Harmonischer Oszillator in Pfadintegraldarstellung

Seminarvortrag: SS09 *Autor:* Nicolas Schierbaum

1 Einleitung

Der harmonische Oszillator spielt in der Physik eine bedeutende Rolle, wenn es darum geht, zur Charakterisierung eines quantenphysikalischen Systems ein theoretisches Modell zu finden. Der Grund dafür liegt in der Einfachheit und vorallem in der exakten Lösbarkeit des harmonischen Oszillators. Durch Übertragung des Modellsystems des harmonischen Oszillators auf andere quantenmechanische Probleme, wie z.B. die Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, lassen sich diese exakt beschreiben.

2 Wiederholung

2.1 Operatordarstellung des harmonischen Oszillators

Der harmonische Oszillator wird in der Quantenmechanik durch den Hamilton-Operator eindeutig festgelegt.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2. \tag{1}$$

Mit dem Impulsoperator im eindimensionalem $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\delta}{\delta q}$ folgt daraus:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\delta^2}{\delta^2 q} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{q}^2. \tag{2}$$

Die zentrale Aufgabe in der Quantenmechanik liegt im Lösen der Eigenwertgleichung, also der zeitunabhägigen Schrödinger Gleichung.

$$\hat{H}\left|\phi(q)_n\right\rangle = E_n\left|\phi(q)_n\right\rangle. \tag{3}$$

Dabei sind $\phi(q)_n$ die Eigenfunktion und E_n die Energieeigenwerte des Hamilton-Operators $\hat{H}$.

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \text{ mit } n = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

$$\phi(q)_n = (2^n n!)^{-1/2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} H_n(q)e^{-q^2/2}. \tag{5}$$

mit H_n, den Hermit'schen Polynomen. Die nachfolgende Abbildung 1 zeigt das Energiespektrum und die dazugehörigen Eigenfunktionen des quantenmechanischen harmonischen Oszillators für verschiedene Werte $n = 1, ..., 5$.

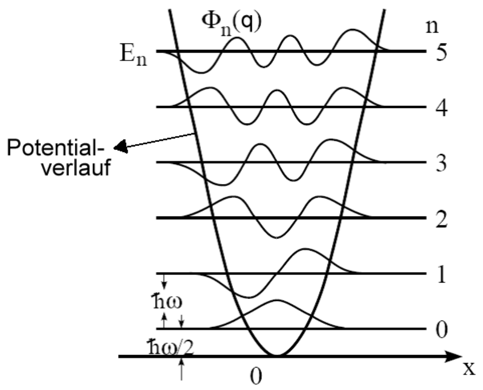

Abbildung 1: Energiespektrum des quantenmechanischen harmonischen Oszillators

2.2 Pfadintegrale

Ausgangspunkt der Pfadintegraldarstellung ist die Betrachtung der Übergangsamplitude eines Teilchens zur Zeit $t_0 = 0$ am Ort y zum Ort x zur Zeit $t_1 = t$. Diese ist gegeben durch:

$$\langle x| U(t) |y\rangle \quad = \quad \langle x| e^{i/\hbar H \cdot t} |y\rangle \,. \tag{6}$$

Dabei ist $U(t)$ der Zeitentwicklungsoperator. Im nächsten Schritt wird die Behauptung aufgestellt, dass sich die Übergangsamplitude durch Integration über alle möglichen Pfade von y nach x beschreiben lässt.

$$\langle x, t|y, 0\rangle \quad = \quad \int A[x(t)]D[x(t)] \tag{7}$$

mit $A[x(t)]$ einem noch unbekannten Integranten, der vom jeweiligen Pfad abhängig ist. Im Nachfolgendem ist schrittweise die Lösung dieses Problems dargestellt.

- Bestimmung der Übergangsamplitude eines freien Teilchens:
  Der Hamilton-Operator eines freien Teilchens ist $H_0 = \frac{p^2}{2m}$. Daraus folgt für die Übergangsamplitude:

$$\langle x| e^{i/\hbar H_0 \cdot t} |y\rangle \quad = \quad \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar t} e^{i\frac{m}{2\hbar t}(x-y)^2}}. \tag{8}$$

- Bestimmung der Übergangsamplitude eines Teilchens in einem ortsabhängigen Potential $V(x)$:
  Für den Hamilton-Operator gilt dann $H = H_0 + V(x)$. In diesem Fall ist keine exakte Rechnung mehr möglich. Man behilft sich mit folgendem Trick: Zunächst bestimmt man die Übergangsamplitude näherungsweise für kleine Zeiten $t = \epsilon$ und geht anschließend zu großen Zeiten $t = N \cdot \epsilon$ mit $N \to \infty$ über. Es ergibt sich schließlich für die Übergangsamplitude folgender Ausdruck:

$$\langle x| e^{i/\hbar H \cdot t} |y\rangle \quad = \quad \int e^{i/\hbar S[x]} Dx, \tag{9}$$

wobei $S[x] = \int_0^t L(x, \dot{x}, t')dt'$ die klassische Wirkung beschreibt und $Dx = D[x(t)] = lim_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar\epsilon}\right)^{N/2} dx(t_1)...dx(t_{N-1})$ ist. Das Integral wird über alle Wege von y nach x gebildet und ist unabhängig von jeglicher Operatordarstellung.

3 Harmonischer Oszillator in Pfadintegraldarstellung

3.1 Funktionalableitung

An dieser Stelle soll kurz der Begriff der Funktionalableitung eingeführt werden, da die Funktionalableitung ein wichtiges Werkzeug beim Umgang mit den Pfadintegralen darstellt. Gegeben sei ein Funktional $F[x]$, dass von der Funktion $x(s)$ abhängig ist. Dann ist die Funktionalableitung definiert als:

$$\delta F[x] \quad = \quad \int ds \frac{\delta F}{\delta x(s)} \delta x(s). \tag{10}$$

Ein wichtige Hilfsformel stellt in diesem Zusammenhang folgende Gleichung dar:

$$F[x] = x(a) \Rightarrow \frac{\delta F}{\delta x(t)} \quad = \quad \delta(a-t). \tag{11}$$

3.2 Euler-Lagrange-Gleichung

Bei der Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung wird zunächst der klassische Pfad $x_{kl}(t)$ betrachtet. Dabei ist der klassische Pfad definiert, als der Pfad $x(t)$, den das System tatsächlich beschreibt. Der klassiche Pfad hat die besondere Eigenschaft, dass die klassische Wirkung $S[x] = \int_0^t L(x, \dot{x}, t')dt'$ im Vergleich zu allen anderen Pfaden mit denselben Endpunkten $x(t_b)$ und $x(t_a)$, extremal wird. Es gilt demnach für den klassischen Pfad x_{kl} die Bedingung:

$$\delta S[x]|_{x(t)=x_{kl}(t)} = 0. \tag{12}$$

Im nächsten Schritt betrachtet man die Wirkung für alle Variationen um den klassischen Pfad $\delta x(t) = x(t) - x_{kl}(t)$ mit der Bedingung $\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$:

$$\delta S[x] \quad = \quad \{S[x+\delta x] - S[x]\}. \tag{13}$$

Mit $S[x] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t')dt'$ folgt daraus

$$\begin{aligned} S[x+\delta x] &= \int_{t_a}^{t_b} L(\dot{x}+\delta\dot{x}, x+\delta x, t)dt & (14)\\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ L(\dot{x}, x, t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x}\delta x \right\} dt & (15)\\ &= S[x] + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_a}^{t_b} - \delta x \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right\} dt. & (16) \end{aligned}$$

Dabei ist $\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\delta x\right]_{t_a}^{t_b} = 0$, da $\delta x(t_a) = \delta x(t_b) = 0$ gilt. Es folgt für die Variation der Wirkung:

$$\begin{aligned} \delta S[x] &= \{S[x+\delta x] - S[x]\} & (17)\\ &= -\delta x \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right\} dt. & (18) \end{aligned}$$

Damit die Bedingung $\delta S[x] = 0$ erfüllt ist, muss gelten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \quad = \quad 0. \tag{19}$$

Diese Gleichung wird auch als Euler-Lagrange-Gleichung bezeichnet. Unter Berücksichtigung der Definiton der Funktionalableitung Gleichung 10 folgt für die Funktionalableitung der Wirkung S

$$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = -\left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} \right\} = 0. \tag{20}$$

Es gibt also einen direkten Zusammenhang zwischen der Funktionalableitung der Wirkung S und der Euler-Langrange-Gleichung.

3.3 Harmonischer Oszillator

Die Lagrange-Funktion des harmonischen Oszillators lautet

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m\omega}{2}x^2. \tag{21}$$

Aus Gleichung 19 ergibt sich damit für die Bewegungsgleichung folgende Differentialgleichung 2. Ordnung

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x = 0 \tag{22}$$

mit der allgemeinen Lösung nach

$$x(t) = c_1 sin\omega t + c_2 cos\omega t. \tag{23}$$

Wobei die Konstanten c_1 und c_2 durch die Randbedingung $x(t_a) = x_a$ und $x(t_b) = x_b$ festgelegt sind. Es gelten für c_1 und c_2 folgende Zusammenhänge:

$$c_1 = \frac{x_b cos\omega t_a - x_a cos\omega t_b}{sin\omega T} \tag{24}$$

$$c_2 = \frac{x_a sin\omega t_b - x_b in\omega t_a}{sin\omega T}. \tag{25}$$

Durch die Transformation $T = t_b - t_a$ und dem Additionstheorem $sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$ ergibt sich für den klassischen Pfad x_{kl} die Lösung der Bewegungsgleichung zu

$$\begin{aligned} x_{kl} &= x_b(cos\omega t_a sin\omega t - sin\omega t_a cos\omega t)/sin\omega T & (26)\\ &+ x_a(sin\omega t_b cos\omega t - cos\omega t_b sin\omega t)/sin\omega T & (27)\\ &= \frac{x_b sin\omega(t - t_a) + x_a sin\omega(t_b - t)}{sin\omega T}. & (28) \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird die Wirkung des klassischen Pfads $x_{kl}(t)$ bestimmt.

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_a}^{t_b} L dt & (29)\\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{m}{2}\dot{x}_{kl}^2 - \frac{m\omega}{2}x_{kl}^2 \right\} dt & (30)\\ &= \left[\frac{m}{2}x_{kl}(t_b)\dot{x}_{kl}(t_b)\right]_{t_a}^{t_b} - \frac{m}{2}\int_{t_a}^{t_b} x_{kl}\left\{\ddot{x}_{kl} + \omega^2 x_{kl}\right\} dt & (31)\\ &= \frac{m}{2}\left\{x_{kl}(t_b)\dot{x}_{kl}(t_b) - x_{kl}(t_a)\dot{x}_{kl}(t_a)\right\}. & (32) \end{aligned}$$

Mit

$$x_{kl} = \frac{x_b sin\omega(t-t_a) + x_a sin\omega(t_b - t)}{sin\omega T}$$

und

$$\dot{x}_{kl} = \frac{x_b cos\omega(t-t_a) - x_a cos\omega(t_b - t)}{sin\omega T} \cdot \omega$$

folgt

$$S_{kl} = \frac{m\omega}{2sin\omega T}\left\{(x_a^2 + x_b^2)cos\omega T - 2x_a x_b)\right\}. \qquad (33)$$

Als Nächstes betrachtet man einen beliebigen Pfad $x(t)$. Dieser lässt sich auch durch den klassischen Pfad $x_{kl}(t)$ darstellen, siehe Abbildung 2:

$$x(t) = x_{kl}(t) + y(t)$$

wobei für $y(t)$ die Randbedingungen $y(t_a) = y(t_b) = 0$ gelten. Die Wirkung von $S[x] = S[x_{kl}+y]$

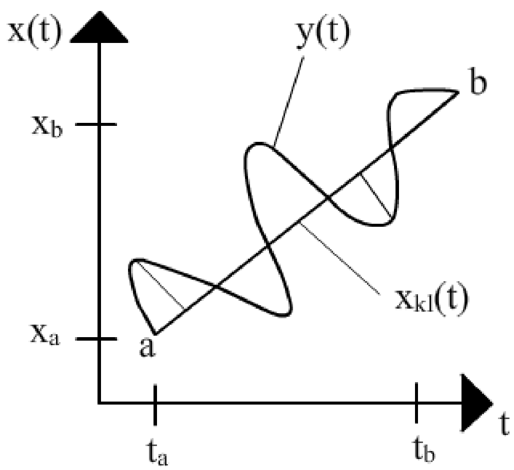

Abbildung 2: beliebiger Pfad $x(t) = x_{kl}(t) + y(t)$

lässt sich um den klassischen Pfad x_{kl} taylorentwickeln.

$$S[x] = S[x_{kl}] + \int_{t_a}^{t_b} dt \frac{\delta S[x_{kl}]}{\delta x(t)} y(t) + \frac{1}{2}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t_b} dt dt' \frac{\delta^2 S[x_{kl}]}{\delta x(t)\delta x(t')} y(t)y(t') \qquad (34)$$

mit $\frac{\delta S[x_{kl}]}{\delta x(t)} = 0$. Da S eine quadratische Wirkung ist, kann die Entwicklung nach dem 3. Term abgebrochen werden. Mit der zweifachen Funktionalableitung

$$\frac{\delta^2 S[x_{kl}]}{\delta x(t)\delta x(t')} = \frac{\delta}{\delta x(t')}\frac{\delta S}{\delta x(t)} \qquad (35)$$

$$= \frac{\delta}{\delta x(t')}(-m\ddot{x}(t) - m\omega^2 x(t)) \qquad (36)$$

$$= -m\frac{d^2}{dt^2}\delta(t-t') - m\omega^2\delta(t-t') \qquad (37)$$

eingesetzt in $S[x]$ ergibt sich folgende Gleichung

$$\begin{aligned} S[x] &= S[x_{kl} - \frac{m}{2}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t_b} dtdt' \left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right) y(t)y(t')\delta(t-t') && (38) \\ &= S[x_{kl}] + \frac{m}{2}\int_{t_a}^{t_b} dt \left\{ \left(\frac{d}{dt}\dot{y}(t)\right)^2 - \omega^2 y(t) \right\} && (39) \\ &= S[x_{kl}] + S[y]. && (40) \end{aligned}$$

Die Gleichung zeigt, dass die Wirkung eines beliebigen Pfades $x(t)$ sich additiv aus der Wirkung des klassischen Pfades x_{kl} und der Wirkung der Abweichung $y(t)$ vom klassichen Pfad zusammensetzt. Damit lässt sich die Übergangsamplitude berechnen

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b; x_a, t_a) &= \int Dx e^{i/\hbar S[x]} && (41) \\ &= \int Dx e^{i/\hbar (S[x_{kl}]+S[y])}. && (42) \end{aligned}$$

Da $S[x_{kl}]$ unabhängig vom Anfangs- und Endpunkt x_a und x_b ist, folgt

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = e^{i/\hbar S[x_{kl}]} \int_{y(t_a)=y(t_b)=0} Dy e^{i/\hbar S[y]} \tag{43}$$

mit $S[y] = \frac{m}{2}\int_{t_a}^{t_b} dt(\dot{y}^2 - \omega^2 y^2)$. Das Pfadintegral ist Zeitinvariant, deshalb kann das Integral von $0 \to T$ integriert werden. Dies sollte die nachfolgenden Rechenschritte vereinfachen.

$$S[y] = \int_0^T (\dot{y}^2 - \omega^2 y^2) dt \tag{44}$$

Durch partielle Integration erhalten wir den folgenden Ausdruck für die Wirkung $S[y]$

$$\begin{aligned} &= \frac{m}{2}\int_0^T (\dot{y}\dot{y} - \omega^2 y^2) dt && (45) \\ &= \frac{m}{2}[y\dot{y}]_0^T - \frac{m}{2}\int_0^T (y\ddot{y} + \omega^2 y^2) dt && (46) \\ &= \frac{m}{2}\int_0^T \left\{ y(t)\left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2\right) y(t) \right\} dt. && (47) \end{aligned}$$

Im Integral steht der Operator $\left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2\right)$. Die zentrale Frage diesbezüglich ist, wie wirkt der Operator auf $y(t)$? Mit den Randbedingungen $y(0) = y(T) = 0$ sollte uns diese Problemstellung an die quantenmechanische Behandlung eines Teilchens im Potentialtopf mit der Breite T erinnern. In diesem Zusammenhang gilt für die Eigenfunktionen

$$y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} sin \frac{n\pi t}{T} \text{ mit } n = 0, 1, 2, ... \,. \tag{48}$$

Die Eigenfunktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem, deshalb lässt sich $y(t)$ aus $y_n(t)$ entwickeln

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n(t). \tag{49}$$

Lässt man den Operator $\left(-\frac{d^2}{dt^2}-\omega^2\right)$ auf die Funktionen y_n wirken, ergeben sich die Eigenwerte λ_n des Operators.

$$\begin{aligned}\left(-\frac{d^2}{dt^2}-\omega^2\right)y_n(t) &= \left(-\frac{d^2}{dt^2}-\omega^2\right)\sqrt{\frac{2}{T}}sin\frac{n\pi t}{T} &(50)\\ &= \left(\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2-\omega^2\right)\sqrt{\frac{2}{T}}sin\frac{n\pi t}{T} &(51)\\ &= \lambda_n y_n(t). &(52)\end{aligned}$$

Damit lässt sich der Ausdruck für die Wirkung $S[y]$ umformen zu

$$\begin{aligned}S[y] &= \frac{m}{2}\int_0^T\left\{y(t)\left(-\frac{d^2}{dt^2}-\omega^2\right)y(t)\right\}dt &(53)\\ &= \frac{m}{2}\int_0^T\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_m y_m\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n a_n y_n\right)dt. &(54)\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Orthonormalitätsbedingung

$$\int_0^T dt y_n(t) y_m(t) = \delta_{n,m}$$

folgt

$$S[y] = \frac{m}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\lambda_n. \tag{55}$$

Um unser Ziel nicht aus den Augen zu verlieren, kehren wir zurück zur eigentlichen Gleichung, die wir bestimmen wollen, der Übergangsamplitude:

$$\begin{aligned}K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \int Dx e^{i/\hbar S[x]} &(56)\\ &= e^{i/\hbar S[x_{kl}]}\int Dy e^{i/\hbar S[y]} &(57)\\ &= e^{i/\hbar S[x_{kl}]}F(t_b;t_a). &(58)\end{aligned}$$

Das Integrationsmaß geht auf Grund der Gleichung 55 über in $Dy = J\prod_{n=1}^{\infty}da_n$. Dabei ist J ein unbestimmter Normierungsfaktor. Mit Hilfe von Gleichung 55 für die Wirkung von $S[y]$ lässt sich das Funktionalintegral $F(t_b;t_a) = F(T)$ bestimmen. Es folgt

$$\begin{aligned}F(T) &= \int Dy e^{i/\hbar S[y]} &(59)\\ &= J\int\prod_{n=1}^{\infty}e^{i/\hbar \frac{m}{2}\lambda_n a_n^2}da_n &(60)\\ &= J\prod_{n=1}^{\infty}\int e^{i/\hbar \frac{m}{2}\lambda_n a_n^2}da_n &(61)\\ &= J\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2\hbar\pi i}{\lambda_n m}} &(62)\end{aligned}$$

Um J zu eliminieren, wird der Fall betrachten, was passiert, wenn $\omega = 0$ ist. Dann ergibt sich die Lagrange-Funktion zu $L = \frac{m}{2}\dot{x}^2$, entsprechend der Langrange-Funktion eines freien Teilchens L_0. Die Lösung des Funktionalintegrals für ein freies Teilchen ist dabei

$$F_0 = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar T}\right)^{1/2} \text{ mit den Eigenwerten } \lambda_n^{(0)} = \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2. \tag{63}$$

Im nächsten Schritt wird das Verhältnis zwischen $\frac{F(T)}{F_0(T)}$ bestimmt

$$\frac{F(T)}{F_0(T)} = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda_n}{\lambda_n^{(0)}}\right]^{-1/2} \tag{64}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{\omega^2 T^2}{n^2\pi^2}\right]^{-1/2} \tag{65}$$

$$= \left[\frac{sin\omega T}{\omega T}\right]. \tag{66}$$

Daraus ergibt sich dann für $F(T)$ folgender Ausdruck

$$F(T) = \frac{F(T)}{F_0(T)} \cdot F_0(T) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar sin\omega T}\right)^{1/2}. \tag{67}$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich nun die Übergangsamplitude bestimmen.

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar sin\omega T}\right)^{1/2} exp\left\{i\frac{m\omega}{2\hbar sin\omega T}\left[(x_b^2 + x_a^2)cos\omega T - 2x_bx_a\right]\right\}. \tag{68}$$

Diese Gleichung ist die sogenannte Mehlerformel. Sie stellt die zentrale Gleichung zur Bestimmung des Energiespektrums und der Eigenfunktionen dar. Um zu zeigen, dass mit Hilfe der Pfadintegraldarstellung des harmonischen Oszillators dieselben Ergebnisse erzielt werden, wie durch die Operatordarstellung in Abschnitt 2.1 wird im Folgendem das Energiespektrum aus der Mehlerformel bestimmt. Dazu bildet man die Spur von $e^{-i/\hbar HT}$. Allgemein gilt für die Spur

$$Sp\left(e^{-i/\hbar HT}\right) = \langle x| e^{-i/\hbar HT} |x\rangle = \sum_n e^{-i/\hbar E_n T} \tag{69}$$

oder über die Mehlerformel

$$Sp\left(e^{-i/\hbar HT}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,T,x,0)dx \tag{70}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar sin\omega T}} \int exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar sin\omega T}\left[2(cos\omega T-1)x^2\right]\right\} dx \tag{71}$$

$$= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar sin\omega T}} \left(\frac{2\pi\hbar sin\omega T}{im\omega 2(1-cos\omega T)}\right)^{1/2} \tag{72}$$

$$= \left(\frac{1}{2i^2 2sin^2(\frac{\omega}{2}T)}\right)^{1/2} \tag{73}$$

$$= \frac{1}{2isin\frac{\omega}{2}}T \tag{74}$$

$$= \frac{e^{-i\frac{\omega}{2}T}}{1-e^{-i\omega T}} \tag{75}$$

$$=^{geom.Reihe} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega(n+1/2)T} \tag{76}$$

Aus dem Vergleich der Gleichung 76 und der Gleichung 69 ergeben sich die Energieeigenwerte zu

$$E_n = \hbar\omega(n+1/2). \tag{77}$$

Dies entspricht der Gleichung 4. Es ergibt sich also durch die Pfadintegralberechnung des harmonischen Oszillators dasgleiche Ergebnis für das Energiespektrum wie bei der quantenmechanischen Behandlung durch Operatoren.

4 Quellen:

Münster, Gernot: *Quantentheorie*, Verlag: de Gruyter
http://www.physik.tu-dresden.de/itp/members/soffscripte/qf_2001.pdf