Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Abelsche Eichsymmetrie

Sebastian Engelnkemper

19. Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Eichprinzip bietet eine der wichtigsten Grundlagen für die modernen Quantenfeldtheorien. Es liefert auf Grundlage von Symmetrieüberlegungen den theoretischen Übergang zwischen freien und wechselwirkenden Feldern und postuliert bzw. erklärt die aus ihm resultierenden und experimentell nachgewiesenen Eichbosonen. Die hier behandelten Abelschen Eichsymmetrien kommen vorallem in der wohl etabliertesten der Quantenfeldtheorien zum Tragen - der Quantenelektrodynamik.

Im Folgenden soll das grundlegende Eichprinzip ausgehend von der klassischen Elektrodynamik verstanden und auf die QED angewandt werden. Des Weiteren gilt es, Unterschiede aber auch Auswirkungen der rein mathematischen Eichfreiheit und der zugrunde liegenden Physik herauszuarbeiten.

2 Eichsymmetrien in der kED

Schon in der klassischen Elektrodynamik, die durch die Maxwellgleichungen beschrieben wird, kann eine physikalische Invarianz unter $U(1)$-Transformationen der mathematischen Hilfsfelder festgestellt werden. Diese Unabhängigkeit wird weithin als Eininvarianz bzw. Eichfreiheit bezeichnet.

2.1 Eichinvarianz der Maxwell-Gleichgungen

Sämtliche Betrachtungen werden unter Verwendung der natürlichen Einheiten ($\hbar = c = 1$) vollzogen. Des Weiteren wird auf die Kennzeichnung trivialer funktionaler Abhängigkeiten von Raum bzw. Zeit verzichtet.

Die Maxwell-Gleichungen lauten wie folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{j} + \partial_t \vec{E} \,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Zur Lösung dieser Gleichungen wird im Allgemeinen das skalare Potential φ und das Vektorpotential $\vec{A}$ definiert:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &:= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
\vec{E} &:= -\vec{\nabla}\varphi - \partial_t \vec{A} \,. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Die mathematische Lösung der physikalischen Gleichungen kann also durch $3+1 = 4$ im Gegensatz zu $3 + 3 = 6$ Komponenten bzw. Freiheitsgrade beschrieben werden. Als Resultat ergibt sich die Invarianz der physikalischen Felder (vgl. Gl. (2)) unter der *lokalen* Eichtransformation

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi - \partial_t \alpha(\vec{x}, t) \\ \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha(\vec{x}, t) \end{aligned} \tag{3}$$

der mathematischen Hilfsfelder $\forall\ \alpha(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}$.
Die Unabhängigkeit der physikalischen Lösung in Hinblick auf den Parameter $\alpha(\vec{x}, t)$ wird Eichfreiheit genannt. Zur Lösung der Maxwell-Gleichungen können die unphysikalischen Freiheitsgrade, die aus den Gleichungen (2) resultieren, also beliebig festgelegt werden. Als prominente Eichungen sind hier die Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{4}$$

und die Lorenz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial_t \varphi = 0 \tag{5}$$

zu nennen.

2.2 Kovarianz der Maxwell-Gleichungen

Neben der $U(1)$-Eichinvarianz implizieren die Maxwell-Gleichungen eine Invarianz unter Lorentz-Transformation. Die Gleichungen (1) können also in eine kovariante Schreibweise überführt werden:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \\ \partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} + \partial_\lambda F^{\mu\nu} &= 0\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Dabei ist der Feldstärketensor definiert zu:

$$F^{\mu\nu} := \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \tag{7}$$

und das Vierer-Vektorpotential sowie -Strom zu:

$$A^\mu := (\varphi, \vec{A}) \qquad \text{und} \qquad j^\mu := (\rho, \vec{j})\,. \tag{8}$$

Der Feldstärketensor beinhaltet dabei alle 6 physikalischen Freiheitsgrade und die zugehörige Eichtransformation ergibt sich zu:

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha(x)\,. \tag{9}$$

Aus der ersten Gleichung in (6) folgt direkt die Kontinuitätsgleichung (10):

$$\begin{aligned} \partial_\nu j^\nu &= -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \\ &\Rightarrow \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0\,, \end{aligned} \tag{10}$$

da $\partial_\nu \partial_\mu$ symmetrisch und $F^{\mu\nu}$ asymmetrisch unter $\mu \leftrightarrow \nu$.
Des Weiteren ergibt sich unter Verwendung der Lorenz-Eichung ($\partial_\mu A^\mu = 0$) eine

Ebenewellen-Gleichung

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu A^\mu - \partial^\nu \underbrace{(\partial_\mu A^\mu)}_{=0} &= \underbrace{j^\nu}_{=0} \\ \Rightarrow \Box A^\mu &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

als Bewegungsgleichung für A^μ in Abwesenheit von Quellen.

3 Übergang zur Quantenmechanik

3.1 Eichinvarianz und Wechselwirkung

Nachdem unter Betrachtung der Maxwell-Gleichungen im Bezug auf $U(1)$-Eich- und Lorentz-Invarianz der Begriff der Eichfreiheit verdeutlicht wurde und physikalische Gegebenheiten wie Kontinuitätsgleichung und Ebenewellen-Gleichung für Vierer-Strom und Vierer-Vektorpotential als Resultat der Lorenz-Eichung festgestellt wurden, soll nun kurz die Eichfreiheit in der Quantenmechanik untersucht werden.

Der Hamilton-Operator für ein Teilchen der Ladung q in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes ist gegeben durch:

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\varphi\,. \tag{12}$$

Die Größen $\vec{A}$ und φ ergeben sich analog zu (2). Sei $|\psi\rangle$ ein Zustand, der die zugehörige Schrödingergleichung bzgl. H löst, wird deutlich, dass Transformationen $H \to H'$ gemäß (3) die Energieeigenwerte

$$\langle\psi|\, H' \,|\psi\rangle = E' \neq E\,, \tag{13}$$

also die physikalisch zugänglichen Größen, nicht unverändert lassen. Die naheliegende Lösung ist die Einführung einer korrespondierenden *lokalen* Phasentransformation

$$|\psi\rangle \to |\psi'\rangle = \exp\left[\mathrm{i}q\alpha(\vec{x},t)\right]|\psi\rangle \tag{14}$$

der Zustände in Abhängigkeit des Eichparameters $\alpha(\vec{x},t)$.
Unter der nun vollständigen Transformation bleiben Energie und Aufenthaltswahrscheinlichkeit als physikalische Größen invariant:

$$\begin{aligned} \langle\psi'|\, H' \,|\psi'\rangle &= E' = E \\ \langle\psi'|\, \psi'\rangle &= |\psi|^2 = \langle\psi|\, \psi\rangle\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Die Forderung der Eichsymmetrie unter Transformation der mathematischen Hilfsgrößen $\vec{A}$ und φ als Wechselwirkungsterme setzt also eine *lokale* Eichinvarianz der Wellenfunktionen des Systems voraus. Oder anders ausgedrückt:
Die *lokale* Eichinvarianz der Wellenfunktionen bzw. Zustände eines physikalischen Systems impliziert das Vorhandensein einer elektromagnetischen Wechselwirkung.

3.2 Relativistische Quantenmechanik

Die grundlegenden Gleichungen der Quantenmechanik und Speziellen Relativitätstheorie sind die Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\partial_t |\psi\rangle = -\frac{1}{2m}\nabla^2 |\psi\rangle = H |\psi\rangle = E |\psi\rangle \tag{16}$$

und die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$(H^2 =)\ E^2 = p^2 + m^2 \,. \tag{17}$$

Durch Quantisierung des Impulses in (17) und Verknüpfung beider Gleichungen erhält man die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box + m^2) |\psi\rangle = 0 \,. \tag{18}$$

Aufgrund der quadratischen Zeitableitung tritt zu jeder Lösung mit positivem Energiewert eine Lösung mit negativem Energiewert auf. Um dieses anfängliche physikalische Problem zu umgehen und Fermionen mit halbzahligem Spin beschreiben zu können, führte Paul Dirac eine Vektorwertige Bewegungsgleichung mit linearer Zeit- und Ortsableitung ein:

$$\mathrm{i}\partial_t\psi = \left(-\mathrm{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + m\beta\right)\psi = H\psi \,. \tag{19}$$

Die Größen ψ sind dabei die 4-komponentigen Dirac-Spinoren, die Informationen über Spinzustand und Energie tragen. Die Zustände mit vermeintlich negativen Energieeigenwerten werden nun durch Antiteilchen identifiziert.

Eine zur Schrödinger-Gleichung analoge Vorgehensweise liefert Bedingungen für die Matrizen α_i und β, die in der Dirac-Darstellung durch folgende Wahl erfüllt werden:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \,. \tag{20}$$

Dabei sind σ_i die Pauli-Matrizen.

Mit den Definitionen

$$\gamma^\mu := (\beta, \beta\vec{\alpha}) \tag{21}$$

und

$$\not{\partial} := \gamma^\mu \partial_\mu \tag{22}$$

ergibt sich die kovariante Dirac-Gleichung zu:

$$(\mathrm{i}\not{\partial} - m)\psi = 0 \,. \tag{23}$$

4 Quantenfeldtheorie

Für die Beschreibung von Vielteilchensystemen und deren Wechselwirkungen werden die punktförmigen Ortskoordinaten der Teilchen in Felder zusammengefasst. Für skalare Wellenfunktionen ohne Spin ergibt sich:

$$\vec{x}_i(t) \to \phi(\vec{x}, t)$$

sowie für Dirac-Spinoren mit halbzahligem Spin:

$$\vec{x}_i(t) \to \psi(\vec{x}, t)\,.$$

Die Felder werden nach der zweiten Quantisierung durch Integrale über Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren definiert und unterliegen Kommutationsrelationen, die für die späteren Symmetriebetrachtungen allerdings irrelevant sind und daher nur erwähnt bleiben.

4.1 Lagrangedichte und Noether-Theorem

Analog zur Lagrangefunktion L als Differenz aus kinetischer und potentieller Energie in der klassischen Mechanik wird für die feldtheoretische Betrachtung eine Lagrangedichte definiert, sodass gilt:

$$\int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)\ \mathrm{d}^3x = L(x_i, \partial_t x_i)\,. \tag{24}$$

Für die Wirkung S ergibt sich ebenso analog:

$$S = \int \mathcal{L}\ \mathrm{d}^3x\, \mathrm{d}t = \int \mathcal{L}\ \mathrm{d}^4x\,. \tag{25}$$

Für freie komplexe skalare Felder nimmt die Lagrangedichte folgende Gestalt an:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi\,. \tag{26}$$

sowie für freie komplexe Dirac-Felder

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \mathrm{i} \partial\!\!\!/ \psi - m \bar{\psi} \psi \tag{27}$$

mit $\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0$.
Unter Verwendung des Prinzips der minimalen Wirkung ergibt sich die Euler-Lagrange-Gleichung für Feldtheorien:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0\,. \tag{28}$$

Unter Anwendung von (28) auf (27) und (26) erhält man die feldtheoretischen Bewegungsgleichungen analog zu (18) bzw. (23).

Das Noether-Theorem der klassischen Mechanik besagt, dass jede kontinuierliche Symmetrietransformation, unter der die Wirkung S invariant bleibt, einen erhaltenen Strom j^μ mit $\partial_\mu j^\mu = 0$ und eine Erhaltungsgröße $Q = j^0$ impliziert.

In der feldtheoretischen Betrachtung ergibt sich analog:

Ausgehend von einer infinitesimalen Variation

$$\begin{aligned} \phi^\mu &\to \phi'^\mu = \phi^\mu + \delta\phi^\mu \\ \partial_\mu\phi^\mu &\to (\partial_\mu\phi^\mu)' = \partial_\mu\phi^\mu + \delta\partial_\mu\phi^\mu \end{aligned} \tag{29}$$

des Feldes variiert $\mathcal{L}$ um:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\mu}\delta\phi^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^\mu)}\delta\partial_\mu\phi^\mu \,. \tag{30}$$

Damit die Wirkung invariant bleibt, kann der Noether-Strom nach einigen Rechenschritten definiert werden über:

$$\delta S = \int \partial_\mu j^\mu \; \mathrm{d}^4x \overset{!}{=} 0 \tag{31}$$

mit:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] \overset{!}{=} 0 \tag{32}$$

und analog für n unabhängige Felder:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu \left[\sum_i^n \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\delta\phi_i\right] \overset{!}{=} 0 \,. \tag{33}$$

Die zugehörige zeitliche Erhaltungsgröße (Noether-Ladung) ergibt sich damit zu:

$$Q := \int \mathrm{d}^3x \; j^0 \,. \tag{34}$$

Betrachtet man die *globale* $U(1)$-Transformation für Dirac-Felder bzw. Fermionen, transformieren die Felder wie folgt:

$$\begin{aligned} \psi &\to \psi' = exp[\mathrm{i}q\alpha]\psi \\ \bar{\psi} &\to \bar{\psi}' = exp[-\mathrm{i}q\alpha]\bar{\psi} \,. \end{aligned} \tag{35}$$

Damit ist nach trivialer Rechnung

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi' - m\bar{\psi}'\psi' = \mathcal{L} \tag{36}$$

die Lagrangedichte und damit die Wirkung invariant unter obiger Transformation.

Die infinitesimalen $U(1)$-Transformationen ergeben nach durch Entwicklung der Exponentialfunktionen zu:

$$\begin{aligned} \psi &\to [1 + \mathrm{i}q\alpha]\psi \Rightarrow \delta\psi = \mathrm{i}q\alpha\psi \\ \bar{\psi} &\to [1 - \mathrm{i}q\alpha]\bar{\psi} \Rightarrow \delta\bar{\psi} = -\mathrm{i}q\alpha\bar{\psi} \,. \end{aligned} \tag{37}$$

Die Felder ψ und $\bar{\psi}$ können formal als unabhängige Größen betrachtet werden, sodass sich der zugehörige Noether-Strom nach (33) wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta\psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \delta\bar{\psi} \right] \\ \Rightarrow j^\mu &= q\alpha \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \end{aligned} \tag{38}$$

und die zeitliche Erhaltungsgröße zu

$$Q = \int \mathrm{d}^3x \; j^0 = q\alpha \int \mathrm{d}^3x \; \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = q\alpha \int \mathrm{d}^3x \; \psi^\dagger \psi \,. \tag{39}$$

Diese Größe entspricht der Gesamtladung des Systems.

Untersucht man das Verhalten unter einer *lokalen* $U(1)$-Transformation, ist die Lagrange-Dichte freier Fermionen (Gl. (27)) aufgrund des Ableitungsterms nicht mehr invariant. Analog zum quantenmechanischen Hamiltonoperator muss nun der Ableitungsoperator in der quantenfeldtheoretischen Lagrange-Dichte transformiert werden:

$$\partial_\mu \to \partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu =: D_\mu \,. \tag{40}$$

Die Größe D_μ wird als kovariante Ableitung bezeichnet. Unter der *lokalen* $U(1)$-Transformation

$$\psi \to \psi' = exp[\mathrm{i}q\alpha(x)]\psi \tag{41}$$

transformiert sich das oben definierte Vektorfeld wie folgt:

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \,. \tag{42}$$

Nun gilt für den Ableitungsterm der Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned} (D_\mu \psi)' &= D'_\mu \psi' \\ &= (\partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu - \mathrm{i}q\partial_\mu \alpha(x)) exp[\mathrm{i}q\alpha(x)]\psi \\ &= exp[\mathrm{i}q\alpha(x)](\partial_\mu + \mathrm{i}q\partial_\mu\alpha(x) + \mathrm{i}qA_\mu - \mathrm{i}q\partial_\mu\alpha(x))\psi \\ &= exp[\mathrm{i}q\alpha(x)](\partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu)\psi \\ &= exp[\mathrm{i}q\alpha(x)] D_\mu \psi \,. \end{aligned} \tag{43}$$

Die modifizierte Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \mathrm{i} \not{D} \psi - m\bar{\psi}\psi \tag{44}$$

ist also invariant unter der *lokalen* $U(1)$-Transformation:

$$\begin{aligned} \psi' &= exp[\mathrm{i}q\alpha(x)]\psi \\ \bar{\psi}' &= exp[-\mathrm{i}q\alpha(x)]\bar{\psi} \\ A'_\mu &= A_\mu - \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned} \tag{45}$$

4.2 Interpretation des Eichfeldes und QED

Das zur Erhaltung der *lokalen* $U(1)$-Symmetrie eingeführte Eichfeld A_μ kann als neues Teilchenfeld, bzw. unter Betrachtung der physikalischen Gegebenheiten als Photonfeld, gedeutet werden. Gleichung (44) kann umgeschrieben werden zu

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \mathrm{i} \partial\!\!\!/ \psi - \bar{\psi} m \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi \tag{46}$$

$$:= \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{int} \,. \tag{47}$$

Damit kann der erste Term als Lagrange-Dichte eines freien Fermions und der zweite Term als Wechselwirkungsterm gedeutet werden. Um die Theorie zu vervollständigen, muss die Lagrange-Dichte um einen Term erweitert werden, der das freie Photonfeld beschreibt:

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{Maxwell} \,. \tag{48}$$

Der zusätzliche Term ergibt sich aus den Maxwellgleichungen zu:

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \,. \tag{49}$$

Der Wechselwirkungsterm in Gleichung (48) kann als Wechselwirkung zwischen Fermion, Photon und Antifermion, also als Paarvernichtung, gedeutet und die elektrische Ladung q offenbar als Kopplungskonstante der Wechselwirkung identifiziert werden:

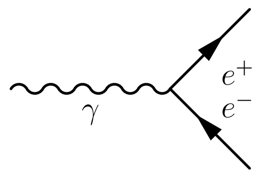

Abbildung 1: Feynman-Diagramm der Paarvernichtung

Das hier dargelegte Prinzip gehört zu einem der fundamentalen Bausteine aller Quantenfeldtheorien: Nach Entwicklung einer freien Feldtheorie wird eine lokale Eichinvarianz gefordert (die hier aufgezeigte Symmetriegruppe $U(1)$ ist nur das einfachste Beispiel), die dann durch Einführung neuer Eichfelder gewährleistet wird. Diese Felder können als Austauschteilchen der jeweiligen Wechselwirkung identifiziert werden. Aus der Gesamt-Lagrange-Dichte der Theorie können dann Feynman-Regeln bzw. -Diagramme abgeleitet werden.

4.3 Skalare QED

Um das beschriebene Prinzip zu verdeutlichen, soll im letzten Abschnitt analog die skalare QED betrachtet werden. Ausgangspunkt ist die Lagrangedichte eines freien skalaren Feldes:

$$\mathcal{L} = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 \,. \tag{50}$$

Ein zur QED völlig analoger Ansatz zur *lokalen* $U(1)$-Transformation führt zu:

$$\begin{aligned}|(D_\mu\phi)'|^2 &= |\ (\partial_\mu + \mathrm{i}qA_\mu - \mathrm{i}q\partial_\mu\alpha(x))exp[\mathrm{i}q\alpha(x)]\phi\ |^2 \\ &= |\ exp[\mathrm{i}q\alpha(x)](\partial_\mu + \mathrm{i}q\partial_\mu\alpha(x) + \mathrm{i}qA_\mu - \mathrm{i}q\partial_\mu\alpha(x))exp[\mathrm{i}q\alpha(x)]\phi\ |^2 \\ &= |(D_\mu\phi)|^2\,. \end{aligned} \tag{51}$$

Damit ist die modifizierte Lagrange-Dichte nach Einführung eines Eichfeldes A_μ invariant und gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2|\phi|^2 \\ &= (\partial_\mu - \mathrm{i}qA_\mu)\phi^*(\partial^\mu + \mathrm{i}qA^\mu)\phi - m^2|\phi|^2 \\ &= |\partial_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 + q^2A^2|\phi|^2 - \mathrm{i}qA_\mu\phi^*\partial^\mu\phi + \partial_\mu\phi^*\mathrm{i}qA^\mu\phi \\ &= \mathcal{L}_F + q^2A^2|\phi|^2 + \mathrm{i}qA^\mu(\phi\partial_\mu\phi^* - \phi^*\partial_\mu\phi) \\ &= \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{int} \quad [+\mathcal{L}_{Maxwell}]\ . \end{aligned} \tag{52}$$

Die beiden Wechselwirkungsterme lassen sich durch folgende Feynman-Diagramme beschreiben:

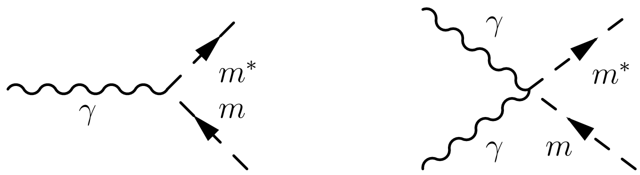

Abbildung 2: Feynman-Diagramm für die Wechselwirkung der skalaren QED

Für die skalare QED ergeben sich also zwei Arten der Wechselwirkung mit dem Photonfeld. Zum einen ein Analogon zur Paarvernichtung der QED und zum anderen ein Prozess, bei dem Teilchen und Antiteilchen vernichtet werden und zwei Photonen erzeugt werden. Die Kopplungskonstante dieser Wechselwirkungen ist durch die Ladung q bzw. die quadratische Ladung q^2 gegeben. Bisher wurden keine skalaren geladenen Teilchen gefunden, die dieser Art der Wechselwirkung unterliegen, daher ist dies ein rein technisches Beispiel.

5 Zusammenfassung

Unter Betrachtung der klassischen Elektrodynamik wurde der Begriff der Eichfreiheit oder Eichinvarianz erstmals eingeführt und erklärt. Die Maxwellgleichung liefern „von Natur aus“ die Freiheit mathematische Hilfsfelder zu transformieren, ohne die physikalischen Begebenheiten zu beeinflussen. Unter Hinzunahme der speziellen Relativitätstheorie und der Lorenz-Eichung konnte eine Ebenewellen-Gleichung als Bewegungsgleichung der eingeführten Felder gefunden werden.
Der Sprung in die nichtrelativistische Quantenmechanik liefert einen ersten Einblick in den Zusammenhang zwischen *lokaler* Eichinvarianz und Wechselwirkung. Nach Einführung der Quantenfeldtheorie und des Lagrange-Formalismus wird die Relevanz der verschiedenen Symmetrien noch deutlicher: Die *globale* $U(1)$-Eichinvarianz kann eindeutig mit der globalen Ladungserhaltung verknüpft werden. Der Übergang zur *lokalen* $U(1)$-Eichinvarianz fordert schlussendlich die Einführung eines Eichfeldes, das in der QED als Photonfeld identifiziert wird.
Der durch die *lokale* Symmetrie bedingte Übergang von freier zu wechselwirkender Quantenfeldtheorie ist somit ein fundamentaler Bestandteil des Eichprinzips für viele Quantenfeldtheorien.

Literatur

[1] (1) F. Schwabl:
Quantenmechanik für Fortgeschrittene
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 5. Auflage, 2008.

[2] (2) E. Rebhan:
Theoretische Physik:
Relativistische Quantenmechanik,
Quantenfeldtheorie und Elementarteilchentheorie
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1. Auflage, 2010.