Supersymmetrische Quantenmechanik

Isabelle Binkowski

1.Einleitung

Symmetrien

Die Grundidee ist die Beibehaltung der Struktur, denn die Form eines symmetrischen Systems bleibt unter Transformation invariant. Die mathematischen Formulierungen werden übersichtlicher, da durch die Einschränkung der Systemdynamik die Bewegungsgleichung vereinfacht wird. Es gilt der generelle Zusammenhang:
Symmetrie – Erhaltungssatz - Entartung

Das Standardmodell in der Kernphysik

Es existieren 4 fundamentale Wechselwirkungen:

1. Elektromagnetische WW
2. Schwache WW
3. Starke WW
4. Gravitation

Die Welt ist aus Materie- (Fermionen) und Kraftteilchen (Bosonen) aufgebaut. Zwischen Fermionen herrschende Kräfte werden durch den Austausch von Bosonen vermittelt.

Supersymmetrie (SUSY)

Die Supersymmetrie ist die größtmögliche Symmetrie der Naturgesetze. Sie besagt u.a., dass zu jedem Materieteilchen ein supersymmetrischer Partner existiert, der sich wie ein Kraftteilchen verhält und umgekehrt.
→Die Teilchenzahl wird verdoppelt.
Die SUSY impliziert eine Urkraft aus der alle Kräfte ableitbar sind. Vorhersagen für die Kräfte besagen, dass sie sich knapp verfehlen. Wird die Supersymmetrie in der Rechnung einbezogen, nehmen alle Kräfte die gleiche Stärke an. →URKRAFT!?

Übergang zur Supersymmetrie der Quantenmechanik:

2. Bose-Fermi-Supersymmetrie

Die Supersymmetrie ist die Transformation bosonischer in fermionische Zustände (und umgekehrt).

Bosonen	Fermionen
Spin ganzzahlig	Spin halbzahlig
Tensor	Spinor
c-Zahlen (klassisch)	a-Zahlen (Grassmann-Algebra)
Kommutator-Relationen	Antikommutator-Relationen
Bose-Einstein-Statistik	Fermi-Dirac-Statistik
Kraftteilchen	Materieteilchen

Die supersymmetrische Transformation wird durch supersymmetrischen Operator übermittelt:

$$Q\left|Boson\right\rangle \propto \left|Fermion\right\rangle \quad \text{und} \quad Q\left|Fermion\right\rangle \propto \left|Boson\right\rangle$$

2.1 Das einfachste SUSY-Modell

- Keine WW
- Modell enthält 2 Teilchensorten (Bosonen und Fermionen)
- Formalismus: 2.Quantisierung

→ Symmetrisierungen und Antisymmetrisierungen müssen nicht zugefügt werden, da sie implizit enthalten sind

→ Durch die Einführung des Fock-Raumes sind reine quantenmechanische Zustände ohne feste Teilchenzahl möglich, sodass Erzeuger und Vernichter zugelassen werden können.

<u>Bosonen</u>

Der Zustand $|n_B\rangle$ ist durch Teilchenzahl n_B charakterisiert.

Die Erzeuger und Vernichter sind:

$$b^+|n_B\rangle = \sqrt{n_B+1}|n_B+1\rangle \qquad b^-|n_B\rangle = \sqrt{n_B}|n_B-1\rangle$$

Die fundamentalen Vertauschungsrelationen, welche das Bosonen-System vollständig definieren sind:

$$[b^-, b^+] = 1 \quad \text{und} \quad [b^+, b^+] = [b^-, b^-] = 0$$

Der Teilchenzahl- oder Besetzungszahloperator erzeugt ein Boson und vernichtet es wieder: $N_B = b^+ b^-$.

N_B hat die Teilchenzahl n_B als Eigenwert: $N_B|n_B\rangle = b^+ b^-|n_B\rangle = b^+\sqrt{n_B}|n_B-1\rangle = n_B|n_B\rangle$

Durch wiederholte Anwendung des Erzeugers auf den Vakuumzustand ist jeder beliebige Zustand erzeugbar (Leiter- oder Stufenoperator).

$$|1\rangle = b^+|0\rangle$$

$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} b^+|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} b^+ b^+|0\rangle$$

$$\vdots$$

$$|n_B\rangle = (n_B!)^{-1/2} (b^+)^{n_B}|0\rangle$$

<u>Fermionen</u>

Die Fermioperatoren sind: $f^+|n_F\rangle = \sqrt{n_F+1}|n_F+1\rangle$ und $f^-|n_F\rangle = \sqrt{n_F}|n_F-1\rangle$

Das Fermion-System ist durch die fundamentalen Vertauschungsrelationen definiert:

$$\{f^+, f^+\} = \{f^-, f^-\} = 0 \qquad \{f^-, f^+\} = 1$$

Die Fermioperatoren genügen der Nilpotenz: $(f^+)^2 = (f^-)^2 = 0$

Der Teilchenzahl- oder Besetzungszahloperator erzeugt ein Fermion und vernichtet es wieder:

$$N_F = f^+ f^-$$

N_F hat die Teilchenzahl n_F als Eigenwert: $N_F|n_F\rangle = f^+ f^-|n_F\rangle = f^+\sqrt{n_F}|n_F-1\rangle = n_F|n_F\rangle$

Die Fermionen gehorchen zusätzlich dem Pauli-Prinzip, das heißt zwei Teilchen dürfen sich nicht in demselben Zustand befinden. Deswegen wird der Einteilchenzustand von zwei Elementen aufgespannt: $|0\rangle$ und $|1\rangle = f^+|0\rangle$. Es existiert somit keine „Leiter“, sie bricht ab, sodass kein Zustand $|2\rangle$ existiert. Insgesamt existieren die Zustände: $f^+|0\rangle = |1\rangle$, $f^-|1\rangle = |0\rangle$ und $f^-|0\rangle = f^+|1\rangle = 0$.

Bosonen und Fermionen

Da die Bose- und Fermioperatoren in verschiedenen Räumen wirken, gilt: [*b*,*f*]=0. In einem Ensemble aus einer Teilchensorte verhalten sich Bosonen und Fermionen unterschiedlich:

→ Fermionen sind auf verschiedene Niveaus verteilt.

→ Bosonen besetzen mehrfach den Zustand niedrigster Energie.

SUSY- Operatoren

Der einfachste Zustandsraum wird von dem Produktzustand $\left|n_B n_F\right\rangle = \left|n_B\right\rangle\left|n_F\right\rangle$ aufgespannt, wobei $n_B = 0,1,...,\infty$ und $n_F = 0,1$.

Entsprechende der Werte die n_F annehmen kann unterscheidet man zwei Klassen:

1.) bosonische Zustände $\quad n_F = 0$

2.) fermionische Zustände $\quad n_F = 1$

Es werden zwei supersymmetrische Operatoren eingeführt.

$Q_+\left|n_F n_B\right\rangle \propto \left|n_B - 1, n_F + 1\right\rangle$ vernichtet ein Boson und erzeugt ein Fermion.

$Q_-\left|n_B n_F\right\rangle \propto \left|n_B + 1, n_F - 1\right\rangle$ vernichtet ein Fermion und erzeugt ein Boson.

Die SUSY-Operatoren sind Zweiteilchenoperatoren: $Q_+ = b^- f^+$ und $Q_- = b^+ f^-$.

Die Nilpotenz der Fermioperatoren überträgt sich auf die SUSY-Operatoren.

Supersymmetrie bedeutet:

Bei jeder Transformation, welche durch die *Q*‘s vermittelt wird, bleibt die Energie des Systems erhalten.

Für den supersymmetrischen Hamiltonoperator gilt die algebraische Bedingung $\left[H_S, Q_\pm\right] = 0$, welche durch folgenden Ansatz erfüllt ist: $H_S = \left\{Q_+, Q_-\right\}$.

Es tritt jedoch ein „Schönheitsfehler“ auf: die Operatoren sind nicht hermitesch!

Deswegen werden 2 hermitesche Operatoren eingeführt:

$$Q_1 = Q_+ + Q_- \qquad Q_2 = -i(Q_+ - Q_-)$$

Für sie gilt:

$$\left\{Q_1, Q_2\right\} = 0 \qquad \left[H_S, Q_{1,2}\right] = 0 \qquad H_S = Q_1^2 = Q_2^2$$

Der harmonische Oszillator

Der 1-dimensionale Hamiltonoperator hat die Form $H_B = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2$.

Anstelle von $\hat{p}$ und $\hat{q}$ werden die zueinander adjungierten Erzeuger und Vernichter eingeführt:

$$b^\pm = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} \mp \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

Aus dem Teilchenzahloperator erhält man eine neue Form des Hamiltonoperators (Bose-Oszillator):

$$N_B = b^+ b^- = \left(\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{q}^2 + \frac{\hat{p}^2}{m^2\omega^2}\right) + \frac{i}{2\hbar}\left[\hat{q}, \hat{p}\right] = \frac{H_B}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H_B = \hbar\omega\left(N_B + \frac{1}{2}\right)$$

Weil H_B und N_B vertauschen besitzen sie gleiche Eigenzustände.

Aus den Eigenwertgleichungen $N_B|n_B\rangle = n_B|n_B\rangle$ und $H_B|n_B\rangle = E_{n_B}|n_B\rangle$ erhält man die Energieeigenwerte zu:

$$E_{n_B} = \hbar\omega\left(n_B + \frac{1}{2}\right)$$

Die Eigenschaften des Energiespektrums sind:
1.) Es existiert ein äquidistanter Abstand ħω zwischen den einzelnen Energieniveaus.
2.) Es existiert eine Nullpunktsenergie: $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

Der Fermi-Oszillator

Der Hamiltonoperator des Fermi-Oszillators ist $H_F = i\omega\hat{\psi}\hat{\pi}$, mit $\hat{\psi},\hat{\pi}$ Operatoren der fermionischen Koordinaten und Impulse.
Man konstruiert die zueinander adjungierten Erzeuger und Vernichter: $f^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{\psi} \mp i\hat{\pi})$

Der Hamiltonoperator ist:

$$H_F = \hbar\omega\left(N_F - \frac{1}{2}\right)$$

Das Eigenwertspektrum ist gegeben durch:

$$E_{n_F} = \hbar\omega\left(n_F - \frac{1}{2}\right)$$

Ein Unterschied zum Bose-Oszillator besteht in der negativen Nullpunktsenergie.
Der Fermi-Oszillator beschreibt ein Zwei-Zustand-System mit den Energieniveaus

$$E_0 = -\frac{1}{2}\hbar\omega$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

Der SUSY-Oszillator

Die Operatoren mit einem gewähltem Vorfaktor sind: $Q_+ = \sqrt{\hbar\omega}b^- f^+$ und $Q_- = \sqrt{\hbar\omega}b^+ f^-$.
Aus den (Anti-)Vertauschungsrelationen folgt für den Hamiltonoperator:

$$H_S = \hbar\omega\left(b^+b^- + f^+f^-\right) = H_B + H_F \qquad \omega = \omega_B = \omega_F$$

Der Bose- und der Fermi-Oszillator sind die Grundbausteine des SUSY-Modells.
Für das Eigenwertspektrum des SUSY-Oszillators folgt:

$$H_S|n_B n_F\rangle = \hbar\omega(N_B + N_F)|n_B n_F\rangle$$
$$\Rightarrow E = \hbar\omega(n_B + n_F)$$

Es existieren keine Nullpunktsenergien und Zustände negativer Energien.

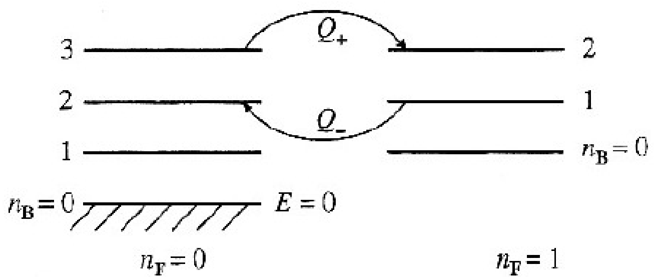

Abbildung 1: Niedrigste Energie-Eigenwerte des SUSY-Oszillators

Das Niveauschema sieht folgendermaßen aus:

- Zu jedem Wert $|n_B\rangle$ ex. genau 2 Zustände: $n_F = 0$ und $n_F = 1$.
- Partnerzustände besitzen dieselbe Energie: 2-fache Entartung
- Der Grundzustand $|00\rangle$ mit der Energie E=0 ist nicht entartet

2.2 Die SUSY-Algebra

In der Lie-Algebra sind endliche Transformationen aus infinitesimalen Transformationen zusammensetzbar. Die Erzeugenden (Generatoren) bilden die Lie-Algebra und es gelten die Kommutatorrelationen.

In der SUSY-Algebra existieren zusätzlich Antikommutatoren. Die einfachste SUSY-Algebra mit den SUSY-Generatoren Q_i ist: $[H_S, Q_i] = 0 \qquad \{Q_i, Q_j\} = 2H_S\delta_{ij}$

Die Gesamtheit aller Operatoren ist in zwei Klassen unterteilt:

1.) gerade (bosonische) Operatoren (z.B. Q)
2.) ungerade (fermionische) Operatoren (z.B. H)

Das Produkt 2 gerader oder ungerader Operatoren ergibt einen geraden Operator. Das Produkt eines geraden und ungeraden Operators ist ein ungerader Operator.

Die Struktur der SUSY-Algebra: $[B,B] \sim B$ Liealgebra

$[B,F] \sim F$
$\{F,F\} \sim B$ }SUSY-Erweiterung

Der Antikommutator schließt die Algebra. Alle Verknüpfungen des von den B`s und F´s aufgespannten Raums führen nicht heraus.

2.3 Nichtlineare Bose-Fermi-Supersymmetrie

In den nichtlinearen Systemen wechselwirken bosonischer und fermionischer Sektor.
Es gilt die Forderung der Erhaltung der SUSY, welche erfüllt ist durch: $Q_\pm = B^\mp f^\pm$
Der Hamiltonoperator ist $H_S = B^- B^+ f^+ f^- + B^+ B^- f^- f^+$

wobei B^+ und B^- Funktionen der bosonischer Teilchenoperatoren b^+ und b^- sind.
Es gilt hier jedoch für die Kommutatoren: $[H_S, H_F] = 0$ aber $[H_S, H_B] \neq 0$.
→ Die Zustände sind nun durch $|n_F\rangle$ und E charakterisiert:

$$H_S|En_F\rangle = E|En_F\rangle \qquad N_F|En_F\rangle = n_F|En_F\rangle$$

→ Der Zustandsraum zerfällt wegen den möglichen Werten für n_F in zwei Klassen:

1.) bosonische Zustände $|E0\rangle$
2.) fermionische Zustände $|E1\rangle$

In der 2-komponentigen Darstellung ist das $|En_F\rangle = \begin{pmatrix} |E0\rangle \\ |E1\rangle \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Boson \\ Fermion \end{pmatrix}$

Und die SUSY-Operatoren:

$$Q_1 = Q_+ + Q_- = B^- f^+ + B^+ f^- = \begin{pmatrix} 0 & B^+ \\ B^- & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_2 = -i(Q_+ - Q_-) = \begin{pmatrix} 0 & iB^+ \\ -iB^- & 0 \end{pmatrix}$$

und der Hamiltonoperator:

$$H_S = Q_1^2 = Q_2^2 = \begin{pmatrix} B^+B^- & 0 \\ 0 & B^-B^+ \end{pmatrix}$$

Das Eigenwertspektrum im nichtlinearen Fall:

- Das EW-Spektrum ist nicht negativ.
- Alle Zustände mit der Energie E≠0 sind zweifach entartet.

Reine und gemischte Zustände

Die Zustände im nichtlinearen SUSY-Modell sind reine Zustände, da sie entweder rein bosonische oder fermionische Zustände sind.
Gemischte Zustände werden durch Linearkombinationen reiner Zustände gebildet.
Es existieren 3 Sätze von Basiszuständen: $|En_F\rangle$, $|1\pm\rangle = |E0\rangle \pm |E1\rangle$, $|2\pm\rangle = |E0\rangle \pm i|E1\rangle$

Hierbei ist nur die 1. eine reine Basis. 2. u. 3. sind gemischte Basen.

Das Superpotential

Man ersetze $b^{\pm}$ durch
$$B^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[W(\hat{q}) \mp \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m}}\right]$$

mit dem Superpotential *W(Q).* Beachte: W hat die Dimension $[\text{Energie}]^{1/2}$!
Der Hamiltonoperator ist dann:
$$H_S = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + W^2\right) - \frac{\hbar}{\sqrt{m}}\frac{dW}{dq}\frac{\sigma^3}{2} \qquad \text{mit} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wie sieht der Grundzustand aus?
Dazu betrachte
$$H_S = \begin{pmatrix} B^+B^- & 0 \\ 0 & B^-B^+ \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}$$

Wegen der Diagonalstruktur zerfällt die Schrödingergleichung zwei ein-komponentige Gleichungen. Dies stellt eine Vereinfachung dar, weil nur noch Differentialgleichungen 1.Ordnung zu lösen sind. Die Lösungen sind:
$$\begin{Bmatrix} \psi_0^{(1)}(x) \\ \psi_0^{(2)}(x) \end{Bmatrix} = C \cdot \exp\left[\mp \frac{\sqrt{m}}{\hbar}\int_0^x W(x')dx'\right]$$

Nicht jede Lösung der Schrödingergleichung entspricht einem physikalischen Zustand. Voraussetzung ist, dass die Grundzustandswellenfunktion normierbar ist.
Da sich der Definitionsbereich über die reelle Achse erstreckt muss die Wellenfunktion im ∞ verschwinden. Daraus folgt:

$\psi_0^{(1)}(x)$ ist Grundzustand bei *E*=0, wenn
$$\int_{-\infty}^{0} W(x')dx' = +\infty \qquad \text{und} \qquad \int_{0}^{\infty} W(x')dx' = -\infty$$
$\psi_0^{(2)}(x)$ ist Grundzustand bei *E*=0, wenn
$$\int_{-\infty}^{0} W(x')dx' = -\infty \qquad \text{und} \qquad \int_{0}^{\infty} W(x')dx' = +\infty$$

Da sich beide Forderungen gegenseitig ausschließen, kann nur ein Grundzustand existieren. man unterscheidet folglich drei Fälle:

1.) Es existiert nur ein Zustand mit *E*=0, er gehört zu H_1.
2.) Es existiert nur ein Zustand mit *E*=0, er gehört zu H_2.
3.) Es existiert kein Zustand mit *E*=0. Der Grundzustand bei E>0 ist zweifach entartet.

In 1.) u. 2.) ist die SUSY exakt, in 3.) ist die SUSY gebrochen.

Exakte und gebrochene SUSY
Spontane Symmetriebrechung in der Physik liegt vor, wenn der Hamiltonoperator gegenüber einer bestimmten Transformation invariant bleibt [H,G]=0, der Grundzustand unter dieser Transformation aber nicht invariant ist.

$$G|0\rangle = 0 \Rightarrow \quad \text{exakt}$$
$$G|0\rangle \neq 0 \Rightarrow \quad \text{gebrochen}$$

Die Generatoren der der SUSY sind: Q_1 oder Q_2. Das heißt die SUSY ist exakt, wenn ein Zustand existiert mit $Q_1|0n_F\rangle = 0$ oder $Q_2|0n_F\rangle = 0$

Wegen $H_S|0n_F\rangle = Q^2|0n_F\rangle = 0$ besitzt der Zustand den Eigenwert E=0.

Anwendung auf das Superpotential
Man betrachte das Verhalten von W(x) im Unendlichen und definiere die Grenzwerte:

$$W_+ \equiv \lim_{x\to\infty} W(x) \quad \text{und} \quad W_- \equiv \lim_{x\to-\infty} W(x)$$

→ 1.) $W_- < 0$ und $W_+ > 0$ SUSY exakt

2.) $W_- > 0$ und $W_+ < 0$ SUSY exakt

3.) $W_\mp < 0$ und $W_\pm > 0$ SUSY gebrochen

3. Zusammenfassung

1.) Die SUSY überführt bosonische in fermionische Zustände und umgekehrt.
Der Hamiltonoperator H ist invariant.
Das Energiespektrum ist entartet, außer im Grundzustand E=0.

2.) Zur mathematischen Formulierung wird die SUSY-Algebra eingeführt.
Hier treten zusätzlich Antikommutatoren auf.

3.) Die SUSY wird im nichtlinearen Fall durch das Superpotential beschrieben.
Das globale Verhalten von W entscheidet ob die SUSY exakt oder gebrochen ist.

Quellen

- H.Kalkar/G.Soff: Supersymmetrie, Teubner
- Schwabl: Quantenmechanik, Springer
- Internet
- http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/images/intermed/SUSYmirror.jpg
- http://www.weltderphysik.de/de/936.php
- http://www.desy.de/expo2000/deutsch/dhtmlbrowser/webthemen/17_tesla_teilchen/supersymmetrie.htm
- http://www.physik.unizh.ch/lectures/MC2009/cd/exercises/kworkquark/de/kennenlernen/artikel.symmetrien-5/3/1/index.html
- http://www.cip.physik.uni-muenchen.de/~jana.traupel/Materie/TeilchenphysikOnline/Wechselwirkungen/pics/Boote.jpg
- http://www.mpq.mpg.de/bec-anschaulich/html/bosonen-_fermionen.html
- http://vanha.physics.utu.fi/opiskelu/kurssit/FFYS4497/