Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder - Sommersemester 2010

Euklidisches Pfadintegral und erzeugende Funktionale

Sven Musberg

Münster, 5. Mai 2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Bei der Beschreibung quantenmechanischer Prozesse durch Pfadintegrale ist die Berechnung des Propagators von entscheidender Rolle. Die dabei auftretenden Integranden sind im Allgemeinen komplexwertige Exponentialfunktionen. Diese Art der Integrale sind mathematisch schwieriger zu handhaben. Durch eine analytische Fortsetzung der Zeit in der komplexen Ebene ist jedoch eine Transformation zu Euklidischen Pfadintegralen möglich, deren Integranden reellwertig sind.
Darüber hinaus sind in der Quantenmechanik und in Feldtheorien Erwartungswerte von großer Bedeutung; insbesondere Vakuum-Erwartungswerte und die S-Matrix bei der Behandlung von Streuprozessen. Es stellt sich deshalb die Frage, wie solche Erwartungswerte im Formalismus der Pfadintegrale berechnet werden können.

2 Euklidisches Pfadintegral

Die quantenmechanische Übergangsamplitude ein Teilchen zur Zeit t_a an einem Ort x_a und zu einem späteren Zeitpunkt t_e an einem Ort x_e zu messen, lässt sich durch den Propagator in Pfadintegraldarstellung im Heisenbergbild aus der Wirkung S des Systems berechnen:

$$\langle x_e, t_e | x_a, t_a \rangle = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \mathcal{D}x \tag{2.1}$$

Durch den komplexen Exponenten im Integranden ist dies im Allgemeinen mathematisch schwer kontrollierbar, insbesondere für Wege, die stark oszillieren. Dies lässt sich durch eine analytische Fortsetzung der Zeit mit Hilfe der sogenannten Wick-Rotation vermeiden. Dazu sei $t = e^{-i\alpha}\tau$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ für ein $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Dadurch wird die Zeitachse in der komplexen Ebene um den Winkel α gedreht:

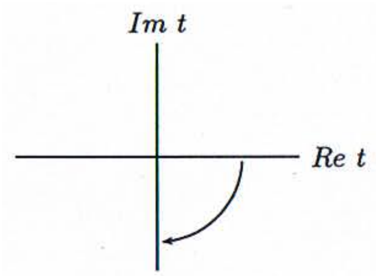

Abbildung 1: Wick-Rotation

A. Das: *Field Theory, A Path Integral Approach*, World Scientific, 1993

Speziell für die Euklidische Rotation mit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist $t = -i\tau$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ und damit rein imaginär. Dann wird das Minkowskische Skalarprodukt $(ct)^2 - \vec{x}^2 = -\left((c\tau)^2 + \vec{x}^2\right)$ zu einem negativen Euklidischen Skalarprodukt. Daher heißt τ auch Euklidische Zeit und t Minkowskische Zeit. Mit der Euklidischen Rotation gilt für den Zeitentwicklungsoperator:

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right) = \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{\hbar}\tau\right) \tag{2.2}$$

Für $\tau > 0$ ist dieser wohldefiniert, positiv und beschränkt. Damit folgt für den Propagator mit der

Transformation $\varepsilon = -i\varepsilon'$:

$$
\begin{aligned}
&\langle x_e, t_e | x_a, t_a \rangle \\
=&\langle x_e | \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}(t_e - t_a)\right) | x_a \rangle = \langle x_e | \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{\hbar}(\tau_e - \tau_a)\right) | x_a \rangle \\
=&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{m\hbar}{2\pi i\varepsilon'}\right)^{\frac{N}{2}} \int \cdots \int \exp\left(\frac{i}{\hbar}\varepsilon' \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon'}\right)^2 - \frac{V(x_k) + V(x_{k-1})}{2}\right]\right) \prod_{j=1}^{n-1} \mathrm{d}x_j \\
=&\lim_{n\to\infty} \left(\frac{m\hbar}{2\pi\varepsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \int \cdots \int \exp\left(-\frac{\varepsilon}{\hbar} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{V(x_k) + V(x_{k-1})}{2}\right]\right) \prod_{j=1}^{n-1} \mathrm{d}x_j
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Insbesondere für den Exponenten folgt:

$$
\lim_{n\to\infty} \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{\varepsilon}\right)^2 + \frac{V(x_k) + V(x_{k-1})}{2}\right] = \int \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2(\tau) + V(x(\tau))\right) \mathrm{d}\tau \tag{2.4}
$$

Dabei ist $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}$ die Ableitung nach der Euklidischen Zeit. In Analogie zur Darstellung des Propagators in der Minkowskischen Zeit lässt sich hier eine **Euklidische Wirkung** S_{E} definieren:

$$
S_{\mathrm{E}} \equiv \int \left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2(\tau) + V(x(\tau))\right) \mathrm{d}\tau \tag{2.5}
$$

Diese steht durch $S_{\mathrm{E}} = -iS|_{t=-i\tau}$ in Beziehung mit der ursprünglichen Wirkung. Damit gilt für dieses reelle Euklidische Pfadintegral:

$$
\langle x_e | \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{\hbar}\tau\right) | x_a \rangle = \int \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S_E[x]\right) \mathcal{D}x \tag{2.6}
$$

Dieses ist durch den gedämpften Exponenten besser handhabbar. Die Integranden sind besser kontrollierbar und oszillierende Wege werden unterdrückt. Ist die Zeitrichtung wie zum Beispiel bei Zerfallsprozessen von Bedeutung, ist nach der Berechnung von Übergangsamplituden durch das Euklidische Pfadintegral eine Rücktransformation notwendig. Dies lässt sich durch analytische Fortsetzung von τ in der komplexen Ebene mit $\tau = it$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erreichen.

3 Erzeugende Funktionale

Um Erwartungswerte im Pfadintegralformalismus zu berechnen sind mehrere Schritte nötig. Dazu werden zuerst zeitgeordnete Produkte berechnet und erzeugende Funktionale eingeführt, mit denen sich durch die Funktionalableitung dann allgemeine Erwartungswerte berechnen lassen. Die folgenden Rechnungen werden mit der Minkowskischen Zeit im Heisenberg-Bild durchgeführt.

3.1 Zeitgeordnete Produkte

Seien t_1 und t_2 Zeiten zwischen der Anfangszeit t_a und der Endzeit t_e eines Prozesses mit $t_a < t_1 < t_2 < t_e$. Es soll der Erwartungswert des Produkts der Ortsoperatoren $\mathcal{Q}(t_1)$ und $\mathcal{Q}(t_2)$ bestimmt werden. Dazu werden Vollständigkeitsrelationen bezüglich der Eigenzustände $|x_2, t_2\rangle$ und $|x_1, t_1\rangle$ eingefügt:

$$
\begin{aligned}
&\langle x_e, t_e | \mathcal{Q}(t_2)\mathcal{Q}(t_1) | x_a, t_a \rangle \\
=&\iint \langle x_e, t_e | \mathcal{Q}(t_2) | x_2, t_2 \rangle \langle x_2, t_2 | \mathcal{Q}(t_1) | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x_a, t_a \rangle \, \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Dabei ist $|x_j, t_j\rangle$ für $j = 1, 2$ ein Eigenzustand vom $\mathcal{Q}_j$ mit dem Eigenwert $x_j = x(t_j)$. Dann folgt in der Pfadintegraldarstellung:

$$\begin{aligned}
&\langle x_e, t_e|\mathcal{Q}(t_2)\mathcal{Q}(t_1)|x_a, t_a\rangle \\
=& \iint x_2 x_1 \langle x_e, t_e|x_2, t_2\rangle\langle x_2, t_2|x_1, t_1\rangle\langle x_1, t_1|x_a, t_a\rangle \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \\
=& \int x_2 x_1 \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \mathcal{D}x
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Analog gilt für $t_1 > t_2$:

$$\langle x_e, t_e|\mathcal{Q}(t_2)\mathcal{Q}(t_1)|x_a, t_a\rangle = \int x_1 x_2 \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \mathcal{D}x \tag{3.3}$$

$x_1 = x(t_1)$ und $x_2 = x(t_2)$ sind reellwertige Funktionen und kommutieren daher. Zusammengefasst gilt deshalb mit dem Zeitordnungsoperator T:

$$\langle x_e, t_e|T\left[\mathcal{Q}(t_1)\mathcal{Q}(t_1)\right]|x_a, t_a\rangle = \int x_1 x_2 \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \mathcal{D}x \tag{3.4}$$

Allgemein lässt sich damit auch ein zeitgeordnetes Produkt von n Ortsoperatoren $\mathcal{Q}(t_j)$ zu Zeiten t_j darstellen:

$$\langle x_e, t_e|T\left[\mathcal{Q}(t_1)\ldots\mathcal{Q}(t_n)\right]|x_a, t_a\rangle = \int x_1 \ldots x_n \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \mathcal{D}x \tag{3.5}$$

3.2 Erwartungswerte

Zur Darstellung eines Erwartungswerts im Pfadintegralformalismus wird zunächst die Übergangsamplitude des Systems bei einem Übergang von einem Zustand $|\psi_a\rangle$ in einen Zustand $|\psi_e\rangle$ betrachtet. Dazu werden Vollständigkeitsrelation bezüglich der Eigenzustände $|x_e, t_e\rangle$ und $|x_a, t_a\rangle$ eingefügt:

$$\begin{aligned}
\langle\psi_e|\psi_a\rangle &= N \iint \langle\psi_e|x_e, t_e\rangle\langle x_e, t_e|x_a, t_a\rangle\langle x_a, t_a|\psi_a\rangle \, \mathrm{d}x_e \, \mathrm{d}x_a \\
&= N \iint \psi_e^*(x_e, t_e)\psi_a(x_a, t_a) \left(\int \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \mathcal{D}x\right) \mathrm{d}x_e \, \mathrm{d}x_a
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Dabei sind $\psi_e(x_e, t_e) = \langle x_e, t_e|\psi_e\rangle$ und $\psi_a(x_a, t_a) = \langle x_a, t_a|\psi_a\rangle$ die Wellenfunktionen der Zustände $|\psi_e\rangle$ und $|\psi_a\rangle$ und N eine Normierungskonstante. Analog gilt mit (3.5) für ein zeitgeordnetes Produkt von n Ortsoperatoren $\mathcal{Q}(t_j)$ zu Zeiten t_j:

$$\begin{aligned}
&\langle\psi_e|T\left[\mathcal{Q}(t_1)\ldots\mathcal{Q}(t_n)\right]|\psi_a\rangle \\
=&N \iint \psi_e^*(x_e, t_e)\psi_a(x_a, t_a) \left(\int x_1 \ldots x_n \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[x]\right) \mathcal{D}x\right) \mathrm{d}x_e \, \mathrm{d}x_a
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Damit lassen sich nun Erwartungswerte dieses Produkts im Zustand $|\psi_a\rangle$ berechnen:

$$\langle T\left[\mathcal{Q}(t_1)\ldots\mathcal{Q}(t_n)\right]\rangle_{\psi_a} = \frac{\langle\psi_a|T\left[\mathcal{Q}(t_1)\ldots\mathcal{Q}(t_n)\right]|\psi_a\rangle}{\langle\psi_a|\psi_a\rangle} \tag{3.8}$$

3.3 Erzeugende Funktionale

Ist $S[x]$ die Wirkung des Systems, so wird die modifizierte Wirkung $S[x, J]$ definiert durch:

$$S[x, J] \equiv S[x] + \int_{t_a}^{t_e} J(t)x(t) \, \mathrm{d}t \tag{3.9}$$

Dabei ist $J(t)$ eine äußere Quelle. Speziell für $J = 0$ ergibt sich die ursprüngliche Wirkung $S[x,0] = S[x]$. Mit der modifizierten Wirkung lässt sich auch ein modifiziertes Skalarprodukt $\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J$ definieren. Für dieses folgt mit dem Erwartungswert zeitgeordneter Produkte von Ortsoperatoren (3.5) und $\exp(\frac{i}{\hbar}S[x,J]) = \exp(\frac{i}{\hbar}S[x])\exp(\frac{i}{\hbar}\int J(t)x(t)\,\mathrm{d}t)$:

$$\begin{aligned}\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J &\equiv N\iint \psi_a^*(x_e,t_e)\psi_a(x_a,t_a)\left(\int \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right)\mathcal{D}x\right)\mathrm{d}x_e\,\mathrm{d}x_a\\ &= \langle\psi_a|T\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int J(t)\mathcal{Q}(t)\,\mathrm{d}t\right)|\psi_a\rangle \end{aligned}\tag{3.10}$$

Speziell für $J = 0$ gilt $\langle\psi_a|\psi_a\rangle_{J=0} = \langle\psi_a|\psi_a\rangle$. Im Folgenden kann gezeigt werden, dass durch die Funktionalableitungen des modifizierten Skalarprodukts an der Stelle $J = 0$ die gesuchten Erwartungswerte erzeugt werden.

3.4 Funktionalableitung

Ist F ein Funktional in Abhängigkeit von Funktionen $f(x)$, so kann die Ableitung an der Stelle $f(y)$ definiert werden durch:

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F[f(x)+\varepsilon\delta(x-y)] - F[f(x)]}{\varepsilon}\tag{3.11}$$

Es soll die Funktionalableitung des modifizierten Skalarprodukts $\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J$ bestimmt werden. Dazu wird zuerst die Funktionalableitung der Größe $\exp(\frac{i}{\hbar}S[x,J])$ bestimmt. Nach Definition der Funktionalableitung und der modifizierten Wirkung (3.9) gilt:

$$\begin{aligned}&\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(S[x] + \int (J(t)+\varepsilon\delta(t-t_1))x(t)\,\mathrm{d}t\right)\right) - \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right)\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(S[x,J]+\varepsilon x(t_1)\right)\right) - \exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right)\right)\end{aligned}\tag{3.12}$$

Dieser Grenzwert ist aus der Analysis bekannt:

$$\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right) = \frac{i}{\hbar}x(t_1)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right)\tag{3.13}$$

Damit ergibt sich mit (3.10) die Funktionalableitung des modifizierten Skalarprodukts $\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J$ nach der äußeren Quelle $J(t)$ an der Stelle $J(t_1)$ für eine beliebige Zeit t_1:

$$\begin{aligned}&\frac{\delta}{\delta J(t_1)}\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J\\ &\qquad= N\iint \psi_a^*(x_e,t_e)\psi_a(x_a,t_a)\left(\int \frac{\delta}{\delta J(t_1)}\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right)\mathcal{D}x\right)\mathrm{d}x_e\,\mathrm{d}x_a\\ &\qquad= N\iint \psi_a^*(x_e,t_e)\psi_a(x_a,t_a)\left(\int \frac{i}{\hbar}x(t_1)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S[x,J]\right)\mathcal{D}x\right)\mathrm{d}x_e\,\mathrm{d}x_a\\ &\qquad= \frac{i}{\hbar}\langle\psi_a|\mathcal{Q}(t_1)|\psi_a\rangle_J\end{aligned}\tag{3.14}$$

Analog gilt nach (3.7) für höhere Funktionalableitungen:

$$\frac{\delta^n\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J}{\delta J(t_1)\ldots\delta J(t_n)} = \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n\langle\psi_a|T[\mathcal{Q}(t_1)\ldots\mathcal{Q}(t_n)]|\psi_a\rangle_J\tag{3.15}$$

Dann folgt:

$$\langle\psi_a|T[\mathcal{Q}(t_1)\ldots\mathcal{Q}(t_n)]|\psi_a\rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n\left.\frac{\delta^n\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J}{\delta J(t_1)\ldots\delta J(t_n)}\right|_{J=0}\tag{3.16}$$

Daraus lässt sich der Erwartungswert (3.8) des zeitgeordneten Produkts von n Ortsoperatoren im Zustand $|\psi_a\rangle$ durch die Funktionalableitung des modifizierten Skalarprodukts $\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J$ nach $J(t_1)$ bis $J(t_n)$ an der Stelle $J=0$ bestimmen:

$$\langle T[\mathcal{Q}(t_1)\dots\mathcal{Q}(t_n)]\rangle_{\psi_a} = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{1}{\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J} \frac{\delta^n\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J}{\delta J(t_1)\dots\delta J(t_n)}\bigg|_{J=0} \tag{3.17}$$

Weiterhin gilt nach (3.10) mit der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned}\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J &= \langle\psi_a|T\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int J(t)\mathcal{Q}(t)\,\mathrm{d}t\right)|\psi_a\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\cdots\int\langle\psi_a|T\left[\mathcal{Q}(t_1)\dots\mathcal{Q}(t_n)\right]|\psi_a\rangle(J(t_1)\dots J(t_n))\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n \\ &= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\cdots\int\frac{\delta^n\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J}{\delta J(t_1)\dots\delta J(t_n)}\bigg|_{J=0}(J(t_1)\dots J(t_n))\,\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n\end{aligned} \tag{3.18}$$

Das modifizierte Skalarprodukt lässt sich daher nach den Funktionalableitungen an der Stelle $J=0$ entwickeln und heißt deshalb **erzeugendes Funktional**. Diese Darstellung eignet sich unter anderem zu Berechnungen in der Störungstheorie.

3.5 Greensche Funktionen

Die Greensche Funktion ist der Vakuum-Erwartungswert des zeitgeordneten Produkts von Ortsoperatoren:

$$G^{(n)}(t_1,\dots,t_n) = \langle 0|T\left[\mathcal{Q}_1\dots\mathcal{Q}_n\right]|0\rangle \tag{3.19}$$

Dabei ist $|0\rangle$ der normierte Grundzustand des Vakuums. Die Größe $\mathcal{Z}[J]$ sei in Abhängigkeit einer äußeren Quelle J definiert durch das modifizierte Skalarprodukt (3.10):

$$\mathcal{Z}[J] \equiv \langle 0|0\rangle_J = \langle 0|T\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int J(t)\mathcal{Q}(t)\,\mathrm{d}t\right)|0\rangle \tag{3.20}$$

Da der Grundzustand normiert ist, gilt $\mathcal{Z}(0) = \langle 0|0\rangle = 1$. Die Greensche Funktion lässt sich durch eine Rechung in der Basis der Energie-Eigenzustände bestimmen. Dazu muss angenommen werden, dass der Grundzustand für große Zeiten dominiert. Dann ergibt sich analog zu (3.17) folgende Darstellung der Greenschen Funktion:

$$G^{(n)}(t_1,\dots,t_n) = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta\mathcal{Z}^n[J]}{\delta J(t_1)\dots\delta J(t_n)}\bigg|_{J=0} \tag{3.21}$$

Daher ist $\mathcal{Z}[J]$ das erzeugende Funktional der Greenschen Funktion. Ergänzend ergibt sich für die Greensche Funktion im Euklidischen mit $t_j = -i\tau_j$:

$$\begin{aligned}G_{\mathrm{E}}(\tau_1,\dots,\tau_n) &= \langle 0|T\left[\mathcal{Q}(\tau_1)\dots\mathcal{Q}(\tau_n)\right]|0\rangle \\ &= \hbar^n\frac{\delta^n\mathcal{Z}_{\mathrm{E}}[J]}{\delta J(\tau_1)\dots\delta J(\tau_n)}\bigg|_{J=0}\end{aligned} \tag{3.22}$$

Dabei ist das erzeugende Funktional $\mathcal{Z}_{\mathrm{E}}[J]$ nach (3.10) gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{\mathrm{E}}[J] &= \langle 0|T\exp\left(\int J(\tau)\mathcal{Q}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)|0\rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}_{\mathrm{E}}[0]}\int\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left(S_{\mathrm{E}}[x]+\int J(\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\right)\mathcal{D}x\end{aligned} \tag{3.23}$$

4 Zusammenfassung

Im Pfadintegralformalismus treten im Allgemeinen Integrale auf, die aufgrund der komplexwertigen Integranden schwer zu handhaben sind. Mithilfe der Wick-Rotation und speziell der Euklidischen Rotation $t = -i\tau$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ ist es möglich, die Integranden durch analytische Fortsetzung in reellwertige Funktionen zu transformieren. Das reelle Euklidische Pfadintegral ist dann mit der Euklidischen Wirkung $S_{\mathrm{E}}[x]$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} \langle x_e| \exp\left(-\frac{\mathcal{H}}{\hbar}\tau\right)|x_a\rangle &= \int \exp\left(-\frac{1}{\hbar}S_{\mathrm{E}}[x]\right)\mathcal{D}x \\ \text{mit}\quad S_{\mathrm{E}}[x] &= \int\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2(\tau) + V(x(\tau))\right)\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Weiterhin ist es möglich, durch die Einführung einer äußeren Quelle $J(t)$ die Erwartungswerte eines zeitgeordneten Produkts von Ortsoperatoren in einem beliebigen Zustand $|\psi_a\rangle$ durch Funktionalableitungen zu berechnen:

$$\begin{aligned} \langle T[\mathcal{Q}(t_1)\dots\mathcal{Q}(t_n)]\rangle_{\psi_a} &= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{1}{\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J}\frac{\delta^n\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J}{\delta J(t_1)\dots\delta J(t_n)}\Big|_{J=0} \\ \text{mit}\quad \langle\psi_a|\psi_a\rangle_J &= \langle\psi_a|T\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int J(t)\mathcal{Q}(t)\,\mathrm{d}t\right)|\psi_a\rangle \end{aligned}$$

Ist das erzeugende Funktional $\langle\psi_a|\psi_a\rangle_J$ bekannt, so ist die Berechnung der Erwartungswerte möglich. Insbesondere die Greensche Funktion lässt sich auf diese Weise darstellen:

$$\begin{aligned} G^{(n)}(t_1,\dots,t_n) &= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{\delta\mathcal{Z}^n[J]}{\delta J(t_1)\dots\delta J(t_n)}\Big|_{J=0} \\ \text{mit}\quad \mathcal{Z}[J] &= \langle 0|T\exp\left(\frac{i}{\hbar}\int J(t)\mathcal{Q}(t)\,\mathrm{d}t\right)|0\rangle \end{aligned}$$

Literatur

[1] A. Das: *Field Theory, A Path Integral Approach*, World Scientific, 1993

[2] G. Münster: *Quantentheorie*, de Gruyter, 2006