

Institut für Theoretische Physik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Das EPR-Paradoxon
Seminarbeitrag zur Theorie der Teilchen und Felder

Tobias Eschen

29.April 2009

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Das EPR-Paradoxon	3
2.1	Die ursprüngliche Formulierung	3
2.2	Die Darstellung von Bohm	4
3	Lösungsansätze	7
3.1	Verborgene Parameter	7
3.2	Kopenhagener Deutung	7
3.3	Prinzip der verhüllten Ordnung	7
3.4	weitere Ansätze	8
4	Zusammenfassung	8

1 Einleitung

Eine der wesentlichen Resultate der Quantentheorie ist die Erkenntnis, dass keine exakten Aussagen über den zukünftigen Zustand eines Systems gemacht werden können. Selbst wenn alle Informationen über den Ausgangszustand bekannt sind, können lediglich Wahrscheinlichkeitsaussagen über die zukünftige Entwicklung des Systems gemacht werden. Dieser Indeterminismus der Quantentheorie erscheint im Rahmen unserer Alltagserfahrung als nicht akzeptabel und sorgt daher für Zweifel an dieser Theorie.

Ein Gedanke, der die Unvollständigkeit der Quantentheorie scheinbar nachweist, wurde 1935 von Einstein, Podolski und Rosen (EPR) formuliert und ist als EPR-Paradoxon bekannt geworden.

2 Das EPR-Paradoxon

Obwohl Einstein zu den Mitbegründern der Quantentheorie gehörte, erschien ihm das Ergebnis des Indeterminismus der Physik als falsch. Das ihm zugeschriebene Zitat „Gott würfelt nicht“ drückt dies aus. In seiner Weltvorstellung bietet die Physik keinen Platz für eine Zufallskomponente. In seiner Vorstellung hat jede Ursache eine exakte Wirkung. Gleichzeitig hatte Einstein die Erfolge der Quantentheorie miterlebt und zweifelte diese nicht an. Er war der Meinung, dass die Quantentheorie in der bekannten Form zwar richtig, aber noch nicht vollständig sei.

2.1 Die ursprüngliche Formulierung

Der von EPR eingereichte Aufsatz, der 1935 in der Physical Review erschien, trägt den Titel: „Kann man die quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit als vollständig betrachten?“. Bereits anhand dieses Titels erkennt man, dass es sich nicht um einen rein mathematisch oder physikalischen Beitrag handelt, sondern in vielen Aspekten auch philosophische Fragen anreißt. Zur Beantwortung der Titelfrage müssen unter anderem folgende Fragen geklärt werden:

- Was ist (physikalische) Wirklichkeit?
- Was bedeutet Vollständigkeit?

Die Frage nach der physikalischen Realität bedeutet anders ausgedrückt, wann eine physikalische Größe in der Wirklichkeit existiert. Hier ist zum Beispiel überlegenswert, ob der Spin eines Elektrons als reale Größe in der Wirklichkeit vorkommt. Der Spin wurde ursprünglich postuliert, um den (anormalen) Zeeman-Effekt theoretisch zu erklären. Da sich dieses Postulat als sehr wirksam herausgestellt hat, hat der Spin Eingang in viele wichtige Formeln gefunden und wird als eigenständige Größe behandelt. Ist der Spin $\frac{1}{2}$ des Elektrons nun ein reales Objekt der physikalischen Wirklichkeit, oder handelt es sich hierbei lediglich um ein mathematisches Konzept?

Intuitiv beantwortet man die Frage, was physikalische Realität ist, indem man auf die menschlichen Sinne zurückgreift. Was man durch die Sinne wahrnehmen kann (hören, sehen, fühlen...), existiert wirklich.

Diese Beantwortung wirft jedoch Zweifel auf: es gibt physikalische Größen, wie zum Beispiel das Magnetfeld, welche von den menschlichen Sinnen nicht wahrgenommen werden können. Nur durch Messgeräte können wir uns ein passendes „Sinnesorgan“ nachbauen.

Die von EPR gewählte Formulierung, was physikalische Realität ist, wählt einen mathematischen Ansatz: Wenn der Wert einer Größe aus der Theorie mit Sicherheit vorhergesagt werden kann, dann gibt es auch ein Objekt in der physikalischen Realität, welches dieser Größe entspricht. Dieses Kriterium ist ein hinreichendes, kein notwendiges, Kriterium. Über dieses Kriterium hinaus gibt es natürlich auch reale Größen der Wirklichkeit, die (bisher) nicht durch eine Theorie beschrieben werden.

Bohr, der innerhalb von 3 Monaten eine Rückantwort auf den veröffentlichten EPR-Aufsatz lieferte, bevorzugte ein anderes Kriterium: In seinen Augen können nur solche Größen als existierend angenommen werden, die durch ein Messgerät nachgewiesen wurden.

Der ursprüngliche Aufsatz von EPR beschäftigt sich in vielen Fragen mit solchen abstrakten Definitionen. In der physikalischen Diskussion bevorzugt man eine später von Bohm dargestellte Variation des Problems, welche keine definierbaren Kriterien benötigt, sondern lediglich mit quantentheoretischen Konzepten arbeitet.

2.2 Die Darstellung von Bohm

Das von Bohm beschriebene Problem behandelt ein Spinsystem, welches aus zwei Teilsystemen, die jeweils einen halbzahligen Spin haben, besteht. Im Ausgangszustand befindet sich das System im Singulett-Zustand:

$$|\psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

Der Singulett-Zustand zeichnet sich dadurch aus, dass die beiden Teilsysteme entgegengesetzte z-Komponente des Spins haben. Der Gesamtspin verschwindet also.

Man kann nun annehmen, dass dieses System nach einer gewissen Zeit zerfällt und sich die beiden Teilsysteme voneinander fortbewegen. Messen wir nun nach einiger Zeit die z-Komponente des ersten Teilsystems, so können wir annehmen, dass wir dort den Spin-Up messen. Da der Gesamtspin beider Teilsysteme null sein muss, ist klar, dass jede folgende Messung am Teilsystem 2 den Spin-Down ergeben wird.

Im Gedankenexperiment können wir annehmen, dass das zweite Teilsystem sehr weit vom ersten entfernt ist. Durch die Messung am Teilsystem 1 wurde der Zustand des Teilsystems 2 also nicht verändert. Physikalisch ausgedrückt heißt dies, dass bei der Messung keine Wechselwirkung zwischen beiden Teilsystemen stattfindet.

Als logische Konsequenz bedeutet dies, dass der Zustand des zweiten Teilsystems schon vor der Messung am ersten Teilsystem vorlag. Dies heißt wiederum, dass sich auch das erste Teilsystem vor der Messung schon im später gemessenen Zustand befand, da auch zu dieser Zeit vor der Messung der Gesamtspin immer verschwinden muss. Dieser eindeutige Produktzustand beider Teilsysteme lag also bereits beim Zerfall vor.

Es lässt sich einwerfen, dass die Annahme beim Teilsystem 1 den Spin-Up zu messen, willkürlich war. Beim entgegengesetzten Fall (Teilsystem 1 mit Spin-Down) erhält man aber ebenfalls einen konkreten Produktzustand, der bereits beim Zerfall vorlag. Die Unkenntnis, welcher genaue Produktzustand vorliegt, hat ihre Ursache lediglich im Mangel an Informationen. Prinzipiell liegt ein klar definierter Zustand vor. Dies wird in der Quantentheorie als „gemischter Zustand“ bezeichnet. Reine Zustände, wie zum Beispiel der Singulett-Zustand, befinden sich einer Superposition von Zuständen. Anschaulich befindet sich das System also in einer Überlagerung aus verschiedenen Zuständen.

Als Ergebnis dieses Gedankenexperiment erhalten wir, dass wir in einem reinen Singulett-Zustand starten, aber dieser scheinbar auch bereits ein gemischter Zustand sein muss.

Um dieses Ergebnis zu klassifizieren, muss geklärt werden, ob der Unterschied zwischen dem reinen Zustand und dem gemischten Zustand lediglich theoretischer Natur ist, oder ob es auch einen messbaren Unterschied gibt. Zu diesem Zweck wird der Erwartungswert des Quadratspins in beiden Zuständen berechnet. Folgende Beziehungen sind für diese Berechnungen hilfreich:

$$\begin{aligned}
 S^2 &= S_1^2 + S_2^2 + 2 S_{1,z} S_{2,z} + S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+ \\
 S^2 | \uparrow \rangle &= \hbar^2 I(I+1) | \uparrow \rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 | \uparrow \rangle = S^2 | \downarrow \rangle \\
 S_z | \uparrow \rangle &= \hbar m_z | \uparrow \rangle = \frac{1}{2} \hbar | \uparrow \rangle \\
 S_z | \downarrow \rangle &= -\frac{1}{2} \hbar | \downarrow \rangle \\
 S^\pm | \psi_{l,m} \rangle &= \hbar \sqrt{I(I+1) - m(m \pm 1)} | \psi_{l,m \pm 1} \rangle
 \end{aligned}$$

Die folgende Rechnung liefert den Erwartungswert für den reinen Zustand.

$$\begin{aligned}
 \langle S^2 \rangle &= \langle \psi_S | S^2 | \psi_S \rangle \\
 S^2 | \psi_S \rangle &= S^2 \frac{1}{\sqrt{2}} (| \uparrow \downarrow \rangle - | \downarrow \uparrow \rangle) \\
 \sqrt{2} S^2 | \psi_S \rangle &= S_1^2 | \uparrow \downarrow \rangle + S_2^2 | \uparrow \downarrow \rangle + 2 S_{1,z} S_{2,z} | \uparrow \downarrow \rangle + S_1^+ S_2^- | \uparrow \downarrow \rangle + S_1^- S_2^+ | \uparrow \downarrow \rangle \\
 &\quad - (S_1^2 | \downarrow \uparrow \rangle + S_2^2 | \downarrow \uparrow \rangle + 2 S_{1,z} S_{2,z} | \downarrow \uparrow \rangle + S_1^+ S_2^- | \downarrow \uparrow \rangle + S_1^- S_2^+ | \downarrow \uparrow \rangle) \\
 &= \hbar^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2}{4} - 1 \right) | \uparrow \downarrow \rangle - \hbar^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2}{4} - 1 \right) | \downarrow \uparrow \rangle \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Der Erwartungswert von S^2 ist im reinen Singulett-Zustand also 0. Analog lässt sich für den Triplett-Zustand ($|\psi_T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$) der Erwartungswert 1 berechnen. Im gemischten Zustand berechnet sich der Erwartungswert aus den Erwartungswerten in

den einzelnen Zuständen multipliziert mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}\langle S^2 \rangle_{\text{Gemisch}} &= \sum p_\alpha \langle \alpha | S^2 | \alpha \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \uparrow \downarrow | S^2 | \uparrow \downarrow \rangle + \frac{1}{2} \langle \downarrow \uparrow | S^2 | \downarrow \uparrow \rangle\end{aligned}$$

Verkürzen kann man diese Rechnung, in dem man erkennt, dass man die Zustände durch Triplett- und Singulett-Zustände beschreiben kann:

$$\begin{aligned}|\uparrow \downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_T + \psi_S) \\ |\downarrow \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_T - \psi_S)\end{aligned}$$

Die Erwartungswerte dieser beiden Zustände sind bekannt, sodass sich auch der Erwartungswert des gemischten Zustands leicht berechnen lässt.

$$\begin{aligned}\langle S^2 \rangle_{\text{Gemisch}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Der Erwartungswert von S^2 im gemischten Zustand ist also $\frac{1}{2}$. Vergleicht man die berechneten Erwartungswerte, so erkennt man, dass ein messbarer Unterschied zwischen dem reinen und dem gemischten Zustand existiert. Das Ergebnis der obigen Überlegung, dass ein Zustand also gleichzeitig ein Gemisch als auch ein reiner Zustand ist, ist also paradox und kann nicht richtig sein. In der folgenden Auflistung wird noch einmal die Argumentationslinie, die zum obigen Ergebnis führte, nachvollzogen.

1. Das System befindet sich im Singulett-Zustand und zerfällt in zwei Teilsystem
2. Der Spin des ersten Teilsystems wird gemessen und hat o.B.d.A den Wert Up
3. Da die beiden Teilsysteme weit voneinander entfernt sind kann keine Wechselwirkung zwischen beiden Teilsystemen stattfinden.
4. Da der Gesamtspin verschwinden muss, ist klar, dass das zweite Teilsystem den entgegengesetzten Spin hat. Dieser Zustand muss auch vor der Messung am Teilsystem 1 vorgelegen haben.
5. Bereits beim Zerfall lag ein konkreter Zustand vor

Betrachtet man diese Auflistung, so erkennt man, dass lediglich im dritten Schritt eine Annahme gemacht wird, die über die Erkenntnisse der Quantentheorie hinausgehen. Wahlweise muss also die Quantentheorie oder Schritt 3 falsch sein. Da die Quantentheorie in vielen Experimenten bestätigt wurde, lässt sich diese kaum anfechten.

Die Annahme, dass entfernte Objekte keine Wechselwirkung aufeinander ausüben, wird als Lokalität bezeichnet. Demensprechend spricht man aufgrund des dargelegten Paradoxons von der Nichtlokalität der Quantenmechanik. Es scheint eine unbekannte Fernwirkung stattzufinden, die sich instantan ausbreitet. Diese Annahme widerspricht der Relativitätstheorie und wurde von Einstein daher als „spukhafte Fernwirkung“ bezeichnet.

Zusammenfassend kann man das EPR-Paradoxon durch folgende Fragestellung beschreiben: Woher weiß das Teilsystem 2 instantan vom Ergebnis der Messung an Teilsystem 1?

3 Lösungsansätze

Viele Physiker haben versucht, das Paradoxon zu lösen. Dennoch scheint dieses Problem bis heute nicht gelöst zu sein, obwohl es verschiedene Ideen gibt, wie die Ergebnisse erklärt werden können.

3.1 Verborgene Parameter

Wie bereits erwähnt, vertrat Einstein die These, dass die Quantentheorie nicht vollständig sei. Diese Theorie, bezeichnet als Theorie der verborgenen Parameter, geht davon aus, dass aufgrund menschlicher Unkenntnis der Ausgangszustand eines Systems nicht exakt angegeben werden kann. Aufgrund dieser Unkenntnis entwickelt sich das System scheinbar zufällig.

Mit einer vollständigen Theorie könnte der Ausgangszustand exakt beschrieben werden und die Entwicklung würde deterministischen Gesetzen gehorchen. Bezogen auf die von Bohm dargelegte Variation des EPR-Paradoxon bedeutet dies, dass bereits vor dem Zerfall durch eine Variable festgelegt ist, welches Teilsystem bei einem Zerfall welchen Spin erhält. Es muss also keine Wechselwirkung stattfinden, damit das Teilsystem 2 erfährt, welchen Spin das Teilsystem 1 hat.

3.2 Kopenhagener Deutung

Das Realitätskriterium von Bohr, welcher zu den wesentlichen Begründern der Kopenhagener Deutung gehört, wurde bereits in der Einführung erläutert. Nach diesem Realitätskriterium existiert ein physikalisches Objekt erst, wenn es durch ein Messgerät nachgewiesen wurde. Annahmen über nichtbeobachtete Objekte dürfen und können nicht gemacht werden.

Die Fragestellung, welchen Wert ein Objekt vor einer Messung hat, macht also bei dieser Auffassung keinen Sinn.

3.3 Prinzip der verhüllten Ordnung

Nach Bohms Vorstellung gibt es in der Welt eine übergeordnete Ordnung. In dieser kann man nicht von der Existenz voneinander getrennter Objekte ausgehen. Betrachtet man

zwei scheinbar voneinander getrennte Objekte, so sieht man lediglich zwei Entitäten eines Objektes.

Erklärt wird diese Theorie im Wesentlichen durch Beispiele:

- bei einem Hologramm werden in jedem Bildpunkt Informationen über alle Objektpunkte gespeichert. Bei der Rekonstruktion des Aufnahme aus dem Hologramm können die dargestellten Objekte nicht als unabhängig voneinander aufgefasst werden, da alle Informationen in einem Bildpunkt verbunden sind.
- zwei Kameras sind aus verschiedenen Richtungen auf ein bewegliches Objekt gerichtet. Die Bilder beider Kameras sind in einem Nebenraum zu sehen. Es wirkt dort, als würde man zwei verschiedene Objekte sehen, bei denen es eine instantane Absprache gebe, obwohl es in Wirklichkeit nur ein Objekt gibt

Auch in dieser Erklärung muss also zwischen den Teilsystemen keine Information übermittelt werden, da beide Systeme in Wirklichkeit eins sind.

3.4 weitere Ansätze

Es gibt weitere Ansätze, die jedoch nicht vollständig ausgearbeitet sind. Erwähnenswert ist die Annahme der überlichtschnellen Potentiale. Nach dieser Theorie verändert sich bei einer Messung die Randbedingung des Potentials und instantan verändert sich das Potential im gesamten Raum. Eine Erklärung, wie eine Überlichtgeschwindigkeit möglich ist, gibt es jedoch nicht.

Ebenfalls Anhänger hat die Theorie, welche von der Existenz avancierter Wellen ausgeht. Bei einer Messung eines Teilsystems werden Signale in die Vergangenheit gesendet und führen dort zu einer Veränderung. Diese Veränderung der Vergangenheit beeinflusst auch das andere Teilsystem, und erklärt somit, woher dieses von der Messung am ersten Teilsystem weiß.

4 Zusammenfassung

Die Interpretation der Quantentheorie bereitet den Physikern bis heute Probleme. Insbesondere die Nichtlokalität lässt sich mit dem Weltbild der Menschen nur schwer vereinbaren. Die Diskussionen über das EPR-Paradoxon gehen weit über den rein physikalischen Mechanismus der Quantentheorie hinaus und zeigen, dass es eine beachtenswerte Schnittmenge zwischen Philosophie und Physik gibt.

Literatur

[BS] Baumann and Sexl. *Die Deutung der Quantentheorie*.

[Mün06] G. Münster. *Quantentheorie*. de Gruyter, 2006.

[Rae96] A. Rae. *Quantenphysik: Illusion oder Realität*. Reclam, 1996.

[Sel90] F. Selleri. *Die Debatte um die Quantentheorie*. Vieweg, 1990.