

Aharonov-Bohm Effekt

Thorsten Treffon

09.06.2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Herleitung im Pfadintegralformalismus	2
3	experimenteller Nachweis	4
3.1	Chambers (1960)	4
3.2	Möllenstedt und Bayh Experiment (1962)	4
3.3	Tonomura Experiment (1986)	5
4	Quellen	7

1 Einleitung

In klassischen Elektrodynamik werden die Potentiale als mathematische Hilfsmittel zur Berechnung der wichtigen Größen, der Felder eingeführt. Die fundamentalen Gleichungen (Maxwell'sche Gleichungen) enthalten nur die Felder und nicht die Potentiale. Aharonov und Bohm postulieren 1959 in ihrem Paper „Significance of Elektromagnetic Potentials in the Quantum Theory“ eine Beeinflussung von Elektronen bei eingeschaltetem Magnetfeld, trotz ausschließlicher Bewegung im feldfreien Raum. Auch wenn das Feld entlang des Weges des Elektrons verschwindet, ist das Vektorpotential jedoch von null verschieden in diesem Raumgebiet. Dadurch ergibt sich die Frage nach der physikalischen Realität der Potentiale.

Historisch gab es eine lange Kontroverse ob der Aharonov-Bohm Effekt wirklich existiert oder nur eine mathematische Erfindung ist. In Abbildung 1 erkennt man einen experimentellen Aufbau zum Nachweis des Aharonov-Bohm Effektes. Dieser entspricht einem Doppelspaltversuch mit einem hinter dem Spalt in einem Zylinder eingeschlossenem Magnetfeld. Ausserhalb des Zylinders verschwindet das Feld vollkommen. Trotzdem wird das Interferenzmuster beeinflusst.

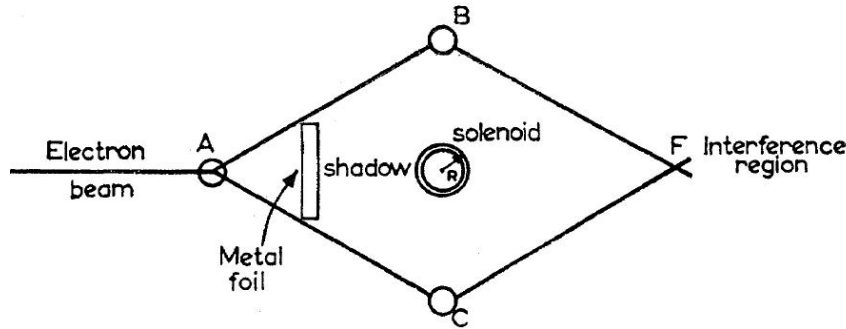


Abbildung 1: experimenteller Aufbau zum Nachweis des magnetischen AB-Effektes [Aha]

2 Herleitung im Pfadintegralformalismus

Zuerst schauen wir uns die Situation ohne ein äusseres Feld an. Die Lagrangefunktion ist dann:

$$L_0 = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t)$$

Daraus lässt sich die Wirkung S berechnen

$$S_0 = \int L_0 dt = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t)$$

In unserem Fall des Doppelspaltbesitzes besitzt ein Weg durch einen Spalt die Wirkung $S_0[c_1]$ und durch den anderen die Wirkung $S_0[c_2]$. Berechnen wir damit die Interferenz der Amplituden erhalten wir

$$e^{iS_0[c_1]/\hbar} + e^{iS_0[c_2]/\hbar} = e^{iS_0[c_1]/\hbar} \left(1 + e^{i(S_0[c_2]-S_0[c_1])/ \hbar} \right)$$

und erkennen, dass eine relative Phase $\phi_0 = (S_0[c_2] - S_0[c_1])/\hbar$ vorliegt.

Wird nun ein B -Feld hinzugefügt so lautet klassisch die Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = e\dot{\vec{r}} \times \vec{B}$. In ihr ist nur das B -Feld enthalten.

Die Lagrangefunktion lautet aber

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2(t) + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}}(t) \vec{A}(\vec{r}) = L_0 + \frac{e}{c} \dot{\vec{r}}(t) \vec{A}(\vec{r}(t))$$

und enthält das Vektorpotential \vec{A} . Daraus erhalten wir die Wirkung

$$S = S_0 + \frac{e}{c} \int \vec{A}(\vec{r}) \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt = S_0 + \frac{e}{c} \int \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Das Pfadintegral über die Wege c_1 und c_2 berechnet sich wie folgt

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}x e^{iS[x]/\hbar} &= \int \mathcal{D}x \left(e^{iS[c_1]/\hbar} + e^{iS[c_2]/\hbar} \right) \\ &= \int \mathcal{D}x e^{iS[c_1]/\hbar} \left(1 + e^{i(S[c_2]-s[c_1])/\hbar} \right) \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir in diesem Fall mit einem Magnetfeld eine relative Phase

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{S[c_2] - s[c_1]}{\hbar} \\ &= \phi_0 + \frac{e}{\hbar c} \left(\int_{c_1} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} - \int_{c_2} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} \right) \\ &= \phi_0 + \frac{e}{\hbar c} \oint_{c_2-c_1} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} \\ &\stackrel{\text{Stokes}}{=} \phi_0 + \frac{e}{\hbar c} \oint_F (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r})) d\vec{f} \\ &= \phi_0 + \frac{e}{\hbar c} \int_F \vec{B} d\vec{f} \\ &= \phi_0 + \frac{e}{\hbar c} \Phi \end{aligned}$$

mit Φ dem magnetischen Fluss durch die Spule. Φ hängt dabei nicht vom Weg ab, sondern nur von der Laufrichtung an der Spule vorbei. Für den Fall, dass beide Wege c_1 und c_2 an einer Seite der Spule vorbei laufen ist das Flächenintegral $\int B d\vec{f} = 0$, da von der Fläche kein B-Feld eingeschlossen ist. Daraus lässt sich schließen, dass alle Wege, die die gleiche Laufrichtung besitzen, den gleichen Wert besitzen. Somit ergibt sich für Φ , wenn die Wege unterschiedliche Laufrichtungen besitzen, $\Phi = \alpha_2 - \alpha_1$. α steht dabei für den Wert des Linienintegrals einer Laufrichtung.

Nun wollen wir die Übergangsamplitude A berechnen:

$$\begin{aligned} A &= \int \mathcal{D}x \left(e^{iS[c_1]/\hbar} + e^{iS[c_2]/\hbar} \right) \\ &= \int \mathcal{D}x \left(e^{iS_0[c_1]/\hbar} e^{i\frac{e\alpha_1}{\hbar c}} + e^{iS_0[c_2]/\hbar} e^{i\frac{e\alpha_2}{\hbar c}} \right) \\ &= A_1 e^{i\frac{e\alpha_1}{\hbar c}} + A_2 e^{i\frac{e\alpha_2}{\hbar c}} \\ &= e^{i\frac{e\alpha_1}{\hbar c}} \left(A_1 + A_2 e^{i\frac{e(\alpha_2-\alpha_1)}{\hbar c}} \right) \\ &\Rightarrow |A| = |A_1 + A_2 e^{i\frac{e\Phi}{\hbar c}}| \end{aligned}$$

Als nächstes schauen wir uns die Eichinvarianz von Φ an. Wenn wir annehmen $A \rightarrow A' = A + \nabla\chi$, erhalten wir

$$\Phi = \int A' dr = \int A dr + \int (\nabla\chi) dr = \int A dr + \underbrace{\int \nabla\chi df}_{=0}$$

Daran sehen wir, dass unsere Ergebnis eichinvariant ist, somit nicht von der gewählten Eichung abhängt.

Bei unserer Berechnung soweit, haben wir eine Art von Wegen völlig ausser Acht gelassen. Es sind auch Wege mit einer Windungszahl n möglich, bei denen sich der Weg um die Spule herum windet. Da die Spule einen verbotenen Bereich darstellt, kann man mathematisch den Raum als mehrfach zusammenhängend auffassen und alle Wege in Homotopieklassen nach Laufrichtung und Windungszahl einteilen. Somit erhält man ein rein mathematisches Problem und braucht bei der Berechnung nicht auf Felder zurückgreifen. Als Ergebnis erhalten wir dann allgemein für die Übergangsamplitude:

$$|A| = |\langle \vec{x}, t_1 | \vec{y}, t_2 \rangle| = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n e^{in \frac{e\phi}{\hbar c}} \right|$$

[Mue], [McK]

Nun wollen wir die Auslenkung des Interferenzmusters in Abhängigkeit des magnetischen Flusses berechnen. Dazu benötigen wir ganz allgemein die Phasendifferenz für zwei Strahlen beim Doppelspalt $\phi_0 = a \frac{2\pi}{\lambda}$ und benutzen die Kleinwinkelnäherung, die gilt falls der Abstand L des Schirmes vom Doppelspalt viel größer ist als die betrachtete Auslenkung x auf dem Schirm. Also für $x \ll L$ gilt: $\sin \alpha' = \frac{a}{L} \approx \tan \alpha = \frac{x}{L}$. Damit erhalten wir

$$a = \frac{xd}{L} \Rightarrow \phi_0 = \frac{xd}{L} \frac{2\pi}{\lambda}$$

Wie bereits bekannt setzt sich die gesamte Phasendifferenz bei eingeschaltetem Magnetfeld zusammen aus $\phi = \phi_0 + \frac{e}{\hbar c} \oint A dr$. Um nun die Verschiebung des Intensitätsmaximums 0. Ordnung x_0 berechnen zu können muss $\phi = 0$ gelten. Damit ergibt sich

$$x_0 = -\frac{L}{d} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{e}{\hbar c} \oint \vec{A} d\vec{r} = -\frac{L}{d} \frac{\lambda}{2\pi} \frac{e}{\hbar c} \Phi$$

[Fey]

3 experimenteller Nachweis

3.1 Chambers (1960)

Das Chambers Experiment war das erste, welches versuchte den Aharonov-Bohm Effekt nachzuweisen. Es wurde ein Transmissions-Elektronen Mikroskop verwendet. Der Elektronenstrahl wurde mittels eines Biprismas aufgespalten in zwei Teilstrahlen. Zwischen denen befindet sich ein ca. $1\mu\text{m}$ dünner, spitz zulaufender Whisker (nadelförmiger Einkristall), der konstant magnetisiert ist. Da der magnetische Fluss proportional zur Querschnittsfläche ist, werden die Interferenzstreifen bei schmaler werdendem Whisker verschoben und somit der Aharonov-Bohm Effekt nachgewiesen (siehe Abbildung 2).

3.2 Möllenstedt und Bayh Experiment (1962)

Bei diesem Experiment wurde besonderer Wert darauf gelegt nur einen Effekt des Vektorpotentials zu messen. Der experimentelle Aufbau gleicht dem des Chambers-Experimentes, doch wurde der Elektronen-

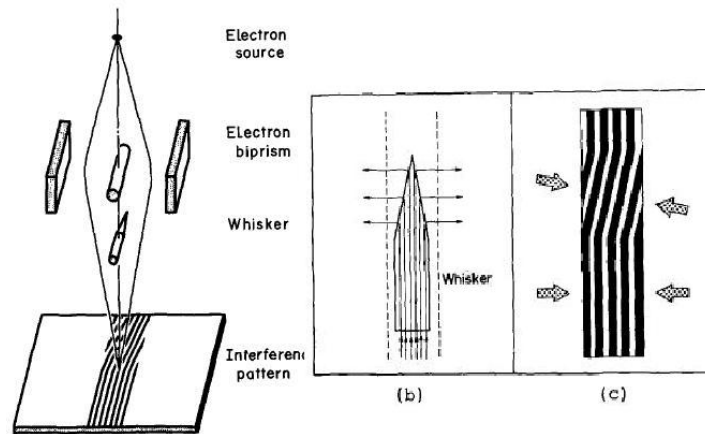


Abbildung 2: Chambers: (a) experimenteller Aufbau (b) Magnetisierung des Whiskers (c) Interferenzstreifen [Pes]

strahl stärker aufgespalten und somit das Eindringen der Elektronenwellenfunktion in die Spule verringert. Zusätzlich schirmt eine ferromagnetische Metallplatte die Spule ab. Bei diesem Experiment wurde

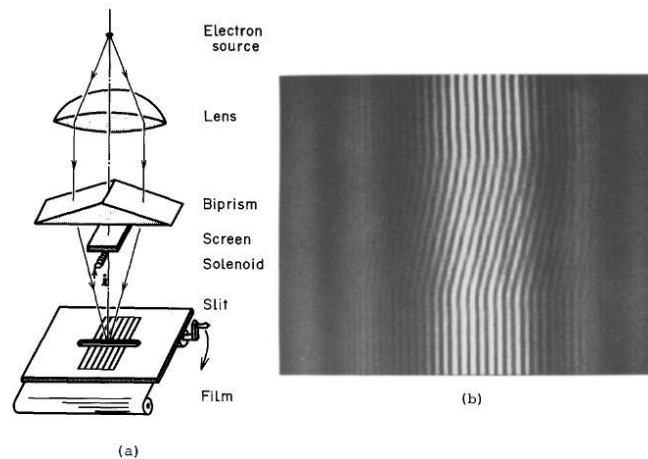


Abbildung 3: Mollenstedt & Bayh: (a) experimenteller Aufbau (b) Interferenzstreifen [Pes]

die Verschiebung der Interferenzstreifen dynamisch in Abhängigkeit von magnetischen Fluss durch die Spule aufgezeichnet. Es wird immer nur ein schmaler Spalt des Interferenzmusters abgebildet und mit steigendem magnetischen Fluss in der Spule kontinuierlich weiter geschoben. Auf diese Weise wurde das in Abbildung 3 (b) gezeigte Muster aufgenommen. Auch wenn das Kippen der Interferenzlinien ein Resultat eines vom magnetischen Fluss induzierten elektrischen Feldes sein kann, so bleibt die Verschiebung auch bei konstant gehaltenem Fluss bestehen und liefert auf diese Weise einen Nachweis für den Aharonov-Bohm Effekt.

3.3 Tonomura Experiment (1986)

Dieses Experiment lieferte sozusagen den endgültigen Beweis der Existenz des Aharonov-Bohm Effektes. Das Magnetfeld ist vollständig von einem Supraleiter umschlossen, der durch den Meissner Effekt die Magnetfeldlinien aus seinem Inneren verdrängt. Dieser Supraleiter ist wiederum vollständig von einer Kupferschicht umgeben, die als weitere Abschirmung dient (siehe Abbildung 4 links). Nun wurde

mit Elektronenholographie ein Interferenzmuster aufgenommen und die Lage der Interferenzstreifen ausserhalb des Ringes und innerhalb verglichen. Dabei beobachtete man eine Phasenverschiebung von π (Abbildung 4 rechts).

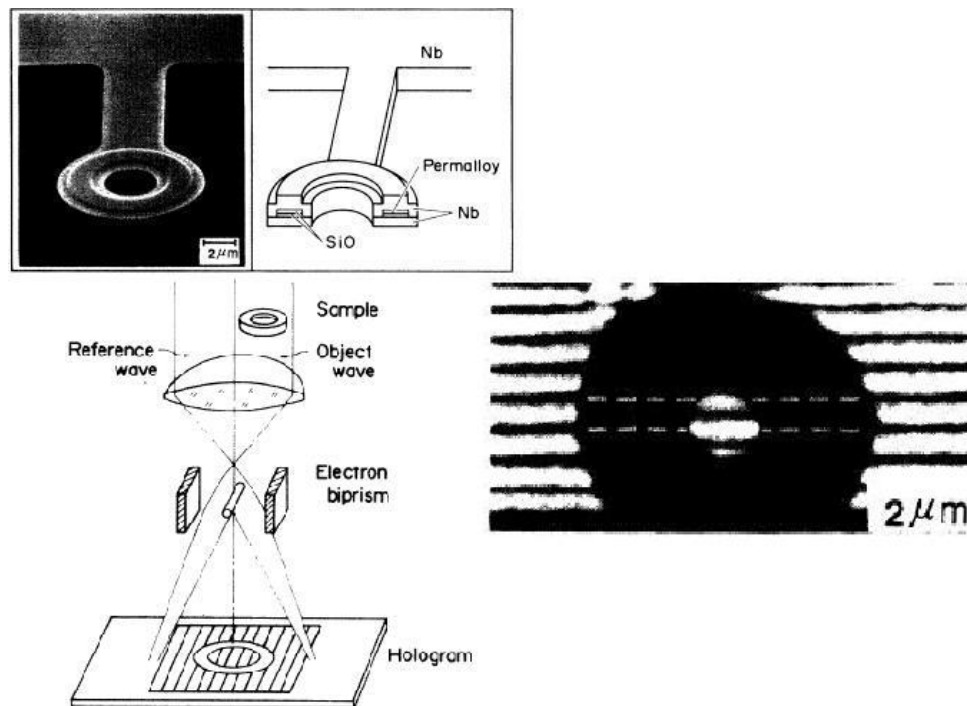


Abbildung 4: links oben: Magnetring eingeschlossen von Niob- Supraleiter; links unten: experimenteller Aufbau der Elektronenholographie; rechts: Interferenzstreifen: Elektronen, die durch die Mitte propagiert sind erfahren eine zusätzliche Phase [Ton]

4 Quellen

Mue Gernot Münster: Quantentheorie; de Gruyter 2006

Fey Feynman, Leighton, Sands: The Feynman Lectures on Physics Vol 2

Aha Yakir Aharonov, David Bohm: Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory; The Physical Review. 115, Nr. 3, 1959, S. 485-491.

Pes Murray Peshkin und Akira Tonomura: The Aharonov-Bohm Effect. Springer, Berlin 1989

Ton Akira Tonomura & collaborators: Evidence for Aharonov-Bohm Effect with magnetic field completely shielded from electron wave; Phys. Rev. Lett. 56p. 792, 1986

McK Richard MacKenzie: Path Integral Methods and Applications; Université de Montréal; Lectures given at Rencontres du Vietnam: VIth Vietnam School of Physics, Vung Tau, Vietnam, 27 December 1999 - 8 January 2000.