Abelsche Eichsymmetrie

Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Anja Teuber

Münster, 11. Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Symmetrien spielen in der Physik nicht allein wegen der aus ihnen resultierenden Erhaltungsgrößen eine zentrale Rolle. Im Folgenden soll demonstriert werden, wie die Lagrange-Dichte der Quantenelektrodynamik hergeleitet werden kann, indem nach einer Feldtheorie gesucht wird, die invariant unter abelschen $U(1)$-Eichtransformationen und invariant unter Lorentz-Transformation ist. Es gilt, den fundamentalen Zusammenhang zwischen Eichinvarianz und der Form der Lagrange-Dichte zu erkennen.

2 Vorbereitung

In den folgenden Abschnitten sollen zunächst die Grundlagen skizziert und die wesentlichen Ergebnisse festgehalten werden, die zum Verständnis des Vortrags notwendig sind. Die Behandlung des eigentlichen Themas beginnt mit Abschnitt 3.

2.1 Eichinvarianz in der klassichen Elektrodynamik

Die Aussagen der klassischen Elektrodynamik können in den vier Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\jmath} + \dot{\vec{E}} \tag{3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \dot{\vec{B}} = 0 \tag{4}$$

zusammengefasst werden[1].
Aus diesem Satz von Differentialgleichungen kann die sog. Kontinuitätsgleichung für die Raumladungsdichte ρ und den Strom $\vec{\jmath}$ abgeleitet werden:

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\jmath} = 0 \tag{5}$$

Das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ können über das skalare Potential φ und das Vektorpotential $\vec{A}$ ausgedrückt werden; es gilt

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{6}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \dot{\vec{A}} \tag{7}$$

Dabei sind die Potentiale zunächst als mathematisches Hilfsmittel aufzufassen, das dazu dient die Maxwell-Gleichungen zu lösen. Durch die Reformulierung der Maxwell-Gleichungen in den Potentialen findet eine Reduktion der Information statt, da die sechs Komponenten der elektromagnetischen Felder auf vier Komponenten in den Potentialen reduziert werden. Aus diesem Vorgehen resultiert, dass weder skalares Potential φ noch Vektorpotential $\vec{A}$ durch ihre Definition

[1] Die hier angegebenen Gleichungen gelten im Vakuum. Sie sind, wie auch alle folgenden Gleichungen in diesem Vortrag, in natürlichen Einheiten ($c = 1$) formuliert.

und die Maxwell-Gleichungen eindeutig festgelegt sind. Die physikalischen Tatsachen, d.h. die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ändern sich durch die sog. Eichtransformationen

$$\varphi' = \varphi - \dot{f}(\vec{x}, t) \tag{8}$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f(\vec{x}, t) \tag{9}$$

mit einer beliebigen, zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f(\vec{x}, t)$ nicht, wie leicht durch Einsetzen der transformierten Größen in die Gleichungen (6) und (7) nachzuvollziehen ist. Anders gesprochen können aus einer gefundenen Lösung mithilfe der angegebenen Transformationen beliebig viele weitere Lösungen erzeugt werden.
Die Freiheit in der Wahl der Potentiale zur Beschreibung derselben physikalischen Gegebenheiten wird Eichfreiheit genannt; die zunächst durch Reduktion der Information gewonnenen „unphysikalischen“ Freiheitsgrade können durch Eichung festgelegt werden. Zur Entkopplung und Lösung der Maxwell-Gleichungen werden die Coulomb-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{10}$$

und die Lorentz-Eichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \dot{\varphi} = 0 \tag{11}$$

verwendet.

Die Elektrodynamik ist außerdem invariant unter Lorentz-Transformation, d.h. sie ist auch im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie gültig. Mithilfe des Vierer-Potentials

$$A^\mu(x) = \Big(\varphi(x), \vec{A}(x)\Big) \tag{12}$$

dem Vierer-Strom

$$j^\mu(x) = (\rho(x), \vec{j}(x)) \tag{13}$$

und dem Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \tag{14}$$

können die Maxwell-Gleichungen in ihrer Lorentz-invarianten Form hingeschrieben werden:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{15}$$

$$\partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\lambda F^{\mu\nu} = 0 \tag{16}$$

Die Kontinuitätsgleichung geht nun über in

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{17}$$

und die Eichtransformation, unter der der Feldstärketensor invariant ist, lautet entsprechend

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f(x) \tag{18}$$

2.2 Die Dirac-Gleichung

Auf der Suche nach relativistisch gültigen Wellengleichungen im Sinne der Quantenmechanik wurde zunächst von der freien Schrödinger-Gleichung

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2\psi = \hat{H}\psi \tag{19}$$

ausgegangen. Soll diese zusätzlich im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie gültig sein, muss die Energie-Impuls-Beziehung

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \tag{20}$$

gelten; übertragen auf den Hamilton-Operator $\hat{H}$ in der Schrödinger-Gleichung müsste

$$\hat{H}^2 = \hat{\vec{p}}^2 + m^2 \tag{21}$$

gelten. Durch Quadrieren von Gleichung (19) und Einsetzen von (21) wird die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\psi(x) = 0 \tag{22}$$

erhalten, wobei ψ wie ein Lorentz-Skalar transformiert.
Zwar liefert die Klein-Gordon-Gleichung physikalisch verwertbare Ergebnisse, jedoch treten einige Probleme auf (z.B. gibt es Lösungen negativer Energie, die aus der zweiten zeitlichen Ableitung resultieren). Paul Dirac suchte daher nach einer Schrödinger-artigen Wellengleichung, die linear sowohl in der zeitlichen als auch räumlichen Ableitung ist und linear im Hamilton-Operator; sein Ansatz war

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + m\beta\right)\psi = \hat{H}\psi \tag{23}$$

Durch die Forderung nach Forminvarianz der Gleichung unter räumlichen Drehungen wird klar, dass die Koeffizienten α_i und β keine einfachen Zahlen sein können. Um die Gültigkeit dieses Ansatzes unter den gegebenen Forderungen zu gewährleisten, muss ψ ein vierkomponentiger sog. Dirac-Spinor sein und die α_i und β jeweils 4×4-Matritzen; für die Dirac-Matrizen gilt

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

wobei σ_i die Pauli-Matrizen bezeichnet. In kovarianter Schreibweise wird zusammenfassend

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta\vec{\alpha}) \tag{26}$$

also

$$\gamma^0 = \beta, \qquad \gamma^i = \beta\alpha_i \tag{27}$$

definiert, wobei es sich bei γ^μ nicht um einen Vierer-Vektor handelt.
Die Dirac-Gleichung lautet damit

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi(x) = 0 \tag{28}$$

bzw. in der teilweise verwendeten „slash“-Schreibweise

$$\left(i\not{\partial} - m\right)\psi(x) = 0 \tag{29}$$

Um die Theorie später Lorentz-invariant formulieren zu können, wird ein sog. adjungierter Spinor gemäß

$$\overline{\psi} := \psi^{+}\gamma^{0} \tag{30}$$

definiert, der gerade so konstruiert ist, dass $\overline{\psi}\psi$ wie ein Lorentz-Skalar und $\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ wie ein Lorentz-Vektor transformiert.

2.3 Der Lagrange-Formalismus für Feldtheorien

Da die Schrödinger-Gleichung eine Wellengleichung im Sinne der Quantenmechanik ist, sollten zunächst auch die Klein-Gordon-Gleichung und die Dirac-Gleichung als Wellengleichungen aufgefasst werden. Dabei treten hinsichtlich der Verwendung in der Teilchenphysik unter anderem zwei Probleme auf: Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Spinoren ψ schlägt fehl und mit der bisher betrachteten Theorie können Teilchenerzeugung und -vernichtung nicht beschrieben werden.
Zur adäquaten Beschreibung von Teilchen wird von einem N-Teilchen-System mit den Koordinaten $x_i(t)$ für jedes der Teilchen zu einem System mit unendlich vielen Freiheitsgraden übergegangen, das durch das Feld $\phi(x,t)$ beschrieben wird. Die Handhabung des Feldes geschieht analog zur Mechanik über den Lagrange-Formalismus.

Entsprechend der Lagrange-Funktion $L(q,\dot{q}) = T - V$ in der analytischen Mechanik wird das Lagrange-Funktional $L[\phi(x,t), \partial_\mu \phi(x,t)]$ definiert, das vom Feld und dessen Ableitungen abhängt. Die zentrale Größe ist wiederum die Wirkung S mit

$$S = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' L\left[\phi\left(x,t'\right), \partial_\mu \phi\left(x,t'\right)\right] \tag{31}$$

Um die relativistische Gültigkeit der Theorie zu gewährleisten wird gefordert, dass die Wirkung ein Lorentz-Skalar sein soll. Dazu kann das Lagrange-Funktional als Raumintegral über eine Lagrange-Dichte $\mathcal{L}[(x,t), \partial_\mu \phi(x,t)]$ dargestellt werden, so dass die Wirkung als Raumzeitintegral geschrieben werden kann:

$$S[\phi] = \int \mathrm{d}t \underbrace{\int \mathrm{d}^3 x\, \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi]}_{=L} = \int \mathrm{d}^4 x\, \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi] \tag{32}$$

Der physikalische Inhalt der Theorie ergibt sich aus der Betrachtung aller möglichen Wege zwischen zwei Zuständen, d.h. es findet eine globale Charakterisierung des Systems anstatt einer lokalen Beschreibung wie etwa in der Newton-Mechanik statt. Dadurch wird der „Raum aller möglichen Konfigurationen“ erhalten, ein Raum, in dem alles enthalten ist, das mit dem System passieren kann. Das Hamilton'sche Prinzip besagt, dass ein System, das sich zwischen zwei Konfigurationen entwickelt, dies entlang des „Pfades“ in diesem Raum aller möglichen Konfigurationen tut, für den die Wirkung extremal ist.
Zur Herleitung der Dynamik des Systems werden die Felder gemäß $\phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi$ variiert, wobei die Variation $\delta\phi$ auf dem Rand des Raumzeitgebeits, über das in (32) integriert wird, verschwinden soll[2]. Schließlich werden die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} = 0 \tag{33}$$

[2]Da dieses Integrationsgebiet im Allgemeinen unendlich ist, soll die Variation im Unendlichen verschwinden, d.h. $\delta\phi = 0$ für $|x| \to \infty$.

für Felder erhalten.

2.4 Das Noether-Theorem

Das Noether-Theorem besagt, dass die Invarianz der Wirkung unter einer kontinuierlichen Symmetrietransformation einen erhaltenen Strom impliziert.
Zur Herleitung diese Noether-Stroms wird von einer allgemeinen Lagrange-Dichte $\mathcal{L}$ ausgegangen, die von den Koordinaten x, dem Feld $\phi(x)$ und dessen Ableitungen $\partial_\mu \phi(x)$ abhängt. Unter der gegebenen Transformation transformieren im Allgemeinen sowohl die Koordinaten als auch die Felder

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \tag{34}$$

$$\phi'\left(x'\right) = \phi(x) + \delta\phi(x) \tag{35}$$

wobei die Variation des Feldes mithilfe einer Taylor-Entwicklung als

$$\delta\phi(x) = \phi'\left(x'\right) - \phi(x) = \phi'(x + \delta x) - \phi(x)$$

$$\overset{Taylor}{\rightarrow} \qquad \delta\phi = \phi'(x) + \partial_\mu \phi'(x)\, \delta x^\mu - \phi(x) \tag{36}$$

dargestellt werden kann. Zur Berechnung der Transformierten der Wirkung müssen alle Größen transformiert werden, von denen die Wirkung abhängt, wobei eine entsprechende Entwicklung gesucht ist:

$$S' = \int \mathrm{d}^4 x'\, \mathcal{L}\left[x', \phi'\left(x'\right), \partial'_\mu \phi'\left(x'\right)\right] \stackrel{!}{=} S + \delta S + \dots \tag{37}$$

Nach längerer Rechnung kann die Variation δS als Raumzeitintegral

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4 x\, \partial_\mu J^\mu \stackrel{!}{=} 0 \tag{38}$$

geschrieben werden, wobei diese verschwinden soll für alle Variationen von den Koordinaten und den Feldern, so dass der Integrand verschwinden muss. Es folgt eine Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{39}$$

bzw. die Erhaltungsgröße

$$J^\mu = -\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \delta\phi + \theta^\mu_\nu \delta x^\nu \tag{40}$$

mit

$$\theta^\mu_\nu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial_\nu \phi - g^\mu_\nu \mathcal{L} \tag{41}$$

3 Die Eichsymmetrie der Quantenelektrodynamik

Im folgenden Kapitel sollen die Konsequenzen demonstriert werden, die aus der Forderung einer bestimmten Symmetrie von einer Theorie resultieren. Ausgangspunkt ist ein Fermionfeld[3] $\phi(x)$ mit Ladung q und Masse m. Die beschreibende Gleichung für dieses Feld ist die freie Dirac-Gleichung

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi(x) = 0, \tag{42}$$

die als Euler-Lagrange-Gleichung nach Variation nach den verschiedenen Spinor-Indizes aus der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\psi}(x)\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi(x) \tag{43}$$

folgt.

3.1 Gruppentheoretische Einordnung

Im Folgenden wird es sich um Phasentransformationen handeln, die Elemente der unitären, abelschen Gruppe $U(1)$ sind. Sie können dargestellt werden als $e^{i\alpha}$ mit einem reellen Transformationsparameter α. Koordinaten werden nicht transformiert.
Es findet eine Unterscheidung in globale und lokale Transformationen statt, wobei globale Transformationen an allen Raumzeitpunkten gleich sind, d.h. α ist eine Konstante, während lokale Transformationen vom Raumzeitpunkt x abhängen, d.h. $\alpha = \alpha(x)$ ist eine Funktion von x.

3.2 Globale $U(1)$-Phasentransformationen

Die Transformationsvorschriften für das Feld ψ, und entsprechend für das adjungierte Feld $\overline{\psi}$, können wie folgt dargestellt werden

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{iq\alpha}\psi(x) \tag{44}$$

$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi'}(x) = e^{-iq\alpha}\overline{\psi}(x) \tag{45}$$

Da $\alpha \in \mathbb{R}$ konstant und daher insbesondere keine Funktion der Raumzeitkoordinate x ist, folgt $\partial_\mu \alpha = 0$. Die Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_0$ ist damit invariant unter den angegebenen globalen Phasentransformationen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0' &= \overline{\psi'}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi' \\ &= e^{-iq\alpha}\overline{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,e^{iq\alpha}\psi \\ &= \overline{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi \\ &= \mathcal{L}_0\end{aligned} \tag{46}$$

Damit ist per Konstruktion auch die Wirkung invariant unter dieser kontinuierlichen Symmetrietransformation und es muss nach dem Noether-Theorem einen erhaltenen Noether-Strom geben.

[3] Die Bezeichnung „Fermionfeld“ rührt daher, dass das Feld nach der Quantisierung mit Fermionen, also Teilchen, identifiziert werden kann.

Da keine Transformation der Koordinaten selbst stattfindet ($\delta x = 0$), beträgt der erhaltene Strom

$$\begin{aligned} j^{\mu} &= -\frac{\delta \mathcal{L}_0}{\delta \partial_{\mu} \psi} \delta \psi + \theta^{\mu}_{\nu} \underbrace{\delta x^{\nu}}_{=0} \\ &= -\left(i \overline{\psi} \gamma^{\mu}\right) \delta \psi \end{aligned} \tag{47}$$

Dabei ist $\delta \psi = \psi' - \psi$ die Variation des Feldes, wobei mithilfe einer Taylor-Entwicklung

$$\psi' = e^{iq\alpha} \psi \approx (1 + iq\alpha)\, \psi \tag{48}$$

geschrieben werden kann, so dass für den Noether-Strom

$$j^{\mu} = q\alpha \overline{\psi} \gamma^{\mu} \psi \tag{49}$$

folgt.

3.3 Lokale $U(1)$-Phasentransformationen

Eichfreiheit im Allgemeinen lässt dem Physiker die Freiheit, bestimmte Dinge so zu wählen, wie es gerade (aus welchen Gründen auch immer) praktisch für ihn ist. Eichfreiheit ist daher eine Frage der Konvention. Bei einer globalen Symmetrie muss an einem Raumzeitpunkt einmal entschieden werden, welche Konvention angewendet wird, die anschließend auch für alle anderen Raumzeitpunkte gültig ist. Ist das vernünftig in einer Theorie, in der sämtliche Felder lokale Größen sind, d.h. vom Raumzeitpunkt x abhängen?

Die lokalen Phasentransformationen werden analog zu den globalen dargestellt

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-iq\alpha(x)} \psi(x) \tag{50}$$

$$\overline{\psi}(x) \to \overline{\psi'}(x) = e^{iq\alpha(x)} \overline{\psi}(x) \tag{51}$$

mit dem Unterschied, dass der Transformationsparameter α eine Funktion von x ist und daher $\partial_{\mu}\alpha$ im Allgemeinen nicht mehr verschwindet.

Die Ableitung des transformierten Feldes ergibt

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \psi' &= \partial_{\mu} \left(e^{-iq\alpha(x)} \psi\right) \\ &= e^{iq\alpha(x)} \partial_{\mu} \psi - iq \partial_{\mu} \alpha(x)\, e^{-iq\alpha(x)} \psi \end{aligned} \tag{52}$$

so dass weiter für die transformierte Lagrange-Dichte gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0' &= \overline{\psi'} \left(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m\right) \psi' \\ &= e^{iq\alpha(x)} \overline{\psi} \left(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m\right) e^{-iq\alpha(x)} \psi \\ &= e^{iq\alpha(x)} \overline{\psi} i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} \left(e^{-iq\alpha(x)} \psi\right) - e^{iq\alpha(x)} \overline{\psi} \cdot m \cdot e^{-iq\alpha(x)} \psi \\ &= e^{iq\alpha(x)} \overline{\psi} i\gamma^{\mu} \left(e^{-iq\alpha(x)} \partial_{\mu} \psi - iq \partial_{\mu} \alpha(x)\, e^{-iq\alpha(x)} \psi\right) - \overline{\psi} \cdot m \cdot \psi \\ &= \overline{\psi} i\gamma^{\mu} \left(\partial_{\mu} \psi - iq \partial_{\mu} \alpha(x)\, \psi\right) - \overline{\psi} \cdot m \cdot \psi \\ &= \overline{\psi} \left(i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m\right) \psi + \overline{\psi} q \gamma^{\mu} \psi \partial_{\mu} \alpha(x) \\ &= \mathcal{L}_0 + q \overline{\psi} \gamma^{\mu} \psi \partial_{\mu} \alpha(x) \end{aligned}$$

Da die Lagrange-Dichte der Quantenelektrodynamik invariant unter lokalen Phasentransformationen sein soll, es die bisher betrachtete Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_0$ allerdings nicht ist, soll letztere nun modifiziert werden. Dies geschieht durch die Addition eines Wechselwirkungsterms $\mathcal{L}_{int}$.
Da der Strom, bestehend aus bewegten Ladungen, die Quelle von elektromagnetischen Feldern ist, ist offensichtlich, dass elektromagnetische Felder mit geladenen Teilchen wechselwirken. Es stellt sich heraus, dass Photonen die Vermittler der elektromagnetischen Wechselwirkung sind, die an den Strom koppeln. Entsprechend wird mathematisch die Wechselwirkung mit einem Eichfeld $A_\mu(x)$ eingeführt:

$$\mathcal{L}_{int} = -j^\mu A_\mu \tag{53}$$

Das führt auf die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} = \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu\left[\partial_\mu + iqA_\mu\right] - m\right)\psi \tag{54}$$

Das neu eingeführte Eichfeld muss nun genau so transfomieren, dass es die Nicht-Invarianz von $\mathcal{L}_0$ aufhebt; man findet leicht

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \tag{55}$$

Außerdem wird die sog. kovariante Ableitung als

$$D_\mu := \partial_\mu + iqA_\mu \tag{56}$$

definiert, die invariant unter lokalen Phasentransformationen ist:

$$\begin{aligned}(D_\mu\psi)' &= D'_\mu\psi' \\ &= \left(\partial_\mu + iqA'_\mu\right)\psi' \\ &= \left(\partial_\mu + iqA_\mu + iq\partial_\mu\alpha(x)\right)e^{-iq\alpha(x)}\psi \\ &= e^{-iq\alpha(x)}\left(\partial_\mu + iqA_\mu + iq\partial_\mu\alpha(x) - iq\partial_\mu\alpha(x)\right)\psi \\ &= e^{-iq\alpha(x)}\left(D_\mu\psi\right)\end{aligned} \tag{57}$$

3.4 Die Geometrie der Eichinvarianz

Die Notwendigkeit der kovarianten Ableitung kann auch wie folgt begründet werden: Die normale, ursprüngliche Ableitung ∂_μ des Feldes ist als Grenzwert über die Differenz der Felder an benachbarten Punkten definiert. Dies ist nicht länger sinnvoll in einer Theorie mit lokaler Phaseninvarianz, da die Felder an den benachbarten Punkten völlig unterschiedlich transformieren. Daher kann die normale Ableitung eines Feldes kein einfaches Transformationsverhalten ausweisen und keine nützliche geometrische Interpretation haben. Da trotzdem die Werte des Feldes an benachbarten Punkten voneinander abgezogen werden sollen, muss ein Faktor eingeführt werden, der die Unterschiede der Phasentransformationen zwischen den beiden Punkten gerade kompensiert. Das eingeführte Eichfeld ist nun genau das Vektorfeld, das eingeführt werden muss, um den „kompensierenden Faktor“ zu gewährleisten.

3.5 Die Dynamik des Eichfelds

Bisher war das eingeführte Eichfeld ein äußeres Feld ohne Dynamik. Um die Dynamik des Eichfelds zu erhalten, wird ein Eichfeldterm zur bisherigen Lagrange-Dichte hinzugefügt

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{gauge} \tag{58}$$

Dazu wird das Eichfeld, wie bereits erwähnt, als Viererpotential der Maxwell-Theorie bzw. als Photonfeld identifiziert und die bisherige Dirac-Theorie mit der Maxwell-Theorie kombiniert. Als Eichfeldterm wird daher die einfachste Lorentz- und eichinvariante Form gewählt, die aus den Eichfeldern gebildet werden kann. Die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \tag{59}$$

hat eine der Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = qj^\mu \tag{60}$$

als Euler-Lagrange-Gleichung und wird daher auch als $\mathcal{L}_{Maxwell}$ bezeichnet.

Die volle Lagrange-Dichte der QED besteht nun aus drei Komponenten: dem freien Dirac-Feld (Fermionen), dem Maxwell-Feld (Photonen) und der Wechselwirkung zwischen den beiden, wobei der Dirac-Term und der Wechselwirkungsterm über die kovariante Ableitung zu einem Ausdruck zusammengefasst sind

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{int} \\ &= \overline{\psi}(x)\left(i\not{D} - m\right)\psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \end{aligned} \tag{61}$$

4 Zusammenfassung und Ausblick

In den vorherigen Abschnitten wurde gezeigt, dass eine globale $U(1)$-Invarianz der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\psi}(x)\left(i\not{\partial} - m\right)\psi(x)$$

einen erhaltenen Noether-/ Fermionstrom

$$j^\mu = q\alpha\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

zur Folge hat.
Die Forderung einer lokalen $U(1)$-Invarianz führt auf eine Kopplung des Eichfelds/ der Photonen an den Fermionstrom. Mithilfe der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

kann eine Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)\left(i\not{D} - m\right)\psi(x)$$

geschrieben werden, die invariant unter lokalen Phasentransformationen ist, wenn die Transformation

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$$

des Photonfelds berücksichtigt wird.
Soll zusätzlich die Dynamik des Eichfels betrachtet werden, wird die Dirac-Theorie mit der Maxwell-Theorie kombiniert. Für die Lagrange-Dichte der Quantenelektrodynamik folgt daher

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{int} \\ &= \overline{\psi}(x)\left(i\not{D} - m\right)\psi(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \end{aligned}$$

mit den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$(i\not{D} - m)\,\psi = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi = qj^\mu$$

Eichsymmetrie darf nicht als „Zufall“ angesehen werden, sondern soll als fundamentales Prinzip erkannt werden, das die Form der Lagrange-Dichte einer Theorie bestimmt. Die Quantenelektrodynamik beschreibt Fermionen, Photonen und deren Wechselwirkung, wobei diese die Konsequenz aus der Forderung einer Lorentz- und eichinvarianten Lagrange-Dichte ist.

Abelsche Eichsymmetrien können keine Ladung der Eichfelder beschreiben, da die Eichfelder hier nicht zum erhaltenen Strom beitragen. Aus diesem Grunde können abelsche Symmetrien keine Selbstwechselwirkung der Eichfelder beschreiben. Selbstwechselwirkungsterme (höhere Potenzen) des Eichfelds würden die abelsche Eichinvarianz verletzen und müssen mit nichtabelschen Symmetrien beschrieben werden. Desweiteren können massive Eichfelder mit abelschen Eichsymmetrien nicht erfasst werden; es tritt Symmetriebrechung auf, die mithilfe des Higgs-Mechanismus gehandhabt wird.

A Literaturliste

- *M. Böhm, A. Denner, H. Joos:* Gauge Theories of the Strong and electroweak Interaction, Teubner, Stuttgart, 2001.
- *I.J.R. Aitchison:* An Informal Introduction to Gauge Field Theories, Cambridge, Cambridge, 1982.
- *M.E. Peskin, D.V. Schroeder:* An Introduction to Quantum Field Theory, Westview Press, 1995.
- *F. Schwabl:* Quantenmechanik für Fortgeschrittene, Springer, Berlin, Heidelberg, 2005.
- *O. Philipsen:* Mitschrift zur Vorlesung „Einführung in das Standardmodell der Elementarteilchen“, WWU Münster, Wintersemester 2007/2008.