



Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Physik  
SS 09  
Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

# Formale Grundlagen und Messprozesse in der Quantenmechanik

Vortrag von Samantha Dooling

# 1 Formalistische Grundlagen

## 1.1 Der Hilbertraum

In der Quantenmechanik werden Zustände von Systemen durch Vektoren im komplexen Hilbertraum beschrieben. Diese Vektoren nennt man auch Zustandsvektoren.

Der Hilbertraum ist ein verallgemeinerter euklidischer Raum, bei dem die Vektoren durch Funktionen ersetzt werden. Diese Wellenfunktionen beschreiben den quantenmechanischen Zustand eines Teilchen, oder eines Systems.

Um so einen Zustand zu beschreiben, müssen wir erst eine geeignete Basis von  $H$  wählen. Da Wellenfunktionen nach der Orthonormalbasis entwickelt werden können, wählen wir eine Basis aus Funktionen  $u_n(x_1, x_2, \dots)$  mit der orthonormalen Bedingung:

$$\int \dots \int u_n(x_1, x_2, \dots)^* u_m(x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots = \delta_{nm}$$

Die Wellenfunktionen  $\psi$  eines Zustandes kann nun nach der ONB entwickelt werden:

$$\psi(x_1, x_2, \dots) = \sum_n a_n u_n(x_1, x_2, \dots)$$

mit den Koeffizienten:

$$a_n = \int \dots \int u_n(x_1, x_2, \dots)^* \psi(x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots$$

Diese Koeffizienten beschreiben außerdem die Komponenten des Vektors im Hilbertraum, solange die Wellenfunktion quadratintegabel ist. Das bedeutet:

$$\int \dots \int |\psi(x_1, x_2, \dots)|^2 dx_1 dx_2 \dots = \sum |a_n|^2 < \infty$$

ist endlich.

Diese Bedingung werden wir im folgenden voraussetzen, da im Allgemeinen die Dimension des Hilbertraums unendlich ist und ohne diese Bedingung können wir nicht die Länge eines Vektors bestimmen, die auch über diese Definition gegeben ist. Außerdem werden wir nur Zustände, mit normierten Vektoren, wählen:

$$\sum |a_n|^2 = 1$$

Zustände sind gleich wenn die Vektoren die gleiche Richtung haben, also wenn sie linear abhängig sind.

Das Skalarprodukt von zwei Funktionen  $\psi$  und  $\phi$  berechnet sich über das Integral des Produkts des komplexkonjugierten der ersten Funktion und der zweiten Funktion:

$$(\psi, \phi) = \int \dots \int \psi^*(x_1, x_2, \dots) \phi(x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots = \sum a_n^* b_n$$

Dabei sind  $a_n$  die Koeffizienten von  $\psi$  und  $b_n$  die Koeffizienten von  $\phi$ . Aus der Definition des Skalarprodukts schließt man, dass sich die Länge eines Vektors aus dem Produkt mit sich selbst berechnet. Daraus lässt sich folgern, dass die Länge reell und positiv ist.

Weitere Eigenschaften des Skalarprodukts sind die Linearität im ersten Faktor und die Antilinearität im Zweiten:

$$\begin{aligned} (a, \beta b + \beta' b') &= \beta(a, b) + \beta'(a, b') \\ (\alpha a + \alpha' a', b) &= \alpha^*(a, b) + \alpha'^*(a', b) \end{aligned}$$

Hierbei sind  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  komplexe Zahlen.

## 1.2 Operatoren im Hilbertraum

In der Quatenmechanik werden Veränderungen am System, also die Veränderung des Zustandes, durch Operatoren beschrieben. Operatoren im Hilbertraum beschreiben, wie ein Vektor in einen anderen transformiert wird.

Nennenswert sind lineare Operatoren. Für diese gilt:

$$A(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha A\phi + \beta A\psi$$

Dabei sind  $\phi$  und  $\psi$  zwei Zustandsvektoren,  $\alpha$  und  $\beta$  sind komplexe Koeffizienten, und  $A$  ist der Operator.

Zur Beschreibung von Messprozessen in der Quantenmechanik sind unitäre Transformation sehr von Bedeutung. Diese sind bijektive lineare Abbildungen, die längen- und winkelerhaltend sind, wie zum Beispiel die Drehung.

Die Normerhaltung ist äquivalent mit der Invarianz des Skalarprodukts:

$$(U\phi, U\psi) = (\phi, \psi)$$

Eine weitere wichtige Gruppe sind die selbstadjungierten Operatoren. Der adjungierte Operator zu  $A$  ist wie folgt definiert:

$$(A\phi, \psi) = (\phi, A^*\psi)$$

$A^*$  ergibt sich durch Transposition und komplexer Konjugation von  $A$ , d.h.  $A^* = \bar{A}^T$ .

Falls nun  $A = A^*$  ist, nennt man  $A$  auch selbstadjungiert. Diese Operatoren erfüllen die Eigenwertgleichung:

$$A\psi_\nu = \lambda_\nu \psi_\nu$$

Aufgrund der Eigenwertgleichung sieht man, dass der Operator  $A$  ein diskretes Spektrum hat. Der Vorteil bei selbstadjungierten Operatoren ist, dass die Eigenwerte  $\lambda_\nu$  reell sind und die Eigenzustände  $\psi_\nu$  zu verschiedenen Eigenwerten

orthogonal sind. Außerdem wenn man eine Messung an einem selbstadjungierten Operator durchführt, erhält man als Resultat die Eigenwerte. Mit diesen Eigenvektoren kann man nun eine Orthonormalbasis im Hilbertraum bestimmen, sodass man einen beliebigen Zustandsvektor als Linearkombination der neuen Basis schreiben kann:

$$\phi = \sum (\psi_\nu, \phi) \psi_\nu$$

Um nun die Auswirkungen des selbstadjungierten Operators  $A$  auf den Zustandsvektor  $\phi$  zu bestimmen, berechnet man:

$$A\phi = A \sum (\psi_\nu, \phi) \psi_\nu = \sum (\psi_\nu, \phi) A\psi_\nu = \sum (\psi_\nu, \phi) \lambda_\nu \psi_\nu$$

Die Messung des Operators  $A$  an einem System im Zustand  $\phi$ , liefert den Eigenwert  $\lambda_\nu$  mit der Wahrscheinlichkeit:

$$p_\nu = |(\psi_\nu, \phi)|^2$$

mit der Annahme dass  $\phi$  und  $\psi$  normiert sind.

Das System war vor der Messung also im Zustand  $\phi$  und nach der Messung im Zustand  $\psi_\nu$ .

Da nicht jeder Operator ein diskretes Spektrum hat, sondern vielleicht ein kontinuierliches oder ein zusammengesetztes Spektrum, ist es von Vorteil den Operator  $A$  als Projektionsoperator zu schreiben.

Für diesen gilt:

$$P_\nu \phi = (\psi_\nu, \phi) \psi_\nu$$

Dann lässt sich  $A$  wie folgt ausdrücken:

$$A = \sum \lambda_\nu P_\nu$$

Somit berechnet sich die Wahrscheinlichkeit  $p_\nu$  mit dem Projektionsoperator  $P_\nu$  zu:

$$p_\nu = (\phi, P_\nu \phi) = (P_\nu \phi, P_\nu \phi)$$

### 1.3 Direktes Produkt von Hilberträumen

Oft kann man eine Messung nicht durch Zustandsvektoren beschreiben die nur aus einem Hilbertraum sind. Man benötigt also ein Produkt von Hilberträumen, wenn man zwei Systeme beschreiben möchte, die Einflüsse aufeinander haben. Wie zum Beispiel die Messapparatur und das System, welches gemessen werden soll. Daher müssen wir das direkte Produkt von zwei unabhängigen Hilberträumen  $H_1$  und  $H_2$  bilden:  $H_1 \otimes H_2$ . Das direkte Produkt von zwei Vektoren  $\phi \in H_1$  und  $\psi \in H_2$  berechnet sich dann so:

$$(\phi \otimes \psi)_{\nu n} = \phi_{\nu} \psi_n \in H_1 \otimes H_2$$

Dieses ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems der ursprünglichen Hilberträume. Das Skalarprodukt von zwei Vektoren aus  $H_1 \otimes H_2$  ist dann wie folgt definiert:

$$(\phi \otimes \psi, \phi' \otimes \psi') = (\phi, \phi')(\psi, \psi')$$

Somit erhält man die Übergangswahrscheinlichkeit von  $\phi$  zu  $\phi'$  und von  $\psi$  zu  $\psi'$ :

$$|(\phi \otimes \psi, \phi' \otimes \psi')|^2 = |(\phi, \phi')|^2 |(\psi, \psi')|^2$$

Das direkte Produkt von zwei Operatoren A und B angewendet auf einen Zustand  $\Psi = \phi \otimes \psi$  aus dem Produktraum ist dann so definiert:

$$(A \otimes B)\Psi = (A \otimes B)\phi \otimes \psi = A\phi \otimes B\psi$$

Seien  $\phi, P_{\nu} \in H_1$  und  $\psi, Q_n \in H_2$  Vektoren und Projektionsoperatoren in den Hilberträumen, so kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass man bei der Messung des zusammengesetzten System gerade die Eigenwerte  $a_{\nu}$  und  $b_n$  erhält:

$$P_{\nu n} = (\phi \otimes \psi, (P_{\nu} \otimes Q_n)(\phi \otimes \psi)) = (\phi, P_{\nu}\phi)(\psi, Q_n\psi)$$

## 2 Messprozesse in der Quantenmechanik

### 2.1 Quantenmechanische Beschreibung der Messung

Um eine Messung, z.B. die des Ortes oder des Drehimpulses eines Teilchens, quantenmechanisch zu beschreiben, benötigt man ein direktes Produkt von Zustandsvektoren. Da das System, welches gemessen werden soll, mit der Messapparatur wechselwirkt, muss man auch diesen Zustand miteinbeziehen. Somit erhält man den Zustand des ganzen Systems, also Objekt und Apparatur, aus dem direkten Produkt der einzelnen Zustandsvektoren aus den entsprechenden Hilberträumen.

Wir gehen davon aus, dass wir die Messung an einem System durchführen, welches sich in einem Eigenzustand des zumessenden Operators befindet. Also befindet sich vor der Messung das Objekt im Zustand  $\sigma_k$  und die Messapparatur hat den Zustandsvektor  $a_0$ . Es ergibt sich der Zustand des Gesamtsystems zu:  $a_0 \otimes \sigma_k$ .

Um die Messung quantenmechanisch zu beschreiben gehen wir davon aus, dass das Objekt während der Messung im Zustand  $\sigma_k$  bleibt und die Messapparatur in einen Zustand übergeht, der den Zustand des Objekts korrekt anzeigt, also  $a_k$ . Diesen Zustand nennt man auch **Zeigerdarstellung**.

Es kann nun der Messvorgang wie folgt beschrieben werden:

$$a_0 \otimes \sigma_k \longrightarrow a_k \otimes \sigma_k \quad (1)$$

Dabei stellt der Pfeil den Moment der Messung dar. Führt man aber eine Messung an einem System durch das sich nicht nur in einem Eigenzustand befindet, sondern durch eine Linearkombinationen von Eigenvektoren beschrieben wird, gilt aufgrund der Linearität:

$$a_0 \otimes \sum \alpha_k \sigma_k = \sum \alpha_k (a_0 \otimes \sigma_k) \longrightarrow \sum \alpha_k (a_k \otimes \sigma_k) \quad (2)$$

Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man nun die Information, in welchem Zustand sich Objekt und Apparatur, nach Ablesen des Messergebnisses, befinden. Allerdings können wir keine Voraussagen treffen, wie die Zustände sind, bevor wir sie nicht abgelesen haben. Man nimmt an, dass sich das System Objekt + Apparatur, vor der Beobachtung, in einem Gemisch von Zuständen befindet. In diesem Mischzustand sind alle möglichen Ausgänge vorhanden und erst beim Ablesen des Resultats, geht das Gemisch in einen reinen Zustand über. Den Mischzustand beschreiben wir mit:

$$a_{(\mu)} \otimes \sigma_{(\mu)} \quad (3)$$

Ein reiner Zustand ist also ein Vektor im Hilbertraum und repräsentiert die maximale Kenntnis über das zu messende System, während ein Gemisch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über reine Zustände ist, bei der man eine unvollständige Kenntnis über den Zustand des Systems erhält.

Es gibt zwei Arten von zeitlicher Zustandsänderung. Erstens die unitäre Änderung bzw. kontinuierliche, gemäß der Schrödingergleichung und zweitens, die nicht unitäre Änderung, bzw. diskontinuierliche. Diese Änderung nennt man auch **Zustandsreduktion**. Der Übergang des Anfangszustandes  $a_0 \otimes \sigma_k$  in das Gemisch beschreibt so eine Zustandsreduktion. Der Übergang kann nicht durch die Schrödingergleichung beschrieben werden.

Wie oben schon erwähnt, kann man keine exakte Aussage über das Resultat liefern, solange man es nicht gesehen hat. Wir können aber statistische Aussagen treffen, also mit welcher Wahrscheinlichkeit das System in einem bestimmten Zustand ist. Es berechnet sich somit die Wahrscheinlichkeit, dass das Gesamtsystem im Zustand  $\nu$  ist, zu:

$$\left| a_\nu \otimes \sigma_\nu, \sum_k \alpha_k (a_k \otimes \sigma_k) \right|^2 = \left| \sum_k \alpha_k (a_\nu, a_k) (\sigma_\nu, \sigma_k) \right|^2 = \left| \sum_k \alpha_k \delta_{\nu k} \right|^2 = |\alpha_\nu|^2$$

Hierbei gilt, dass  $(a_\nu, a_k) = \delta_{\nu k}$  da die Zustände im Makroskopischen unterschiedbar sein müssen, und  $(\sigma_\nu, \sigma_k) = \delta_{\nu k}$  da die Eigenzustände orthogonal und normiert sind.

Es ist nun wichtig zu erfahren wie sich der statistische Operator  $\rho = \sum p_\nu P_\nu$  eines Systems während der Messung verhält. Für einen reinen Zustand  $|\varphi\rangle = \sum a_\nu |\psi_\nu\rangle$  ist der statistische Operator:

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= |\varphi\rangle \langle\varphi| = \sum_{\nu,\mu} a_\nu^* a_\mu |\psi_\nu\rangle \langle\psi_\mu| \\ &= \sum_\nu |a_\nu|^2 |\psi_\nu\rangle \langle\psi_\nu| + \sum_{\nu \neq \mu} a_\nu^* a_\mu |\psi_\nu\rangle \langle\psi_\mu| \end{aligned} \tag{4}$$

Man kann  $\rho_\phi$  aufteilen in Diagonalterme (die erste Summe in der zweiten Zeile) und in Nichtdiagonalterme, auch **Interferenzterme** genannt (die zweite Summe in der zweiten Zeile). Der statistische Operator für ein Gemisch, sieht folgendermaßen aus:

$$\rho_G = \sum_\nu |a_\nu|^2 |\psi_\nu\rangle \langle\psi_\nu| \tag{5}$$

Man sieht dieser Operator besteht nur aus Diagonaltermen und enthält keine Interferenzterme.

Man stellt sich nun die Frage, was bei der Messung mit dem statistischen Operator passiert und wie die Interferenzterme verschwinden.

Vor der Messung wird das System durch einen statistischen Operator  $\rho_0$  beschrieben, der eine Form hat wie in Gleichung (4). Wenn man nun die Messung ausführt, aber sich noch nicht das Ergebnis ansieht, befindet sich das System in einem Gemisch und wird durch einen statistischen Operator  $\rho_I$  beschrieben, wie in (5). Es kommt also zur Zustandsreduktion, was zur Folge hat, dass die Interferenzterme verschwinden. Nach Ablesen des Ergebnissen ist der statistische Operator  $\rho_{II} = |\psi_\nu\rangle \langle\psi_\nu|$ . Das Ergebnis wurde zur Kenntnis genommen und wir erhalten einen Eigenzustand des Systems.

Was passiert aber mit den Interferenztermen bei der Zustandsreduktion? Falls die Apparatur makroskopisch ist, sind die Interferenzterme sehr klein. Im Allgemeinen sind die Interferenzterme da, falls das System abgeschlossen ist, allerdings befindet sich der Beobachter immer außerhalb des Systems. Man kann nun sagen die Interferenzterme werden vernichtet, aufgrund der Wechselwirkung des Systems mit der Umgebung.

## 2.2 Probleme bei der Messbeschreibung

Das größte Problem bei der quantenmechanischen Messbeschreibung ist, dass das Ergebnis nicht genau vorhersagbar ist. Man kann nur Wahrscheinlichkeits-

aussagen über das Resultat treffen. Die statistischen Eigenschaften des Messergebnisses sind ein Postulat in der Quantenmechanik. Daher muss man sich den Zustandsvektor als „Werkzeug“ vorstellen, welches statistische Verknüpfungen beschreibt und nicht die Realität.

Wir haben die Zustandsvektoren (1) und (2) für das System Objekt + Apparatur kennengelernt. Eine wichtige Frage ist jetzt, ob diese Zustandsvektoren auch die vollständige Messung beschreiben?

Mit Gleichung (1) kann man die Messung vollständig beschreiben, aber nicht mit Gleichung (2). Denn hier befindet sich die Apparatur nicht im Zustand  $a_\nu$  mit der erwarteten Wahrscheinlichkeit  $|\alpha_\nu|^2$ . Wir haben oben zwar schon die Wahrscheinlichkeit berechnet, wenn das Gesamtsystem im Zustand  $\nu$  ist, aber wenn wir nur die Wahrscheinlichkeit haben wollen in welchem Zustand sich die Apparatur befindet, lässt es sich nicht so einfach berechnen.

Der Pfeil in (2) ergibt sich aus der Deterministik der quantenmechanischen Bewegungsgleichung, aber generel ist die Aussage statistisch. Daraus lässt sich schließen, dass (2) nur den statistischen Zusammenhang zwischen Apparatur und Objekt beschreibt.

Um das Problem zu beheben stellt man sich das Messresultat als Gemisch vor, siehe Gleichung (3). Das heißt einer der Zustandsvektoren aus (3) wird sich aus der Wechselwirkung zwischen Objekt und Apparatur mit der Wahrscheinlichkeit  $|a_\mu|^2$  ergeben. Bei der Beobachtung des Messergebnisses erfährt man dann, welche der vielen Möglichkeiten sich ereignet hat, d.h. die finale Beobachtung vergrößert unser Wissen über das Systems, ändert aber nichts daran.

Nun stellt sich die Frage, ob es konsistent ist mit der Quantenmechanik anzunehmen, dass am Ende einer realen Messung der Zustand des Gesamtsystems keine Wellenfunktion wie (2) ist, sondern ein Gemisch aus Zuständen wie in (3)?

Die Antwort daraus lautet nein!

Denn um ein Gemisch aus Zuständen zu erhalten, muss der Anfangszustand auch schon ein Gemisch gewesen sein. Die Quantenmechanik kann nur Zustandsänderung beschreiben von einem reinen in einen reinen Zustand und von Gemisch in Gemisch.

Die Annahme, dass das Messresultat vor der Beobachtung ein Gemisch ist, ist nicht kompatibel mit der Bewegungsgleichung der Quantenmechanik.

Wir stellen also eine weitere Annahme auf:

Der Zustand von Objekt + Apparatur ist ein Gemisch aus Zuständen, die eine definierte Zeigerposition haben.

Ein wichtiges Experiment um die Messung einer Observable zu beschreiben ist



der Stern-Gerlach-Versuch. Diesen werden wir im nächsten Kapitel diskutieren.

### 3 Das Stern-Gerlach Experiment

Im Jahr 1922 gelang es Otto Stern und Walther Gerlach die Richtungsquantelungen von Spins von Atomen nachzuweisen. Der Stern-Gerlach Versuch verläuft nach folgendem Prinzip:

Mit einem Atomstrahlrohr werden Silberatome durch ein inhomogenes Magnetfeld geschickt. Der Strahl wurde vorher mit zwei Blenden kollimiert, damit man einen parallelen Strahlenverlauf erhält. Nachdem die Silberatome durch das inhomogene Magnetfeld gelangt sind, erscheinen sie auf einem Schirm. Die klassische Erwartung würde zu einer kontinuierlichen Verteilung auf dem Schirm führen, doch es wurden zwei voneinander getrennte Silberflecken beobachtet.

Bei diesem Versuch wurden Silberatome benutzt, da bei ihnen nur das 5s Elektron einen Beitrag zum Gesamtdrehimpuls hat. Der Bahndrehimpuls hat in diesem Fall keinen Anteil, es trägt nur der Spinanteil vom 5s Elektron bei. Das erzeugte magnetische Moment des Silberatoms ist also proportional zum Spinanteil. Wählt man das Magnetfeld in Richtung der z-Achse, kann das magnetische Moment zwei verschiedene Werte annehmen: parallel und antiparallel zum Magnetfeld. Also hat der Spin auch nur zwei Einstellungsmöglichkeiten: up und down. So entsteht eine Quantelung der z-Komponente des Spins und der Strahl wird in zwei Teilstrahle aufgeteilt.

Dieses Experiment hat also das Ziel die z-Komponente des Spins zu messen. Der Zustand  $a_0$  aus Gleichung (2) wäre in diesem Fall die Position des Teilchens und die Zustände  $\sigma_k$  wären die zwei Einstellungsmöglichkeiten des Spins. Die möglichen Anfangszustände werden beschrieben durch  $a'_0, a''_0, \dots$ . Bezeichne nun Spin up:  $\sigma_+$  und Spin down:  $\sigma_-$ . Wird  $\sigma_+$  gemessen, erhält man das Resultat +1 und bei der Messung von  $\sigma_-$  erhält man das Ergebnis -1. Somit können wir den Messprozess wie folgt darstellen:

$$a_0 \otimes \sigma_+ \rightarrow a_+ \otimes \sigma_+$$

$$a_0 \otimes \sigma_- \rightarrow a_- \otimes \sigma_-$$

Das heißt,  $a_+$  zeigt das Resultat +1 und  $a_-$  zeigt das Resultat -1.

Es stellt sich nun die Frage, was passiert, wenn sich das Atom vor der Messung in einer Linearkombination  $\alpha\sigma_+ + \beta\sigma_-$  befindet. Wenn so ein Zustand gemessen wird erhält man das Resultat +1 mit einer Wahrscheinlichkeit von  $|\alpha|^2$  und -1 mit einer Wahrscheinlichkeit von  $|\beta|^2$ .

Ist z.B. der Anfangszustand des Objekts  $(\sigma_+ + \sigma_-) \frac{1}{\sqrt{2}}$  so würde man erwarten, dass die eine Hälfte der Zustände  $a'_0, a''_0, \dots$  das Resultat +1 liefern und die andere Hälfte der Zustände -1.

Der Messvorgang lässt sich dann wie folgt beschreiben:

$$a_0 \otimes (\sigma_+ + \sigma_-) \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow a_+ \otimes \sigma_+ \frac{1}{\sqrt{2}} + a_- \otimes \sigma_- \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Das heißt, keiner der Zustände  $a'_0, a''_0, \dots$  kann eindeutig +1 oder -1 als Resultat liefern.

Dies ist ein Problem, denn auf dem Schirm beobachtet man zwei eindeutige Silberflecken, also müsste man auch eindeutige Messungen durchführen können.

Eine theoretische Lösung des Problems wäre die Annahme, dass man mit einem geeignetem Magnetfeld die beiden Teilstrahlen wieder zusammenführen kann. Dieser Strahl wäre dann so wie der Strahl vor der Messung. Beide bestehen aus Atomen, bei denen die Spinpolarisation nicht genau bestimmbar ist. Das Gesamtsystem kann durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben werden, da die Teilchen der Bewegungsgleichung gefolgt sind. Somit könnte dieses Experiment durch die Quantenmechanik beschrieben werden.

Da dieses Experiment praktisch nicht durchzuführen ist hält man fest, dass das Stern-Gerlach-Experiment die statistischen Zusammenhänge zwischen dem Zustand der Apparatur und dem des Objekts zeigt. Es muss nicht die Realität beschrieben werden, sondern nur statistische Zusammenhänge geknüpft werden.