Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Legendre-Transformation und effektive Wirkung

Michael Topp

14.07.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Mit Hilfe einer Legendre-Transformation lässt sich aus dem erzeugenden Funktional für zusammenhängende Feynmandiagramme W, das Funktional „effektive Wirkung“ Γ erhalten. Man nutzt das darin enthaltene effektive Potential, um auf einfache Weise spontane Symmetriebrechungen feststellen zu können, wofür allerdings eine Schleifenentwicklung dieses Potentials nötig ist, die einem Korrekturen zum „einfachen“ quantenfeldtheoretischen Potential liefert. Zur Verdeutlichung dieser Sachverhalte wird hier nur stets die ϕ^4-Theorie verwendet.

2 Spontan gebrochene Symmetrien

Ausgangspunkt für alle weiteren Betrachtungen ist die Lagrangedichte der ϕ^4-Theorie:

$$\mathcal{L}\left(\phi, \partial_\mu \phi\right) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi(x)^4. \tag{1}$$

Man erkennt hier leicht die vorhandene diskrete Vorzeichenwechselsymmetrie $\phi \to -\phi$. Ersetzt man in (1) nun aber m^2 durch $-\mu^2$ und betrachtet das resultierende Potential, so stellt man fest, dass

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{2}$$

für konstantes ϕ zwei Minima bei $\phi_0 := \pm v = \pm\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu$ aufweist. Entwickelt man um eines der Minima (hier bei $+v$) gemäß $\phi(x) = v + \sigma(x)$, findet man die in (1) vorhandene VZW-Symmetrie nicht mehr:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \sigma\right) - \frac{1}{2}\left(2\mu^2\right)\sigma^2 - \sqrt{\frac{6}{\lambda}}\mu\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\sigma^4, \tag{3}$$

wobei hier der konstante Term weggelassen wurde und der lineare Term wegen des Minimums entfällt.

3 Klassisches Feld

3.1 Euler-Lagrange-Gleichung und zusammenhängende Diagramme

Im Folgenden wird die Lagrangedichte aus (1) mit einem zusätzlichen „äußeren Quellterm“ $+J(x)\phi(x)$ betrachtet. Dann sind die erzeugenden Funktionale $Z[J]$ und $W[J]$ durch

$$Z[J] = e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = N\int \mathcal{D}\phi\; e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi,J]} = \langle 0|0\rangle^J \tag{4}$$

gegeben (also $W[J] = -i\hbar \ln Z[J]$). Das hochgestellte J deutet nun immer an, dass eine äußere Quelle $J(x)$ berücksichtigt wird. Aus dem Hamiltonschen Prinzip (Verschwinden der Variation der Wirkung S) erhält man äquivalent die Euler-Lagrange-Gleichung durch eine Funktionalableitung

$$-\frac{\delta S[\phi,J]}{\delta\phi} = \partial_\mu\partial^\mu\phi + m^2\phi + \frac{\lambda}{3!}\phi^3 - J(x) = F(\phi(x)) - J(x) = 0. \tag{5}$$

Darin soll F eine funktionale Form von ϕ (und auch dessen Ableitungen) bedeuten. Wichtig ist für die weiteren Betrachtungen die Struktur dieser Gleichung.
Um aber zu verstehen, dass $W[J]$ zusammenhängende Diagramme erzeugt, berechnet man zunächst die 1-Punkt-Funktion für die ϕ^4-Theorie:

$$\left.\frac{\delta W[J]}{\delta J(x_1)}\right|_{J=0} = -\frac{i\hbar}{Z[J]}\left.\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)}\right|_{J=0} = \langle 0|\phi(x_1)|0\rangle = 0. \tag{6}$$

Dass dieser Wert zumindest generell eine Konstante sein muss, erkennt man daran, wenn man Poincarèinvarianz für den Grundzustand fordert ($e^{-\frac{i}{\hbar}P\cdot a}|0\rangle = |0\rangle$) und sich daran erinnert, dass der Impulsoperator der Generator von Translationen ist, da dann

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \langle 0|e^{\frac{i}{\hbar}P\cdot x}\phi(0)e^{-\frac{i}{\hbar}P\cdot x}|0\rangle = \langle 0|\phi(0)|0\rangle = const. \tag{7}$$

Entsprechend findet man durch Bilden höherer Ableitungen die 2-Punkt-Funktion usw. Für diese ergibt sich

$$\begin{aligned} -i\hbar \left.\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)}\right|_{J=0} &= (-i\hbar)^2 \left[\frac{1}{Z[J]}\frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} - \frac{1}{Z^2[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_2)}\right]\Bigg|_{J=0} \\ = \langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2))|0\rangle &- \langle 0|\phi(x_1)|0\rangle\,\langle 0|\phi(x_2)|0\rangle = \langle 0|T(\phi(x_1))\phi(x_2)|0\rangle_c, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei der Index c hier für „connected" steht. Bisher findet sich noch kein Unterschied zur Berechnung von Funktionalableitungen ausgehend von $W[J]$ und $Z[J]$, aber ab der 4. Ableitung wird dies deutlich, da sich dann

$$\begin{aligned} &\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4))|0\rangle_c \\ =\; &\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4))|0\rangle \\ -\; &\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle\langle 0|T(\phi(x_3)\phi(x_4)|0\rangle \\ -\; &\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_3)|0\rangle\langle 0|T(\phi(x_2)\phi(x_4)|0\rangle \\ -\; &\langle 0|T(\phi(x_1)\phi(x_4)|0\rangle\langle 0|T(\phi(x_2)\phi(x_3)|0\rangle \end{aligned} \tag{9}$$

ergibt, was diagrammatisch bedeutet, dass alle Permutationen von 2 „getrennten" Propagatoren für 4 Raumzeitpunkte x_i (also keine Wechselwirkung) für zusammenhängende Diagramme wegfallen.

3.2 Klassisches Feld

Mit einer eingeschalteten äußeren Quelle wird der Vakuumerwartungswert

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{(-i\hbar)}{Z[J]}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \langle 0|\phi(x)|0\rangle^J = \phi_c(x) \tag{10}$$

klassisches Feld genannt. Für den Fall $J \to 0$ folgt schon aus Stetigkeitsgründen, dass $\phi(x)_c \to \phi_c = const.$, aber diese Konstante muss nicht 0 sein, da die Bildung des Limes $J \to 0$ und die Berechnung des Erwartungswerts nicht kommutieren. Um den Grund für die Bezeichnung klassisches Feld zu verstehen und um eine wichtige Gleichung herleiten zu können, ist folgende Zwischenüberlegung nötig.

Da $Z[J]$ nicht von $\phi(x)$ abhängig ist, muss bei infinitesimaler Änderung von $\phi(x)$ $Z[J]$ invariant bleiben oder anders ausgedrückt

$$\begin{aligned} \delta Z[J] &= N\int \mathcal{D}\phi\, \frac{i}{\hbar}\delta S[\phi,J]e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi,J]} \\ &= \frac{iN}{\hbar}\int \mathcal{D}\phi\, \left(\int d^4x\,\delta\phi(x)\frac{\delta S[\phi,J]}{\delta\phi(x)}\right) e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi,J]} = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Da dies aber für jede infinitesimale Änderung von $\phi(x)$ gültig sein muss, ließt man direkt

$$N\int \mathcal{D}\phi\, \frac{\delta S[\phi,J]}{\delta\phi(x)}e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi,J]} = -N\int \mathcal{D}\phi\, \left(F(\phi(x)) - J(x)\right) e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi,J]} = 0 \tag{12}$$

ab. Nutzt man die bekannte Gleichung $-i\hbar\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = N\int \mathcal{D}\phi\ \phi(x)e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi,J]}$, um daraus die Identifikation $\phi(x) \to -i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}$ abzulesen, ergibt sich aus (12)

$$\begin{aligned}
N\int \mathcal{D}\phi\ \left(F(\phi(x)) - J(x)\right) e^{\frac{i}{\hbar}S[\phi,J]} &= 0 \\
\left[F\left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) - J(x)\right] Z[J] &= 0 \\
e^{-\frac{i}{\hbar}W[J]}\left[F\left(-i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) - J(x)\right] e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} &= 0 \\
F\left(\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} - i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) - J(x) &= 0 \\
F\left(\phi_c(x) - i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) - J(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Dabei wurde in der 3. Zeile der Faktor $e^{-\frac{i}{\hbar}W[J]}$ zusätzlich eingefügt, der aber die Gleichung in der 2. Zeile nicht beeinflusst. Betrachtet man das Endergebnis für $\hbar \to 0$, so findet man die selbe funktionale Form wie bei der Euler-Lagrange-Gleichung ohne äußere Quelle, was die Bezeichnung „klassisches Feld" motiviert.

3.3 Master-Equation

Ersetzt man nun in (3) $\phi(x)$ durch $\phi_c(x) - i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}$, findet man

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\left(\phi_c(x) - i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) + \frac{\lambda}{3!}\left(\phi_c(x) - i\hbar\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)^3 - J(x) = 0. \tag{14}$$

Hier muss berücksichtigt werden, dass die Funktionalableitung noch auf etwas wirken kann, weshalb man nach Ausmultiplizieren nur die Terme übernimmt, bei denen am Ende keine Funktionalableitung nach $J(x)$ steht. Unter Beachtung der Produktregel ergibt sich schließlich

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi_c(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi_c^3(x) - J(x) - \frac{i\lambda\hbar}{2!}\phi_c(x)\frac{\delta\phi_c(x)}{\delta J(x)} - \frac{\lambda\hbar^2}{3!}\frac{\delta^2\phi_c(x)}{\delta J(x)\delta J(x)} = 0. \tag{15}$$

Im Fall $\hbar \to 0$ gibt es dann ein iteratives Lösungsverfahren:

$$\begin{aligned}
\phi_c(x) &= -\int d^4x'\ G_F(x-x')\left(J(x') - \frac{\lambda}{3!}\phi_c^3(x')\right) \\
&= -\int d^4x'\ G_F(x-x')J(x') + \frac{\lambda}{3!}\int d^4x'\ G_F(x-x')\phi_c^3(x') \\
&\approx -\int d^4x'\ G_F(x-x')J(x') - \frac{\lambda}{3!}\int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \\
&\times\ G_F(x-x_1)G_F(x_1-x_2)G_F(x_1-x_3)G_F(x_1-x_4)J(x_2)J(x_3)J(x_4)
\end{aligned} \tag{16}$$

Durch Einsetzen der Definition $\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}$ in (15) folgt die Master-Equation (eigentlich Dyson-Schwinger-Gleichungen)

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} + \frac{\lambda}{3!}\left(\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\right)^3 - J(x) - \frac{i\lambda\hbar}{2!}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J^2(x)} - \frac{\lambda\hbar^2}{3!}\frac{\delta^3 W[J]}{\delta J^3(x)} = 0. \tag{17}$$

Allerdings wird nun für weitere Berechnungen die Master-Equation in der Form (15) verwendet.

4 Legendre-Transformation

4.1 Effektive Wirkung

Vom erzeugenden Funktional für zusammenhängende Diagramme kommt man über die Legendre-Transformation

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi_c(x) \Rightarrow \Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x) \tag{18}$$

zu dem Funktional „effektive Wirkung“ $\Gamma[\phi_c]$. Der Grund für diese Bezeichnung wird im Folgenden noch klar. Man kann leicht überprüfen, dass $J(x)$ und $\phi_c(x)$ zueinander konjugierte Variablen sind:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta\phi_c(x)} - \int d^4y\, \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)}\phi_c(y) - J(x) \\ &= \int d^4y\, \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)} - \int d^4y\, \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} - J(x) = -J(x).\end{aligned} \tag{19}$$

Berücksichtigt man nun, dass man für die ϕ^4-Theorie ohne äußere Quelle die Euler-Lagrange-Gleichung

$$-\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} = \left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi^3(x) = F(\phi(x)) \tag{20}$$

erhalten kann und dass $F(\phi(x)) - J(x) = 0$ gilt, so findet man folgende Analogie zwischen „normaler“ Wirkung und effektiver Wirkung:

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x)} = -J(x) \qquad \text{und} \tag{21}$$

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = -J(x), \tag{22}$$

woher der Name effektive Wirkung rührt. Für $J \to 0$ gilt bekanntlich $\phi_c(x) \to \phi_c$, weshalb sich dann aus (22)

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)}\right|_{\phi_c} = 0 \tag{23}$$

ergibt. Diese Gleichung soll aber nun noch weiter Vereinfacht werden. Dazu macht man zunächst folgenden Ansatz (da Γ wegen der äußeren Quelle Quantenkorrekturen gegenüber der normalen Wirkung enthält):

$$\begin{aligned}S[\phi] &= \int d^4x\, \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) \\ \Gamma[\phi_c] &= \int d^4x\, \left(\frac{1}{2}A(\phi_c(x))\partial_\mu\phi_c(x)\partial^\mu\phi_c(x) - V_{eff}(\phi_c(x)) + ...\right)\end{aligned} \tag{24}$$

Die funktionale Form A enthält offenbar eine führende 1 und dann, wie noch ersichtlich werden wird, Terme in verschiedenen Ordnungen von $\hbar$ als Quantenkorrekturen. V_{eff} bezeichnet das effektive Potential.

4.2 Effektives Potential

Dieses effektive Potential soll nun weiter untersucht werden. Dazu betrachtet man wieder den Fall $J \to 0$. Dann vereinfacht sich (24), da die Ableitungen, die dann nur noch auf eine Konstante wirken, verschwinden und da das Potential dann nur noch von einer Konstanten abhängt, so dass darüber nicht mehr integriert werden muss, weshalb man

$$\Gamma[\phi_c] = -\int d^4x\, V_{eff}(\phi_c) = -V_{eff}(\phi_c)\int d^4x \tag{25}$$

findet. Darin bezeichnet $\int d^4x = (2\pi)^4\delta^4(0)$ das Raum-Zeit-Volumen.

Gleichung (23) lässt sich mit der gefundenen Vereinfachung daher nun als

$$\left.\frac{\partial V_{eff}(\phi_c)}{\partial \phi_c}\right|_{\phi_c=\langle\phi\rangle} = 0 \tag{26}$$

schreiben. Diese Gleichung ist eigentlich die zentrale Gleichung, da sie es erlaubt spontane Symmetriebrechungen zu finden. Man erkennt nun auch die Analogie zum 1. Kapitel, da dort auch Minima des Potentials für den Fall eines konstanten Feldes gesucht wurden (vgl. (1) und (2)). Findet man also Werte von $\phi_c \neq 0$, die (26) erfüllen, hat man Stellen vorliegen, an denen spontane Symmetriebrechung herrscht.

Die Wichtigkeit des effektiven Potentials ergibt sich aber nicht nur aus der gerade erwähnten Tatsache, viel mehr ist es auch noch möglich die renormierte Masse und die renormierte Kopplungskonstante durch weitere Ableitungen zu erhalten (bzw. sie dadurch festzulegen). Dies soll aber nicht weiter vertieft werden, weshalb hier nur die entsprechenden Gleichungen angegeben sind:

$$\left.\frac{\partial^2 V_{eff}(\phi_c)}{\partial \phi_c^2}\right|_{\phi_c=\langle\phi\rangle} = m_R^2 \qquad \text{und} \tag{27}$$

$$\left.\frac{\partial^4 V_{eff}(\phi_c)}{\partial \phi_c^4}\right|_{\phi_c=\langle\phi\rangle} = \lambda_R. \tag{28}$$

5 Berechnung des effektiven Potentials bis 1. Ordnung in Schleifenentwicklung

Gleichung (26) ließ das Problem einfach erscheinen, da dies leicht hergeleitet wurde. Das wahre Problem besteht aber nun darin, das effektive Potential zu berechnen.

Ausgangspunkt bilden nun Betrachtungen im Impulsraum, so dass die Feynmanregeln für den Impulsraum verwendet werden müssen. Wichtig ist aber noch zu wissen, dass die effektive Wirkung im Impulsraum Diagramme ohne äußere Beine/Propagatoren liefert, also so genannte 1-Teilchen-irreduzible (1PI) Diagramme. (Dies wurde hier aus Gründen des Umfangs nicht diskutiert.) Außerdem ist wichtig, dass die relevante Größe, die man betrachtet

$$\frac{1}{\hbar}\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right) \tag{29}$$

ist, wie man bereits an (4) ablesen kann. Da der Wechselwirkungsterm für einen Vertex verantwortlich ist, sieht man, dass jeder Vertex einen Faktor $\frac{1}{\hbar}$ liefert. Die freie Lagrangedichte liefert als Differentialoperator angewandt auf die zugehörige Green'sche-Funktion eine Deltafunktion, so dass man die Green'sche Funktion und damit einen Propagator als „Inverses“ des Differentialoperator auffassen kann, weshalb jeder Propagator einen Faktor $\hbar$ liefern muss. Man kann sich an Hand der Feynmanregeln im Impulsraum und der gerade gemachten Überlegungen leicht klarmachen, dass der Zusammenhang

$$L = I - (V - 1) = I - V + 1 = P + 1 \tag{30}$$

gelten muss, wobei L die Anzahl der Schleifen, P die von $\hbar$ auftretende Potenz, V die Anzahl der Vertices und I die Anzahl innerer Linien/Propagatoren bedeutet. Das heißt also, dass eine Entwicklung nach Schleifen gleichbedeutend mit einer Entwicklung in der Ordnung von $\hbar$ ist.

Jedem 1PI-Diagramm lässt sich also ein P zuordnen, so dass etwa keine auftretenden Schleifen $\frac{1}{\hbar}$ bedeuten, ein 1PI-Diagramm mit einer Schleife kein $\hbar$ enthält usw. Ein Vorteil dieser Entwicklung ist zudem, dass $\frac{1}{\hbar}$ vor $\mathcal{L}$ steht, so dass die Entwicklung die ganze Lagrangedichte betrifft und nicht wie im Fall einer Entwicklung nach der Kopplungskonstanten nur den Wechselwirkungsanteil, was wichtig ist, da $\phi_c = \phi_c(\lambda)$, wie man noch sehen wird. Es ist hier auch deshalb nicht weiter dramatisch, sollte der Wert von λ variieren, zumal in SI-Einheiten $\hbar \ll 1$.

Ersetzt man in (15) definitionsgemäß (22) ein und verwendet (10), so erhält man bis zur ersten Ordnung in $\hbar$

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi_c(x) + \frac{\lambda}{3!}\phi_c^3(x) - \frac{i\lambda\hbar}{2!}\phi_c(x)\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J^2(x)} = -\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)}. \tag{31}$$

Wichtig ist, den Faktor $\frac{1}{\hbar}$ vor $\mathcal{L}$ zu berücksichtigen, was letztlich bis zur Ordnung $\hbar^0$ führt und wegen (30) damit gleichbedeutend zu einer 1-Schleifen-Entwicklung ist, die hier betrachtet werden soll.
Nutzt man wegen (8) außerdem $\frac{\delta\phi_c(x)}{\delta J(y)} = \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} = -G(x-y,\phi_c)$ (die Tatsache, dass hier die Abhängigkeit von ϕ_c angegeben ist, wird gleich deutlich), so ergibt sich unter Verwendung von (20) mit $\phi_c(x)$ statt $\phi(x)$

$$-\frac{\delta S[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} + \frac{i\lambda\hbar}{2}\phi_c(x)G(x-x,\phi_c) = -\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)}. \tag{32}$$

Da die effektive Wirkung Quantenkorrekturen in höheren Ordnungen von $\hbar$ enthält, muss $\Gamma[\phi_c] = S[\phi_c] + \hbar S_1[\phi_c] + \mathcal{O}(\hbar^2)$ gelten, was eingesetzt in (32) zu

$$\frac{\delta S_1[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = -\frac{i\lambda}{2}\phi_c(x)G(0,\phi_c) \qquad \text{mit} \tag{33}$$

$$S_1[\phi_c] = \int d^4x\,(-V_1(\phi_c(x)) + ...) \tag{34}$$

führt. Darin stammt $V_1(\phi_c(x))$ aus $V_{eff} = V + \hbar V_1 + \mathcal{O}(\hbar^2)$. Betrachtet man nun wieder $J \to 0$, so folgt

$$\left.\frac{\delta S_1[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)}\right|_{\phi_c} = -\frac{\partial V_1}{\partial\phi_c} = -\frac{i\lambda}{2}\phi_c G(0,\phi_c) \qquad \text{bzw.} \tag{35}$$

$$V_1(\phi_c) = \frac{i\lambda}{2}\int_0^{\phi_c} d\phi\prime_c\;\phi\prime_c G(0,\phi\prime_c), \tag{36}$$

wobei hier immer eine verschwindende Integrationskonstante angenommen wird. Um dieses Integral zu lösen, müssen nun einige Überlegungen angestellt werden, um $G(0,\phi_c)$ zu bestimmen.
Wendet man auf (22) eine weitere Funktionalableitung an, erhält man

$$\frac{\delta}{\delta J(y)}\left(\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)}\right) = -\delta^4(x-y). \tag{37}$$

Die darin auftretende Ableitung wird zu

$$\frac{\delta}{\delta J(y)} = \int d^4z\,\frac{\delta\phi_c(z)}{\delta J(y)}\frac{\delta}{\delta\phi_c(z)} = \int d^4y\,\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y)\delta J(z)}\frac{\delta}{\delta\phi_c(z)} \tag{38}$$

umgeschrieben, so dass aus (37)

$$\int d^4z\,\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y)\delta J(z)}\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(z)\delta\phi_c(x)} = -\delta^4(x-y) \tag{39}$$

wird. Der Faktor $\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(y)\delta J(z)}$ entspricht $G(z-y,\phi_c)$ und der Faktor $\frac{\delta^2\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(z)\delta\phi_c(x)}$ lässt sich nach einer weiteren Überlegung umformen. Wendet man auf (32) die Funktionalableitung $\frac{\delta}{\delta\phi_c(z)}$ an und betrachtet $J \to 0$, so dass $\phi_c(x) \to \phi_c$, findet man für (39) den Ausdruck

$$-\int d^4z\,\left.\frac{\delta^2 S[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)\delta\phi_c(z)}\right|_{\phi_c} G(z-y,\phi_c) = -\delta^4(x-y) \tag{40}$$

$$\Rightarrow \int d^4z\left[(\partial_\mu\partial^\mu + m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_c^2)\delta^4(x-z)\right]G(z-y,\phi_c) = -\delta^4(x-y). \tag{41}$$

Mit der Definition der effektiven Masse $m_{eff}^2 = m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_c^2$ wird daraus

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + m_{eff}^2\right)G(x-y,\phi_c) = -\delta^4(x-y). \tag{42}$$

Nun lässt sich die Green'sche Funktion ganz analog zum Fall mit der „normalen“ Masse berechnen, wobei man diese nur durch die effektive Masse ersetzt (Fouriertransformation, Darstellung der Delta-Funktion usw.). Der Grund, warum für G die Abhängigkeit ϕ_c angegeben wurde, ist nun auch klar - das klassische Feld ist in der effektiven Masse enthalten. Es ergibt sich also

$$G(x-y,\phi_c)=\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m_{eff}^2}e^{-ik\cdot(x-y)}. \tag{43}$$

Mit $G(0,\phi_c)$ hat man für (36) schließlich folgende Gleichung zu lösen:

$$V_1(\phi_c)=\frac{i\lambda}{2}\int\limits_0^{\phi_c}d\phi\prime_c\,\phi\prime_c\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2-\frac{\lambda}{2}\phi\prime_c^2}. \tag{44}$$

Dabei geht man wie folgt vor:

1. Vertauschen der Integrationsreihenfolge,
2. Wick-Rotation, um im Euklidischen zu rechnen,
3. Übergang zu Polarkoordinaten, Integration über Winkelteil,
4. Substitution $x=k_E^2$.

(E steht für euklisch.) Danach findet man das Zwischenergebnis

$$V_1(\phi_c)=\frac{1}{32\pi^2}\int\limits_0^{\infty}dx\,x\left(\ln\left(x+m_{eff}^2\right)-\ln\left(x+m^2\right)\right). \tag{45}$$

Dieses Integral ist offenbar divergent, weshalb eine Renormierung nötig ist. Zunächst kann man zwecks Vermeidung der UV-Divergenz einen Cut-Off Λ^2 und eine beliebige Massenskala μ einführen. Nach einigen Rechenschritten erhält man dann aus (45) das effektive Potential bis zur 1. Ordnung der Schleifenentwicklung als

$$\begin{aligned}V_{eff}^{(1)}=V+\hbar V_1 \quad &= \quad V+\frac{\hbar}{32\pi^2}\left[\frac{\lambda}{2}\phi_c^2\Lambda^2-\frac{\lambda}{4}\phi_c^2\left(2m^2+\frac{\lambda}{2}\phi_c^2\right)\right.\\ &\quad \ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}-\frac{m^4}{2}\left(\ln\frac{m^2}{\mu^2}-\frac{1}{2}\right)\\ &\quad \left.+\frac{1}{2}\left(m^2+\frac{\lambda}{2}\phi_c^2\right)^2\left(\ln\frac{(m^2+\frac{\lambda}{2}\phi_c^2)}{\mu^2}-\frac{1}{2}\right)\right],\end{aligned} \tag{46}$$

wobei dies natürlich im Limes $\Lambda^2\to\infty$ zu verstehen ist.

6 Literatur

- Ashok Das; Field Theory - A Path Integral Approach; World Scientific; 1993
- Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder; An Introduction to Quantum Field Theory; Westview Press; 1995