Viele Welten

Zusammenfassung des gleichnamigen Vortrags, gehalten am 20. Mai 2009

Marc Osthues

marc.osthues@uni-muenster.de

9. Juni 2009

1 Hugh Everett

Die Interpretation der Quantenmechanik (QM) durch die Viele Welten Theorie (MWI) wurde zwar erst von De Witt so formuliert wie wir sie heute kennen, das mathematische Grundkonzept wurde aber schon viel früher von Hugh Everett aufgestellt. Hugh Everett war US-amerikanischer Physiker, der von 1930 bis 1982 gelebt hat. Im Rahmen seiner Doktorarbeit hat Everett ab 1953 in Princeton die Quantenmechanik studiert, woraufhin er 1955 die erste Fassung seiner Dissertation *The Theory of the Universal Wave Function* veröffentlichte, die allerdings von Bohr so wehement abgelehnt wurde, dass Everett sie überarbeitete. Er veröffentlichte dann eine gekürzte Fassung *„RELATIV STATE“ FORMULATION OF QUANTUM MECHANICS*, sodass er 1957 die Promotion erlangte.
Ziel seiner Arbeit war es eine Theorie aufzustellen, die die Postulate der konventionellen QM logisch erklärt, sodass ihre Formulierung daraus ableitbar ist. Everett ging dabei von der Behauptung aus, dass Wellenmechanik allein eine vollständige Theorie darstellt, das heißt der mathematische Formalismus muss nicht ergänzt werden und ein Kollaps der Wellenfunktion im Sinne der Kopenhagener Deutung ist nicht notwendig. Mit anderen Worten: Alle isolierten Systeme entwickeln sich kontinuierlich gemäß der Schrödingergleichung (SGL):

$$H\Psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Aus diesem Postulat folgt die Bedingung, dass sich das ganze Universum, welches definitionsgemäß ein isoliertes System ist, entsprechend der SGL verhält. Außerdem wird der Heisenbergschnitt überflüssig, da sich jede Messaparatur als Teil des Universums ebenfalls nach der SGL entwickelt und darüber hinaus folgt, dass eine quantenmechanische Messung kein bestimmtes Ergebnis liefern kann. Damit muss also Everett´s Theorie, wie jede universelle Theorie, eine Wellenfunktion des Universums liefern, die aus verschränkten Zuständen besteht, denn die Untersysteme des Universums müssen in Abhängigkeit voneinander ausgedrückt werden können. Everett´s Antwort auf diese Bedingungen war das Konzept der Relativen Zustände.

2 Konzept der Relativen Zustände

Veranschaulichen wir uns dieses Konzept zunächst einmal an einem möglichst einfachen Beispiel. Für ein System Σ, das aus den Untersystemen S und A besteht gilt, dass der Hilbertraum von Σ durch das direkte Produkt aus den Hilberträumen der Untersysteme gebildet wird:

$$\mathcal{H}_\Sigma = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$$

Damit folgt, dass der Gesamtzustand ein Produktzustand ist, der aus den Wellenfunktionen von S und A besteht:

$$\left|\Psi^\Sigma\right\rangle = \left|\Psi^S\right\rangle\left|\Psi^A\right\rangle$$

Wenn $\{|s_k\rangle\}$ und $\{|a_j\rangle\}$ die zu S und A gehörigen Basen sind und man den Gesamtzustand nach diesen entwickelt, ergibt sich für die Wellenfunktion des Gesamtsystems:

$$\left|\Psi^\Sigma\right\rangle = \sum_{j,k} c_{jk}\left|s_k\right\rangle\left|a_j\right\rangle$$

Dabei entsprichen die c_{jk} den bekannten Vorfaktoren.
Zu diesem resultierenden Gesamtzustand macht Everett einen ersten wichtigen Interpretationsansatz. Man kann den Produktzustand so betrachten, dass es für jeden Zustand $|s_l\rangle$ aus S genau

einen korrespondierenden relativen Zustand $|A(s_l)\rangle$ gibt, der folgende Form hat:

$$|A(s_l)\rangle = N_l \sum_j c_{jl} |a_j\rangle$$

N_l ist eine Normierungskonstante, die im Detail nicht wichtig ist.
Es ist zu betonen, dass dieser relative Zustand ausschließlich von $|s_l\rangle$ abhängt. Mit der Idee des relativen Zustands kann man also die Gesamtwellenfunktion umschreiben zu

$$\left|\Psi^{\Sigma}\right\rangle = \sum_k \frac{1}{N_k} |s_k\rangle |A(s_k)\rangle$$

Dieses Konzept hat die Konsequenz, dass es keinen einzelnen Zustand für ein Untersystem gibt, denn die Zustände der Untersysteme sind voneinander abhängig. Wählt man also willkürlich einen Zustand eines Untersystems aus, ergibt sich der zugehörige relative Zustand, der sich aus den übrigen Untersystemem zusammensetzt. Everett formuliert dieses Phänomen wie folgt:

„Thus we are faced with a fundamental relativity of states, which is implied by the formalism of composite systems. It is meaningless to ask the absolute state of a subsystem - one can only ask the state relative to a given state of the remainder of the subsystem."

3 Der Messprozess

Die wichtigste Anwendung des Konzepts der relativen Zustände ist der quantenmechanische Messprozess. Dieser wurde durch Everett aber auch durch von Neumann geprägt. Alle weiteren Überlegungen gehen von einen Gesamtsystem aus, dass aus zwei Untersystemen S,System, und A,Messapparatur, mit den Eigenzuständen $\{|s_k\rangle\}$ und $\{|a_j\rangle\}$ sowie den Eigenwerten s_k und a_j besteht. Dabei wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass das Eigenwertspektrum von S diskret und das von A kontinuierlich ist.
Vor der Messung sind die beiden Untersysteme unkorreliert. Der Gesamtzustand ist also zu Beginn in einem einfach Produktzustand:

$$\Rightarrow \left|\Psi^{S+A}\right\rangle = \left|\Psi^{S}\right\rangle \left|\Psi^{A}\right\rangle$$

Bei dem Messvorgang treten die beiden Systeme in Wechselwirkung miteinander. Dabei muss sich der Eigenzustand der Messapparatur bleibend ändern, da dieser ja irgendwie den gemessenen Wert anzeigen muss, und der Eigenzustand des Systems darf sich nicht ändern, da ja sonst die Messung das „alte" System gemessen hätte. Er muss in einer Art „Gedächtnis" gespeichert werden. Dies wurde speziell durch von Neumann folgendermaßen formuliert:

$$|s_k\rangle |a_j\rangle \longrightarrow |s_k\rangle |a_j + g s_k\rangle$$

Dabei ist g eine von außen regelbare Kopplungskonstante und s_k der gemessene Eigenwert von S.
Der Messprozess wird durch einen unitären Operator U realisiert:

$$U |s_k\rangle |a_j\rangle = |s_k\rangle |a_j + g s_k\rangle$$

Wenn man das nun auf das Gesamtsystem anwendet, muss man den Operator U auf den ursprünglichen Produktzustand wirken lassen:

$$\begin{aligned}\left|\Psi_1^{S+A}\right\rangle &= U\left|\Psi^S\right\rangle\left|\Psi^A\right\rangle \\ &= U\sum_k \left|s_k\right\rangle\left\langle s_k\middle|\Psi^S\right\rangle \cdot \int_j \left|a_j\right\rangle\left\langle a_j\middle|\Psi^A\right\rangle dj \\ &= \sum_k \Psi^S(s_k)\int_j U\left|s_k\right\rangle\left|a_j\right\rangle \Psi^A(a_j)dj\end{aligned}$$

Im ersten Schritt werden die beiden Untersysteme unter Berücksichtigung des diskreten bzw. kontinuierlichen Eigenwertspektrums in ihren Basen entwickelt. Da der Operator U nur auf die Eigenzustände wirkt, kann $\Psi^S(s_k) = \left\langle s_k\middle|\Psi^S\right\rangle$ nach vorne gezogen werden. $\Psi^A(a_j)$ ist hierbei ebenfalls eine Ersetzung für $\left\langle a_j\middle|\Psi^A\right\rangle$.
Um das ganze noch etwas zu vereinfachen und um die Anwendung des Konzeptes der relativen Zustände zu verdeutlichen schreibt man gebräuchlicherweise

$$\left|\Psi_1^{S+A}\right\rangle = \sum_k \Psi^S(s_k)\left|s_k\right\rangle\left|\Psi^A[s_k]\right\rangle, \tag{1}$$

wobei

$$\left|\Psi^A[s_k]\right\rangle = \int_j \left|a_j + gs_k\right\rangle \Psi^A(a_j)dj.$$

$\left|\Psi^A[s_k]\right\rangle$ ist dabei der relative Zustand zu dem gemessenen Eigenwert s_k. Der Zustand der Messapparatur kann also nur relativ zum Systemzustand angegeben werden und das Messergebnis ist nur eindeutig, wenn sich das System ursprünglich zufällig in einem Eigenzustand befunden hat, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.
Der Zustandsvektor der Gesamtwellenfunktion (1) kollabiert nach der Kopenhagener Deutung sofort in ein einzelnes Element $\left|s_k\right\rangle\left|\Psi^A[s_k]\right\rangle$. Nach Everett gibt es keinen Grund für eine solche Zustandsreduktion, alle möglichen Zustände müssen als gleichberechtigt betrachtet werden. Wie lässt sich nun Everett´s mathematischer Formalismus mit den experimentell bestätigten Aussagen der Kopenhagener Deutung in Einklang bringen?

4 Das Gedächtnis des Beobachters

Um das Ziel, eine grundlegende mathematische Formulierung aufzustellen, aus der die konventionelle QM ableitbar ist, erreichen zu können, ist es notwendig die im obigen Abschnitt beschriebene Diskrepanz aufzuheben. Dazu wird das oben schon mal kurz erwähnte Gedächtnis des Beobachters weiter spezifiziert. Das System A wird zur Verallgemeinerung im Folgenden durch das System B für Beobachter ersetzt. Die zugehörige Zustandsfunktion wird darüberhinaus durch $\left|\Psi^B\left[\ldots, s_k, t_l, \ldots, u_m\right]\right\rangle$ ausgedrückt, wobei $s_k, t_l, \ldots, u_m$ die gemessenen Eigenwerte sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass diese chronologisch geordnet sind. Die []-Klammern stellen also das Gedächtnis dar.
Der Gesamtzustand des Systems, bestehend aus S und B, ergibt sich in dieser Schreibweise vor der Messung zu:

$$\left|\Psi^{S+B}\right\rangle = \sum_k \Psi^S(s_k)\left|s_k\right\rangle\left|\Psi^B\left[\ldots\right]\right\rangle$$

Im Vergleich dazu hat sich nach der Messung lediglich der Beobachterzustand geändert.

$$\left|\Psi^{S+\acute{B}}\right\rangle = \sum_k \Psi^S(s_k)\,|s_k\rangle\,\left|\Psi^B\left[\ldots,s_k\right]\right\rangle$$

Der Beobachterzustand nach der Messung ist also ein relativer Zustand zum gemessenen s_k. Wir haben also eine Möglichkeit gefunden den Messprozess zu beschreiben.
Eine weitere Verallgemeinerung ist dadurch möglich ein System aus n Untersystemen zu betrachten. Dafür sieht die Wellenfunktion des Gesamtsystems dann vor einer Messung wie folgt aus:

$$\left|\Psi^{S_1+S_2+\cdots+S_n+B}\right\rangle = \left|\Psi^{S_1}\right\rangle\left|\Psi^{S_2}\right\rangle\ldots\left|\Psi^{S_n}\right\rangle\left|\Psi^B\left[\ldots\right]\right\rangle$$

Dieser geht bei einer Messung an einem beliebigen Untersystem, hier $\left|\Psi^{S_1}\right\rangle$, analog zu oben, über in:

$$\left|\Psi^{S_1+S_2+\cdots+S_n+\acute{B}}\right\rangle = \sum_k \Psi^{S_1}(s_k)\,|s_k\rangle\left|\Psi^{S_2}\right\rangle\ldots\left|\Psi^{S_n}\right\rangle\left|\Psi^B\left[\ldots,s_k\right]\right\rangle \tag{2}$$

Wir haben über n keinerlei Aussagen getroffen, es kann beliebig groß sein. Wir haben also eine Möglichkeit gefunden, die Änderung der Wellenfunktion der Welt zu beschreiben, wenn in einem Untersystem eine Messung durchgeführt wird.
Man kann den obigen Formalismus natürlich separat auf jedes Element der Superposition anwenden. Misst man z.B. zuerst im System S_1 und anschließend im System S_2 so erhält man:

$$\sum_{k,l}\Psi^{S_1}(s_k)\Psi^{S_2}(t_l)\,|s_k\rangle\,|t_l\rangle\left|\Psi^{S_3}\right\rangle\ldots\left|\Psi^{S_n}\right\rangle\left|\Psi^B\left[\ldots,s_k,t_l\right]\right\rangle \tag{3}$$

5 Interpretation des Gesamtzustandes

5.1 Everett

Um den Gesamtzustand (3) interpretieren zu können, betrachtet Everett ein spezielles Beispiel. S sei ein geschlossenes System, welches aus n identischen Untersystemen besteht, die vor der Messung alle die gleichen Zustände $\sum_k s_k\,|s_k\rangle$ haben. Der Anfangszustand der Gesamtwellenfunktion hat dann folgende Form:

$$\left|\Psi_0^{S_1+S_2+..+S_n+B}\right\rangle = \left|\Psi^{S_1}\right\rangle\left|\Psi^{S_2}\right\rangle\ldots\left|\Psi^{S_n}\right\rangle\left|\Psi^B[..]\right\rangle$$

Wenn man nun in den ersten $r < n$ Systemen eine Messung durchführt erhält man:

$$\begin{aligned}\left|\Psi_r^{S_1+S_2+..+S_n+B}\right\rangle = &\sum_{k,l..t}\Psi^{S_1}(s_k)\Psi^{S_2}(s_l)\ldots\Psi^{S_r}(s_t)\\ &\cdot\left|s_k^{S_1}\right\rangle\left|s_l^{S_2}\right\rangle\ldots\left|s_t^{S_r}\right\rangle\left|\Psi^{S_{r+1}}\right\rangle\ldots\left|\Psi^{S_n}\right\rangle\\ &\cdot\left|\Psi^B\left[\ldots s_k^1,s_l^2,\ldots s_t^r\right]\right\rangle\end{aligned}$$

Man erhält also ein Superposition aus den Zuständen

$$\Psi'_{k,l..t} = \left|s_k^{S_1}\right\rangle\left|s_l^{S_2}\right\rangle\ldots\left|s_t^{S_r}\right\rangle\left|\Psi^{S_{r+1}}\right\rangle\ldots\left|\Psi^{S_n}\right\rangle\left|\Psi^B\left[\ldots s_k^1,s_l^2,\ldots s_t^r\right]\right\rangle. \tag{4}$$

Jeder dieser Zustände besitzt dabei eine individuelle Konfiguration von Gedächtniseinträgen, es gibt keinen Beobachter doppelt, und alle sind gleichberechtigt. Außerdem folgt, dass jedes

Untersystem bei einer Messung willkürlich in einen Eigenzustand springt, wobei die anderen Systeme unveändert bleiben.
Wiederholt man nun eine Messung in einem System, so erhält man dasselbe Messergebnis wie zuvor. Misst man nach einiger Zeit z.B. System 2 nochmal so erhält man:

$$[\ldots s_k^1, s_l^2 \ldots s_t^r, s_l^2]$$

Insgesamt kann man sagen, dass das isolierte System durch Superpositionen charakterisiert ist, wobei jedes Element für einen bestimmten Beobachterzustand steht, dem zugehörige Systemzustände zugeordnet sind. Bei jeder Messung entsteht eine neue Verzweigung des Beobachterzustandes. Jeder dieser Stränge ist gleich real, sie sind gleichberechtigt. Wie diese Stränge nebeneinander existieren, darüber macht Everett keine Aussage. Sie existieren einfach irgendwie.

5.2 Viele Welten Interpretation von De Witt

De Witt geht in seiner Interpretation von den Konzepten und Ideen Everett´s aus. Er baut seine MWI auf der oben vorgestellten mathematischen Grundlage und dem Komplexitätspostulat, welches aussagt, dass man die Welt in System und Beobachter aufteilen kann, aus und schließt dann seine Interpretation an, die in erster Linie erklärt wie die Elemente der Superpositon (4) nebeneinander gleichberechtigt existieren können. De Witt behauptet, dass sich das Universum bei jedem Quantenübergang in viele Kopien aufspaltet. Die Anzahl der Kopien hängt von den möglichen Ausgängen der Veränderung ab, bei n Ergebnissen spaltet sich ein Universum in n Universen auf.
Veranschaulichen kann man sich die These De Witt´s sehr gut am de Broglie-Paradoxon. Ein Elektron ist in einer Kiste eingesperrt in der es eine gewisse Aufenthaltswahrscheinlichkeit an allen Orten hat. Wird nun die Kiste halbiert und werden beide Hälften voneinander getrennt, dann hat das Elektron in beiden Hälften die gleich Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Guckt man nun nach, weiß man, wenn das Elektron nicht in der betrachteten Hälfte ist, dass es sich in der anderen Kiste aufhält. Nach der MWI spaltet sich das Universum beim Nachgucken in 2 Universen auf. In dem einen Universum findet man das Elektron, in dem anderen nicht. Der Beobachter, der auch ein Messapparat sein kann, spaltet also das Universum auf. Im Vergleich dazu sagt die Kopenhagener Deutung, dass die Wellenfunktion im Moment des Öffnens in einen Eigenzustand kollabiert. Der Beobachter verleiht dem Elektron also eine Existenz.

6 Zwei kurze klassische Kritikpunkte

Man kann jetzt fragen, warum wir in unseren Erfahrungen eine Zufälligkeit von Ergebnissen erleben, wenn doch mathematisch alles der Kausalität genügt? Eine möglich Antwort darauf liefert Max Tegmark in seinem Artikel *Many Worlds or Many Words?*. Grundlegend unterscheidet Tegmark zwischen zwei Sichtweisen:

- *the outside view:* Die Welt kann beschrieben werden durch eine sich entwickelnde Wellenfunktion (mathematische Sichtweise)
- *the inside view:* Die Art und Weise wie die Welt aus der Froschperspektive eines Beobachters wahrgenommen wird

Geht man nun vom *inside view*, in dem wir uns als Beobachter befinden aus, dann erscheint für uns ein Messergebnis natürlich zufällig, weil wir die anderen Stränge nicht wahrnehmen können. Dies führt direkt zur nächsten kritischen Anmerkung. Warum können wir keine Superpositionen wahrnehmen? Die Antwort auf dieses Problem liefert das in den 70´er oder 80´er Jahren gefundene Prinzip Dekohärenz, das mittlerweile allgemein anerkannt ist und aus dem folgt, dass makroskopische Superpositionen durch Wechselwirkung mit der Umwelt sofort zerstört werden. Die MWI stimmt also mit den experimentellen Aussagen der Kopenhagener Deutung wie beabsichtigt überein, was allerdings auch zur Folge hat, dass sie experimentell nicht unterscheidbar sind. Außerdem werden nach der MWI alle Superpositionen realisiert, sodass kein unphysikalischer Kollapps mehr notwendig ist. Auch ist keine Unterscheidung zwischen klassischer und quantenmechanischer Welt mehr notwendig. Allerdings geht die MWI davon aus, dass Mathematik Realität ist, und dass die menschliche Wahrnehmung lediglich eine gute Approximation darstellt. Die mathematischen Erfolge sprechen dafür, die Natur des Menschen eher dagegen.

Man kann also abschließend sagen, dass die Vorstellung mehrerer Welten sehr bizarr ist, aber man der mathematischen Formulierung Respekt zollen sollte!