierte Skalarfeldes bricht die Symmetrie auf eine Untergruppe  $U(1)_{\text{em}}$ , sodass die den  $W^\pm$ - und Z-Bosonen zugeordneten Felder nach Umschreiben der Lagrangedichte und Eichfixierung einen Massenterm erhalten, das zur verbliebenen Symmetriegruppe korrespondierende Photon ( $A$ ) aber masselos bleibt.
- Man kann wieder Freiheitsgrade zählen:
  - Vorher:**  $4 \cdot 2_{\text{Eichbosonen}} + 4 \cdot 1_\phi = 12$
  - Nachher:**  $3 \cdot 3_{W,Z} + 2_A + 1_H = 12 \quad \checkmark$
- Die massiven  $W^\pm$ - und Z-Bosonen konnten 1983 direkt nachgewiesen werden.
- Wie im einfachen Modell sollte ein massives Skalarteilchen übrig bleiben. Dieses wurde vermutlich 2012 am CERN entdeckt.

## 5 Zusammenfassung

- Spontane Symmetriebrechung: Der Grundzustand (das Vakuum) ist nicht invariant unter einer Symmetrie der Wirkung.
- Goldstone-Theorem: Werden globale innere Symmetrien spontan gebrochen, treten masselose Teilchen auf.
- Higgs-Mechanismus: Durch spontane Symmetriebrechung in Eichtheorien können die Eichbosonen Masse erhalten.

## Literatur

- [Ait82] I. Aitchison: *An informal introduction to gauge field theories*. Cambridge University Press, Cambridge (1982).
- [Ear03] J. Earman: Rough guide to spontaneous symmetry breaking. In K. Brading, E. Castellani (eds): *Symmetries in Physics: Philosophical Reflections*. Cambridge University Press, Cambridge (2003). Pages 335-346. <http://pitt.edu/~jearman/Earman2003b.pdf>
- [EB64] F. Englert, R. Brout: Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons. *Phys. Rev. Lett.* **13**(9), 321-323 (1964). doi:[10.1103/PhysRevLett.13.321](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.321)
- [GHK64] G. Guralnik, C. Hagen, T. Kibble: Global Conservation Laws and Massless Particles. *Phys. Rev. Lett.* **13**(20), 585-587 (1964). doi:[10.1103/PhysRevLett.13.585](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.585)
- [GSW62] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg: Broken Symmetries. *Phys. Rev.* **127**(3), 965-970 (1962). doi:[10.1103/PhysRev.127.965](https://doi.org/10.1103/PhysRev.127.965)
- [Hig64a] P. Higgs: Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields. *Phys. Lett.* **12**(2), 132-133 (1964). doi:[10.1016/0031-9163\(64\)91136-9](https://doi.org/10.1016/0031-9163(64)91136-9)
- [Hig64b] P. Higgs: Broken Symmetries and the Mass of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.* **13**(16), 508-509 (1964). doi:[10.1103/PhysRevLett.13.508](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.13.508)
- [Str05] F. Strocchi: *An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics*. World Scientific, Singapore (2005).
- [Str08] F. Strocchi: *Symmetry Breaking*. Springer, Berlin Heidelberg (2008). doi:[10.1007/978-3-540-73593-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-73593-9)
- [Wei95] S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields*. Vol. I Foundations. Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [Wei96] S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields*. Vol. II Modern Applications. Cambridge University Press, Cambridge (1996).