

# Die Bellsche Ungleichung

Zusammenfassung zum Seminarvortrag vom 06.05.2009

## Das EPR-Paradoxon

Die Bellsche Ungleichung ist ein wichtiger Beitrag zur Diskussion des 1934 von Einstein, Podolski und Rosen formulierten EPR-Paradoxons. Dabei geht es um die Anwendung einer Theorie zur Realität auf die Quantenmechanik. Dazu soll zunächst folgender, von den meisten Physikern akzeptierter Realitätsbegriff verwendet werden:

„Kann man den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit (das heißt mit der Wahrscheinlichkeit 1) vorhersagen, ohne ein System dabei in irgendeiner Weise zu stören, dann gibt es ein Element der physikalischen Wirklichkeit, das dieser physikalischen Größe entspricht.“<sup>1</sup>

Außerdem soll die Lokalitätsforderung gelten, d.h. es soll möglich sein, eine Messung an einem System A durchzuführen, ohne dass ein anderes System B beeinflusst wird. Zusammen werden die beiden obigen Forderungen als **Prinzip der Lokalen Realität** bezeichnet. Eine Theorie – wie zum Beispiel die Quantenmechanik – wäre nach diesen Kriterien vollständig, wenn jedem Element der physikalischen Wirklichkeit (kurz: Element der Realität) ein entsprechendes Gegenstück in dieser Theorie zugeordnet werden kann.

Bezüglich der Quantenmechanik kann dieser Ansatz anhand verschiedener Beispiele diskutiert werden. Einer davon ist ein Gedankenexperiment, bei dem ein Molekül M im Singulett-Zustand betrachtet wird. Dieses soll in die Spaltprodukte  $S_1$  und  $S_2$  zerfallen, die in einiger Entfernung von den Beobachtern  $B_1$  und  $B_2$  untersucht werden. Das soll unter Bedingungen geschehen, bei denen die Lokalitätsbedingung erfüllt ist. Die Entfernung  $\Delta x$  muss also mindestens  $c \cdot \Delta t$  betragen, wobei  $\Delta t$  die Zeit ist, die eventuell zwischen den Messungen liegt.

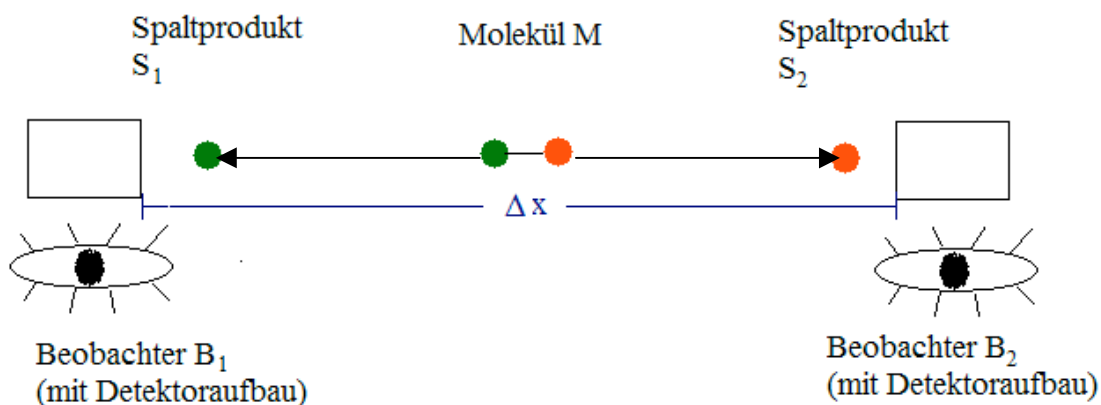


Abb.1 Veranschaulichung zum Gedankenexperiment Spin. Der Detektoraufbau könnte z.B. aus einem Stern-Gerlach-Magneten bestehen. Für Photonen, die im Folgenden ebenfalls diskutiert werden sollen, besteht der Detektoraufbau aus Polarisator und Photonendetektor.

Beobachtet werde nun die z-Komponente des Spins der Teilchen  $S_1$  und  $S_2$ . Die möglichen Ergebnisse sind  $s_{1,2z} = \pm 1$  in Einheiten von  $\hbar/(4\pi)$ . Aus der Drehimpulserhaltung folgt außerdem  $s_{1z} = -s_{2z}$ . Damit lässt sich  $s_{2z}$  mit der Wahrscheinlichkeit 1 vorhersagen, ohne durch eine direkte Messung an  $S_1$  gestört worden zu sein. Daraus folgt:

**Nach EPR kann  $s_{2z}$  ein Element der Realität zugeordnet werden.**

Durch analoge Überlegungen lässt sich sowohl  $s_{1z}$  als auch den anderen Spinkomponenten  $s_{1x}$ ,  $s_{2x}$ ,  $s_{1y}$ ,  $s_{2y}$  ein Element der Realität zuordnen. Eine gleichzeitige Messung zweier verschiedener Spinkomponenten, z.B.  $s_{1x}$ ,  $s_{1z}$ ,

<sup>1</sup> Zitiert nach Franco Selleri. Die Debatte um die Quantentheorie (S.109)

wäre nach diesem Gedankengang ebenfalls möglich, indem  $s_{1x}$  direkt und  $s_{1z}$  indirekt über  $s_{2z}$  bestimmt wird. Das jedoch steht in Konflikt mit dem Formalismus der Quantenmechanik, in dem eine gleichzeitige, genaue Bestimmung zweier verschiedener Spinkomponenten ausgeschlossen ist.

**Die Quantenmechanik weist also nicht jedem Element der Realität eine theoretische Entsprechung zu.** Aus dieser Erkenntnis können verschiedene Schlussfolgerungen gezogen werden:

1. Die Systeme  $S_1$  und  $S_2$  erfüllen das Prinzip der Lokalen Realität nicht.
2. Die Quantenmechanik ist falsch.
3. Die Quantenmechanik ist unvollständig. Ist das der Fall, muss es **verborgene Parameter** geben, die den bis jetzt unbeschriebenen Elementen der Realität entsprechen.

Eine der ersten beiden Schlussfolgerungen annehmen zu müssen, wäre wenig wünschenswert, da entweder ein gängiger Realitätsbegriff oder eine bereits sehr weit entwickelte physikalische Theorie aufgegeben werden müsste. Daher ist die Diskussion der dritten Möglichkeit von Interesse, die auf die Bellsche Ungleichung führt.

## Mathematische Formulierung des EPR-Problems

Zur mathematischen Beschreibung des EPR-Problems soll das bereits beschriebene Spin-Experiment als Ausgangspunkt dienen. Man betrachtet zu diesem Zweck  $N$  Zerfälle des Moleküls  $M$  in die Systeme  $S_1$  und  $S_2$  und drückt die Verbindung, die zwischen den Spins der beiden Systeme besteht, durch die sogenannte **Korrelationsfunktion**  $P$  aus. Diese ist definiert als der Mittelwert des Produktes der Messergebnisse  $A$  (für  $S_1$ ) und  $B$  (für  $S_2$ ).

$$P(a, b) = \sum A_i \cdot B_i / N \quad (1)$$

Es wird über alle  $N$  Messungen summiert. Die Messergebnisse selbst folgen jeweils aus der Beobachtung **zweiwertiger Observablen**. Hier sind dies die Komponenten des Spins in verschiedene Richtungen  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}'$ :

$$\begin{array}{l} \text{System } S_1 \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{a} \\ \quad \quad \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{a}' \\ \text{System } S_2 \quad \boldsymbol{\tau} \mathbf{b} \\ \quad \quad \quad \boldsymbol{\tau} \mathbf{b}' \end{array}$$

Dabei sind  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\boldsymbol{\tau}$  die entsprechenden Paulimatrizen der beiden Systeme.

Unter der Annahme, dass tatsächlich **verborgene Parameter** existieren, sollten die Messergebnisse  $A$ ,  $A'$ ,  $B$  und  $B'$  jeweils  $\pm 1$  liefern (in Einheiten von  $\hbar/4\pi$ ). Tritt nun eine bestimmte Kombination dieser Messergebnisse in einem Experiment  $n$  mal auf, so kann man die Korrelationsfunktion schreiben als:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum n(A, A', B, B') \cdot A \cdot B / N \quad (2)$$

Es wird über alle Werte für  $A$ ,  $A'$ ,  $B$ ,  $B'$  summiert. Dann kann man die verschiedenen Korrelationsfunktionen geschickt kombinieren:

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| \leq |A| \cdot |B - B'| \cdot \sum n(A, A', B, B') / N \quad (3)$$

$$|P(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq |A'| \cdot |B + B'| \cdot \sum n(A, A', B, B') / N \quad (4)$$

Wegen  $|A'| = |A| = 1$  und  $|B - B'| + |B + B'| = 2$  gilt bei Addition von (3) und (4):

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + |P(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq 2 \quad (5)$$

Diese Relation (5) wird als die **Bellsche Ungleichung** bezeichnet.

Demgegenüber lässt sich die Situation auch quantenmechanisch diskutieren. Der Mittelwert, wie für die Korrelationsfunktion erforderlich, entspricht hier dem Erwartungswert eines Operators, der aus den Observablen für beide Systeme gebildet werden muss:

$$\hat{Z} = \hat{\sigma} \mathbf{a} \otimes \hat{\tau} \mathbf{b} \quad (6)$$

Der zu betrachtende Zustand ist entsprechend der Voraussetzungen von EPR der Singulettzustand, der wie folgt aussieht:

$$\eta_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_+ v_- - u_- v_+) ; u_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{\pm} \text{ analog} \quad (7)$$

mit  $u, v$  als den Eigenvektoren zu jeweils einer Komponente der Pauli-Matrizen  $\sigma$  bzw.  $\tau$ . ( $u$  ist also System  $S_1$ ,  $v$  System  $S_2$  zugeordnet. Gl. (7) gilt für beliebige Einheitsvektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ . Für die Korrelationsfunktion ergibt sich:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \eta_s^\dagger (\vec{\sigma} \vec{a} \otimes \vec{\tau} \vec{b}) \eta_s \quad (8)$$

Zu beachten ist dabei, dass die Pauli-Matrizen nur auf die Spinoren der zugehörigen Teilchen wirken. Formt man Gl. (8) um, werden sich also Elemente der Form  $u^\dagger \cdot \sigma \mathbf{a} \cdot u \cdot v^\dagger \cdot \tau \mathbf{b} \cdot v$  ergeben. Bezeichnet man diese mit  $(\sigma \mathbf{a})_{\pm}$  und  $(\tau \mathbf{b})_{\pm}$ , je nach dem, ob  $u_+$  oder  $u_-$  bzw.  $v_+$  oder  $v_-$  relevant ist, kann man auch schreiben:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \left\{ (\vec{\sigma} \vec{a})_{++} (\tau \mathbf{b})_{--} + (\vec{\sigma} \vec{a})_{--} (\tau \mathbf{b})_{++} - (\vec{\sigma} \vec{a})_{+-} (\tau \mathbf{b})_{-+} - (\vec{\sigma} \vec{a})_{-+} (\tau \mathbf{b})_{+-} \right\} \quad (9)$$

Die einzelnen Elemente berechnen sich dann gemäß

$$(\vec{\sigma} \vec{a})_{++} = \begin{pmatrix} (1 \ 0) & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & a_1 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (1 \ 0) & \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & a_2 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ (1 \ 0) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & a_3 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

sodass für die Korrelationsfunktion folgt:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (10)$$

Werden die Parameter so gewählt, dass die Einheitsvektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  genau senkrecht aufeinander stehen, ergibt sich für die im Rahmen der Bellschen Ungleichung betrachtete Kombination von Korrelationsfunktionen:

$$|P(p, q) - P(p, q')| + |P(p', q) + P(p', q')| = 2 \cdot 2^{1/2} > 2 \quad (11)$$

**Damit widersprechen die Vorhersagen der Quantenmechanik (11) denen der Bellschen Ungleichung (5). Die These der Unvollständigkeit der Quantenmechanik, die ja durch die Bellsche Ungleichung beschrieben wird, ist also FALSCH.**

## Experimente zum EPR-Problem

Es verbleiben die folgenden Lösungen für das EPR-Problem:

1. Die Systeme  $S_1$  und  $S_2$  erfüllen das Prinzip der Lokalen Realität nicht.
2. Die Quantenmechanik ist falsch.

Diese beiden Möglichkeiten können jedoch überprüft werden, indem die Vorhersagen nach Bell bzw. nach der Quantenmechanik mit dem Experiment verglichen werden. Allerdings sind Spinnmessungen im Experiment kompliziert, weshalb viele Experimente auf der Polarisation von Photonen basieren. Ein Beispiel hierfür ist das EPR-Experiment von **Clauser, Horne, Shimony und Holt** (kurz CHSH) von 1969. Dabei werden zwei

Photonen durch die Abregung eines in einem angeregten Zustand befindlichen Teilchens erzeugt. Diese werden in entgegengesetzte Richtungen emittiert und sind dann bezüglich ihrer Polarisation ebenso korreliert wie die Spins der Spaltprodukte aus der vorangegangenen Überlegung. Die Polarisationsmessung erfolgt dann unter Verwendung entsprechender Filter an den Orten der Beobachter, wobei wir die Ausrichtungen der Filter mit  $\mathbf{a}$  für System  $S_1$  und  $\mathbf{b}$  für  $S_2$  bezeichnen. Ein hinter dem Polarisator aufgebauter Photodetektor gestattet dann die Messung der zu betrachtenden zweiwertigen Observablen: „Wird das Photon durchgelassen?“. Die entsprechenden Ergebnisse seien  $A(\mathbf{a}) = \pm 1$  (System  $S_1$ ) und  $B(\mathbf{b}) = \pm 1$  ( $S_2$ ), wobei  $\pm 1$  ja bzw. nein symbolisiert.

Mit diesen Überlegungen ist dann wieder die Betrachtung der Korrelationsfunktion nötig, die analog zur Spin-Diskussion als Mittelwert von  $A \cdot B$  definiert sein soll. Bei einer großen Anzahl von Messungen kann sie jedoch auch als Kombination der Wahrscheinlichkeiten  $T$  für eine bestimmte Konfiguration aufgefasst werden:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = T(\mathbf{a}+, \mathbf{b}+) - T(\mathbf{a}+, \mathbf{b}-) - T(\mathbf{a}-, \mathbf{b}+) + T(\mathbf{a}-, \mathbf{b}-) \quad (12)$$

Die negativen Summanden entstehen natürlich dadurch, dass das Produkt  $A \cdot B$  für  $A$  und  $B$  mit verschiedenen Vorzeichen negativ ist. Die Summe aller Wahrscheinlichkeiten muss offensichtlich 1 ergeben:

$$1 = T(\mathbf{a}+, \mathbf{b}+) + T(\mathbf{a}+, \mathbf{b}-) + T(\mathbf{a}-, \mathbf{b}+) + T(\mathbf{a}-, \mathbf{b}-) \quad (13)$$

Nun muss noch das Problem berücksichtigt werden, dass der Fall der Absorption eines Photons durch den Filter nicht direkt nachweisbar ist. Dass der Detektor nicht anspricht, kann auch z.B. durch andere Faktoren als den Filter bedingt sein, wie z.B. Wechselwirkungen des Photons mit Materie, falls der Versuch nicht im perfekten Vakuum durchgeführt wird. Es ist daher praktisch, den Fall zu betrachten, dass einer der Polarisationsfilter entfernt wird. Dieser Fall wird in den nachstehenden Gleichungen mit KP gekennzeichnet. Es muss gelten:

$$T(\text{KP}, \mathbf{b}+) = T(\mathbf{a}+, \mathbf{b}+) + T(\mathbf{a}-, \mathbf{b}+) \quad (14)$$

$$T(\mathbf{a}+, \text{KP}) = T(\mathbf{a}+, \mathbf{b}-) + T(\mathbf{a}+, \mathbf{b}+) \quad (15)$$

Schreibt man nun Gl. (12) mit Gl. (13) bis (15) um, so erhält man:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 4 T(\mathbf{a}+, \mathbf{b}+) - 2 T(\mathbf{a}+, \text{KP}) - 2 T(\text{KP}, \mathbf{b}+) + 1 \quad (16)$$

Darin wurden sämtliche Wahrscheinlichkeiten für Absorption eliminiert; es brauchen nur noch Fälle betrachtet werden, in denen der Detektor auch tatsächlich anspricht. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass Detektoren nach dem derzeitigen Stand der Technik nicht alle transmittierten Photonen registrieren können. Eine Messung wird also nicht die oben angegebenen Transmissionswahrscheinlichkeiten  $T$  widerspiegeln. Diese müssen noch mit einer **Detektionswahrscheinlichkeit**  $D_0$  (üblicherweise 10 bis 20%) gewichtet werden. Damit ergibt sich die kombinierte Wahrscheinlichkeit für Transmission und Durchlass zu

$$D(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = D_0 \cdot T(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = R(\mathbf{a}, \mathbf{b}) / N \quad (17)$$

$R(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  ist dabei die **Detektionsrate** und  $N$  die Zahl der emittierten Photonen. Da für die Messungen mit und ohne Filter zwei Messdurchläufe erforderlich sind, ist außerdem die **Zusatzannahme** notwendig, dass die Detektionswahrscheinlichkeit  $D_0$  für alle Messungen gleich, d.h. unabhängig von der Anwesenheit des Filters ist. Dann jedoch ist es möglich, Gl. (16) mit Gl. (17) so umzuschreiben, dass die Korrelationsfunktion durch die (messbaren) Detektionsraten ausgedrückt wird.

**Somit ist eine experimentelle Überprüfung der Bellschen Ungleichung MÖGLICH.**

Zu beachten ist hierbei, dass, um diese Überprüfbarkeit zu gewährleisten, die Bellsche Ungleichung umgeschrieben werden musste. Da sie von idealen Messgeräten ausgeht, wird sie als **Schwache Ungleichung** bezeichnet, während die von CHSH verwendete, modifizierte Ungleichung aufgrund ihrer Anpassung an die Beschränkungen der Messgeräte als **Starke Ungleichung** gilt. Welche starke Ungleichung im Einzelfall zu verwenden ist, hängt daher vom individuellen Messaufbau ab.

Experimente wie das von CHSH wurden in größerer Zahl durchgeführt. Soweit sie auf der Untersuchung von Photonen basieren, unterscheiden sie sich hauptsächlich durch die Verwendung verschiedener Photonenquellen und Polarisatoren. Die **Photonenerzeugung** geschieht in der Regel über die Anregung von Atomen durch Laser, wobei das Target-Material variiert werden kann. Ein Beispiel wäre die Calcium-Kaskade, die die Zustände mit dem Gesamtdrehimpuls ( $J = 0$ )  $\rightarrow$  ( $J = 1$ )  $\rightarrow$  ( $J = 0$ ) durchläuft und dabei, wie gewünscht, zwei korrelierte Photonen frei setzt. Die Art der Quelle bestimmt u.a. auch die Dauer des Experiments, die anfangs noch bei

200h, später jedoch bei 100 s (Aspect et al.) lag. Zu den **Polarisatoren** ist zu bemerken, dass das Polarisatormaterial möglicherweise das Messergebnis beeinflussen kann (Holt, Pipkin vs. Clauser: gleicher Aufbau, nur unterschiedliche Polarisatoren). Eine wichtige Neuerung war in diesem Bereich der Zwei-Wege-Polarisator, der die gleichzeitige Messung zweier Polarisationsrichtungen ermöglicht. Dadurch muss die Polarisationsrichtung während einer Messperiode nicht mehr festgehalten werden und eine weitere Möglichkeit, dass unterlichtschnelle Signalübertragung das Messergebnis verfälscht, kann eliminiert werden.

Eine Übersicht über Ergebnisse durchgeführter Elemente findet sich in der folgenden Tabelle. Die Liste erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, spiegelt aber die Resultate von EPR-Experimenten quantitativ recht gut wieder.

Jahr:	durchgeführt von:	Ergebnis bestätigt:
1972	Freedman, Clauser	QM
1973	Holt, Pipkin	Bell
1976	Clauser (I)	QM
1976	Clauser (II)	QM
1976	Fry, Thompson	QM
1981	Aspect, Grangier, Roger	QM
1982	Aspect, Grangier, Roger	QM
1982	Aspect, Dalibard, Roger	QM
?	Perrie, Duncan, Beyer, Kleinpoppen	QM
?	Hassan et al. (I)	QM
?	Hassan et al. (II)	QM

Die Zuverlässigkeit, die diesen Experimenten zugestanden wird, ist unterschiedlich. Kritiker argumentieren dabei insbesondere mit den in allen Fällen verwendeten Zusatzannahmen, wie sie schon bei CHSH notwendig waren, und mit der Möglichkeit, dass trotz Gegenmaßnahmen eine Beeinflussung zwischen den beiden notwendigen Messungen stattgefunden haben könnte. In dieser Beziehung ist das **Insbruck-Experiment** (Zeilinger, 1998) wichtig. Dieses war das erste, dass das sogenannte Kommunikationsschlupfloch vollständig berücksichtigte, indem die Messungen auf verschiedenen PCs aufgezeichnet und die Zeit des Messprozesses selbst kleiner als  $t = x/c$  gehalten wurde. Das Ergebnis war die Bestätigung der quantenmechanischen Vorhersagen bei einer Verletzung der Bellschen Ungleichung um ca. 40 Standardabweichungen. Allerdings gibt es auch beim Insbruck-Experiment noch Ansatzpunkte für Kritik: Zusatzannahmen konnten auch von Zeilinger nicht ganz vermieden werden.

## Fazit:

Es kann zusammengefasst werden, dass verborgene Parameter, wie durch den Widerspruch zwischen Bellscher Ungleichung und Quantenmechanik gezeigt, als Lösung für das EPR-Problem ausscheiden. Die Alternativen sind das Überdenken des Prinzips der Lokalen Realität und die Aufgabe der Quantenmechanik. Die bisher durchgeführten Experimente bestätigen bis jetzt mehrheitlich die Quantenmechanik. Das „perfekte“ Experiment, bei dem alle gängigen Kritikpunkte ausgeschlossen werden konnten, wurde allerdings noch nicht gefunden.



Abb.2: Übersicht über die Rolle der Bellschen Ungleichung in der Diskussion des EPR-Paradoxons.

## Quellen

Franco Selleri: Die Debatte um die Quantentheorie. Braunschweig: Vieweg, 1990

Experimente zum EPR-Paradoxon: <http://physik.uni-graz.at/~uxh/teaching/intern-qm/vortrag3.pdf> (Zugriff 01.05.09)

Gernot Münster. Quantentheorie. Berlin: deGruyter, 2006

## **Weitere Literaturhinweise**

Bernard D'Espagnat: „Quantentheorie und Realität“. Spektrum der Wissenschaft, 1980, Heft 1

J.S. Bell Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics. Cambridge, Cambridge University Press, 1987.

P.Reineker, M. Schulz, B.M. Schulz: Theoretische Physik III. Quantenmechanik I Weinheim: Wiley, 2007.

Eugene P. Wigner. „On Hidden Variables and Quantum Mechanical Probabilities“. American Journal of Physics Vol.38 No.8 1970.