Darstellungstheorie der Lorentzgruppe

Ein Vortrag im Rahmen des Seminars: Theorie der Teilchen und Felder im SS07

Andrea Goertsches

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Der Minkowski-Raum geht auf Hermann Minkowski (1864 – 1909) zurück, der selbst diesen Raum schlicht als „die Welt“ bezeichnete, weil er ihn für eine adäquate (wenngleich abstrakte) Darstellung der Realität hielt. In seinem Sinne sollte „die Welt“ den absoluten Raum und die absolute Zeit Isaac Newtons (1643−1727) ersetzten. Mittels dieses Raumes lassen sich einige Aussagen der Speziellen Relativitätstheorie veranschaulichen wie die Relativität der Gleichzeitigkeit und die Relativität der Länge, den optischen Doppler-Effekt und sogar das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten. Die Frage wie die Struktur seiner „Welt“ geschaffen sein muss, führt zu einer pseudo-euklidschen Geometrie. Die Transformationen, die die pseuso-euklidsche Struktur erhalten, sind die sogenanten Lorentztransformationen, deren Formulierung durch Hendrik Antoon Lorentz (1853 − 1928) allerdings zeitlich zuvor lag.

Die Menge der möglichen Transformationen, die Pseudo-Drehungen und Boosts (Wechsel in ein bewegtes Bezugssystem) umfassen, bilden eine Gruppe, die man Lorentzgruppe nennt. Durch Hinzunahme von Translationen in Raum und Zeit kommt man zu der Poincaré-Gruppe (nach Henri Poincaré (1854 – 1912)).

Um das Verhalten der Elemente einer Gruppe zu beschreiben (hier speziell der Lorentzgruppe bzw. der Poincaré-Gruppe), möchte man die möglichen Transformationen, die nicht aus der Gruppe hinausführen, mit vertrauteren Elementen wie z.B. Matrizen darstellen. Bevorzugt führt dies zu einer sogenannten vollständig reduziblen Darstellung. Dies ist eine Darstellung, die in eine Summe irreduzibler Darstellungen zerfällt, deren Unterräume man dann seperat betrachten kann.

Das Arbeiten auf seperaten Unterräumen vereinfacht die Beschreibung erheblich. Diese Idee verwendet man zum Beispiel auch in der Quantenmechanik, wenn es darum geht nach Casimir Operatoren A, B mit $[A, B] = 0$ zu suchen. Sie kommutieren, da sie auf verschiedenen Unterräumen wirken.

2 Darstellungstheorie

Eine lineare Darstellung einer Gruppe G ist ein Homomorphismus von G in die Gruppe der invertierbaren linearen Selbstabbildungen eines Vektorraums V über einem Körper K.

$$\Phi : G \to Aut(V) \ , \ g \mapsto \Phi(g)$$

Also ist

$$\Phi(g \circ h) = \Phi(g) \circ \Phi(h)$$
$$\Phi(e) = id$$
$$\Phi(g^{-1}) = (\Phi(g))^{-1}.$$

Falls für alle $g \in G$ der Automorphismus $\Phi(g)$ nur die trivialen Unterräume V und 0 invariant läßt, heißt die Darstellung *irreduzibel.* In der Darstellungstheorie sucht man nach (irreduziblen) Darstellungen um mittels dieser die Gruppenelemente besser zu verstehen.

Für *kompakte* Lie-Gruppen wie die Drehgruppe $SO(n)$ (Oberfläche einer n-dim Kugel im $\mathbb{R}$ ist offenbar kompakt), läßt sich stets eine endlichdimensionale irreduzible Darstellung finden. Für nichtkompakte Lie-Gruppen wie die Lorentzgruppe und die Poincaré-Gruppe ist das Arbeiten daher schwieriger.

Die Lorentzgruppe, die Gruppe mit der wir uns im Folgenden hauptsächlich befassen, ist eine *halbeinfache* Gruppe. Dies ist eine Gruppe ohne abelschen Normalteiler.

Da die Lorentzgruppe halbeinfach ist, weiß man, dass jede ihrer endlichdimensionalen Darstellungen vollständig reduzibel sind. Dies bedeutet, dass sie sich als direkte Summe irreduzibler Darstellungen schreiben lassen. Außerdem ist jede irreduzible Darstellung trivial vollständug reduzibel.

Durch Hinzunahme der Translationen gelangt man von der Lorentzgruppe zur Poincaré-Gruppe, die nicht mehr halbeinfach ist. Um diesen mathematischen Vorteil der Lorentzgruppe gegenüber der

Poincaré-Gruppe auszunutzen, wird das erste Ziel sein eine Darstellung der Lorentzgruppe zu finden um dann erst die Darstellung der Translationen hinzuzunehmen.

3 Minkowski-Raum $\mathcal{M}_4$

Die Lorentzgruppe ist, wie allgemein bekannt, die Menge der Transformationen, die die Minkowski-Metrik invariant lassen: Zur Erinnerung an den Minkowski-Raum:

Der Minkowski-Raum oder auch RaumZeit genannt, meist mit $\mathcal{M}_4$ abgekürzt,ist der $\mathbb{R}^4$ versehen mit einer symmetrischen Bilinearform h der Form

$$h(x,y) = x_0y^0 - x_1y^1 - x_2x^2 - x_3x^3 = g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^0y^0 - <\vec{x},\vec{y}> \forall x,y \in \mathcal{M}_4$$

wobei

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1,-1,-1,-1)$$

der metrische Tensor ist. Man schreibt:

$$\mathcal{M}_4 = (\mathbb{R}^4, h)$$

Man nennt h auch Minkowski-Skalarprodukt. Es nimmt in allen Inertialsystemen denselben Wert an. Dieses Skalarprodukt induziert eine *indefinite Metrik*, da

$$\left\{v \in \mathbb{R}^4 \mid h(v,v) = 0\right\} \Leftrightarrow v \text{ lichtartig}$$

$$\left\{v \in \mathbb{R}^4 \mid h(v,v) < 0\right\} \Leftrightarrow v \text{ zeitartig}$$

$$\left\{v \in \mathbb{R}^4 \mid h(v,v) > 0\right\} \Leftrightarrow v \text{ raumartig}$$

gilt.

3.1 Homogene Lorentzgruppe $\mathcal{L}$

Die homogene Lorentzgruppe $\mathcal{L}$ ist Menge der linearen, homogenen Transformationen Λ des M_4, die das Minkowski-Skalarprodukt invariant lassen:

$$\mathcal{L} = \left\{\Lambda \in GL(4\times 4) | \Lambda^T g \Lambda = g\right\}$$

wobei g der metrische Tensor ist. Dies entspricht genau der Gruppe der pseudo-orthogonalen Transformationen $O(3,1)$. Also gilt

$$\mathcal{L} = O(3,1).$$

Durch Determinantenbildung der Pseudo-Orthogonalitätsrelation und durch Klassifizieren nach dem Vorzeichen des Eintrags λ^0_0 erhält man die vier Zusammenhangskomponenten der Lorentzgruppe.

sgn Λ^0_0	det Λ	Struktur
+	1	Untergruppe von $\mathcal{L}$ (eigentlich-orthochrone LG)
+	-1	Nebenklasse von $(\Lambda_P)^\mu_\nu = diag(1,-1,-1,-1)$ (Paritätsoperator)
-	-1	Nebenklasse von $(\Lambda_T)^\mu_\nu = diag(-1,1,1,1)$ (Zeitumkehroperator)
-	+1	Nebenklasse von $(\Lambda_T\lambda_P)^\mu_\nu = diag(-1,-1,-1,-1)$

Da nur in der eigentlich-orthochronen Lorentzgruppe mit $det\Lambda = 1$ und $\Lambda^0_0 > 0$ das Einselement enthalten ist, bildet nur diese eine Untergruppe und zwar die Lie-Gruppe $SO(3,1)$:

$$SO(3,1) = \left\{\Lambda \in O(3,1) | \det\Lambda = 1 \text{ und } \lambda^0_0 > 0\right\}$$

3.2 Poincarégruppe bzw. inhomogene Lorentzgruppe $\mathcal{P}$

Die Gruppe der inhomogenen linearen Transformationen auf $\mathcal{M}_4$ haben die Form

$$x \mapsto x' = \Lambda x + a \text{ mit } a \in \mathcal{M}_4, \Lambda \in \mathcal{L}$$

Die Poincarégruppe $\mathcal{P}$ besteht also aus den folgenden Elementen:

$$\mathcal{P} = \{(\Lambda, a) | a \in \mathcal{M}_4, \Lambda \in \mathcal{L}\}$$

Die Poincaré Transformationen bilden mit dem semidirekten Produkt $\circ : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ der Form

$$(\Lambda_2, a_2) \circ (\lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2)$$

eine **nicht** kommutative Gruppe.

4 Algebra

Man definiert eine Algebra $\mathcal{A} = (V, \circ)$ zu einem Vektorraum V über dem Körper K, in dem man zu den bisher bestehenden Verknüpfungen (der Addition und der Skalarmultiplikation mit einer Zahl aus dem Körper) eine weitere Operation, die Multiplikation $\circ : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ genannt wird, hinzufügt. Sie ist K-bilinear.

Man unterscheidet weiterhin zwischen assoziativen ($\forall k, n, m \in \mathcal{A}$ gilt $k \circ (m \circ n) = (k \circ m) \circ n$) und nicht-assoziativen ($\exists k, n, m \in \mathcal{A}$ für die $k \circ (m \circ n) \neq (k \circ m) \circ n$ gilt) Algebren. Man spricht von einer Algebra $\mathcal{A}$ mit Eins, wenn es ein Einselement $\mathbb{1}$ gibt, so dass $\forall m \in \mathcal{A} : \mathbb{1} \circ m = m \circ \mathbb{1} = m$ gilt.

4.1 Nicht-assoziative Algebra

4.1.1 Bsp.: Lie-Algebra

Erinnerung (Lie-Algebra): Eine Lie-Algebra $\mathfrak{g} = (V, [\cdot, \cdot])$ ist eine algebraische Struktur. Sie ist ein Vektorraum über einem Körper K indem ein Produkt $[\cdot, \cdot] : V \times V \to V$, das den folgenden Rechenregeln genügt, definiert ist:
Seien $x, y, z \in \mathfrak{g}$ und $\alpha, \beta \in K$.

1. $[x, \alpha y + \beta z] = \alpha[x, y] + \beta[x, z]$
2. $[x, y] = -[y, x]$
3. Jacobi-Identität: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

Man nennt dieses Produkt auch Lie-Klammer. Für $K = \mathbb{R}$: reelle Lie-Algebra. Für $K = \mathbb{C}$: komplexe Lie-Algebra. Dies sagt allerdings **nichts** über die (Matrix-)Einträge der Elemente von $\mathfrak{g}$ aus. Es gibt nur an wo die Elemente der skalaren Multiplikation leben.

Zu jeder Lie-Gruppe G (Mannigfaltigkeit mit Gruppenstruktur, so dass das Produkt als Abbildung von $G \times G \to G$ C^∞ ist, d.h. eine glatte Mannigfaltigkeit endlicher Dimension n) mit den Basiselementen $\{B_i(\varphi)\}_{i=1,..,n}$ kann eine Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ definiert werden. Diese wird durch die infinitesimalen Erzeugenden der Lie-Gruppe am neutralen Element

$$X_i = \left[\frac{dB_i(\varphi_i)}{d\varphi_i}\right]_{\varphi_i = 0}$$

erzeugt. Mittels der infinitesimalen Erzeugenden werden über (Einsteinsche Summenkonvention)

$$[X_i, X_j] = \xi_{ijk} X_k$$

die Strukturkonstanten ξ_{ijk} der Lie-Algebra definiert - sie charakterisieren die Lie-Algebra (Jede Lie-Algebra ist die Lie-Algebra einer und nur einer einfach zusammenhängenden Liegruppe. Alle anderen Liegruppen mit der gleichen Lie-Algebra, werden von der einfach zusammenhängenden überlagert). Desweiteren sind zwei Lie-Algebren isomorph, falls es Basen gibt, so dass die Strukturkonstanten ξ_{ijk} gleich sind.

4.1.2 Beispiel einer Lie-Algebra

Wie man leicht nachrechnen kann, bildet der $\mathbb{R}^3$ mit dem Kreuzprodukt $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Lie-Algebra $(\mathbb{R}^3, \times)$. Wenn man (e_1, e_2, e_3) als Basis wählt, erhält man

$$[e_i, e_j] = \epsilon_{ijk} e_k.$$

Dies bedeutet, dass bei dieser Basis die Strukturkonstanten ξ_{ijk} dem bekannten Epsilontensor entsprechen.

4.2 Assoziative Algebra mit Eins

4.2.1 Bsp.: Clifford-Algebra

Voraussetzungen: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ mit Basis $B = \{e_1, .., e_n\}$ und $q : V \times V \to \mathbb{K}$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform.
Dann ist die Tensoralgebra $\mathcal{TV}$ definiert als

$$\mathcal{TV} := \bigoplus_{r=0}^{\infty} \otimes^r V$$

Dabei ist $V \otimes V$ das Tensorprodukt und $\otimes^0 V = \mathbb{K}$, also $\mathcal{TV} = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) + \ldots$.
Die Mulitplikation auf der Tensoralgebra ist gegeben durch die Mulitplikation der einzelnen Summanden mittels Tensorprodukt, also ist für $a, b \in \mathbb{K}, v_i \in V$:

$$(a, v_1, (v_2 \otimes v_3), ...) \cdot (b, v_4, (v_5 \otimes v_6), ...) = (ab, av_4, a(v_5 \otimes v_6), ...) + (0, bv_1, (v_1 \otimes v_4) + ...) + (0, 0, b(v_2 \otimes v_3) + ...) + ...$$

Wobei man wie bei der gewöhnlichen Multiplikation in $\mathbb{R}$ auch oft vv' statt $v \cdot v'$ schreibt. Weiterhin sei $\mathcal{I}(V, q)$ das von $\{v \otimes v - q(v, v)\mathbb{1} | v \in V\}$ in $\mathcal{TV}$ erzeugte Ideal, d.h. $\mathcal{I}(V, q)$ ist die kleinste Menge I für die gilt:

1. $v \otimes v - q(v, v)\mathbb{1} \in I,\ 0 \in I\ \forall v \in V$
2. $i, j \in I \Rightarrow i - j \in I$
3. $i \in I, r \in \mathcal{TV} \Rightarrow ri, ir \in I$

Definition(Clifford-Algebra):
Die Clifford-Algebra $\mathcal{CL}(V, q)$ ist dann der Quotientenraum von der Tensoralgebra $\mathcal{TV}$ und dem Ideal $\mathcal{I}(V, q)$:

$$\mathcal{CL}(V, q) := \mathcal{TV} / \mathcal{I}(V, q)$$

Eigenschaften:
Eine Clifford-Algebra ist eine assoziative Algebra mit Eins. Der zugrundeliegende Vektorraum V ist mittels der Inklusion $j : V \to \mathcal{CL}(V, q)$ in der Clifford-Algebra $\mathcal{CL}(V, q)$ eingebettet.
Es gilt für alle $v, v' \in V$:

$$j(v)^2 = v \otimes v = v \otimes v - v \otimes v + q(v, v)\mathbb{1} = q(v, v)\mathbb{1}$$

und falls die Charakteristik von $\mathbb{K}$ nicht 2 ist:

$$j(v)j(v') = v \otimes v' = v \otimes v' - (v+v') \otimes (v+v') + q(v+v', v+v')\mathbb{1} + v \otimes v - q(v,v)\mathbb{1} + v' \otimes v' - q(v',v')\mathbb{1}$$

$$= -(v' \otimes v) + 2q(v,v')\mathbb{1}$$

Die Abbildung j wird durch die folgende universelle Eigenschaft eindeutig definiert:
Zu jeder assoziativen Algebra $\mathcal{A}$ über $\mathbb{K}$ und jeder weiteren Einbettung von V in $\mathcal{A}$ der Form $\widetilde{j} : V \to A$, so dass

$$\widetilde{j}(v)^2 = Q(v)\mathbb{1} \ \forall v \in V$$

gilt, existiert ein eindeutiger K-Algebra-Homomorphismus

$$f : \mathcal{CL}(V,q) \to \mathcal{A},$$

so dass $\widetilde{j} = f \circ j$ gilt. Für eine übersichtlichere Notation wird nun die übliche Konvention verwendet, den Vektorraum V mit seiner Einbettung $j(V)$ zu identifizieren. Dies führt zu der Formel, wie sie im Folgenden verwendet wird:

$$\{u,v\} := uv + vu = 2q(u,v)\mathbb{1}_C \ \forall u, v \in V,$$

Erfüllt q die Eigenschaften $q(e_i, e_i) = -1$ und $q(e_i, e_j) = 0$ für alle $e_i, e_j \in B, i \neq j$, so erfüllt die Multiplikation auf $\mathcal{CL}(V,q)$:

$$\{e_i, e_j\} := e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij} \ \forall e_i, e_j \in B$$

Weitere Eigenschaften der Clifford-Algebra $\mathcal{CL}(V,q)$:

1. Wenn $(e_1, e_2, ..., e_n)$ eine Basis von V bildet dann ist

   $$\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \text{ und } 0 \leq k \leq n\}$$

   eine Basis von $\mathcal{CL}(V,q)$. Das leere Produkt $(k = 0)$ ist definiert als das neutrale Element der Multiplikation. Für jeden Wert von k erhält man $\binom{n}{k}$ Basiselemente. Damit ergibt sich die Dimension der Clifford-Algebra zu

   $$\dim \mathcal{CL}(V,q) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. Man kann eine Abbildung $V \to V$, $v \mapsto -v$ definieren, die die quadratische Form $Q(v) := q(v,v)$ erhält. Diese kann zu einem, mit der universellen Eigenschaft der Clifford-Algebra verträglichen, Algebra-Automorphismus

   $$\alpha : \mathcal{CL}(V,q) \to \mathcal{CL}(V,q)$$

   erweitert werden. Da $\forall v \in \mathcal{CL}(V,q) : \alpha(\alpha(v)) = v$ gilt, ist α eine Involution. Daher erhält man eine Aufspaltung von $\mathcal{CL}(V,q)$ in seinen geraden $\mathcal{Cl}^0(V,q)$ und seinen ungeraden Anteil $\mathcal{Cl}^1(V,q)$ der Form

   $$\mathcal{CL}(V,q) = \mathcal{Cl}^0(V,q) \oplus \mathcal{Cl}^1(V,q)$$

   wobei

   $$\mathcal{Cl}^i = \left\{x \in \mathcal{CL}(V,q) | \alpha(x) = (-1)^i x\right\}$$

   gilt. Allerdings bildet nur $\mathcal{Cl}^0(V,q)$ eine Unteralgebra.

4.2.2 Beispiel einer Clifford-Algebra: ($\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^3)$)

Mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \text{-i} \\ \text{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{-1} \end{pmatrix}$$

und $\sigma_0 = \mathbb{1}_2$ hat man eine Basis des R^3, die die Antikommutatorrelation

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}\mathbb{1}$$

erfüllt. Man kann also mittels der $2^3 = 8$ möglichen Kombinationen Pauli-Matrizen eine Basis der Clifford-Algebra $\mathcal{Cl}(\mathbb{R}^3)$

$$\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_1\sigma_2,\ \sigma_1\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_3,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3,$$

bilden.
Da

$$\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3,\ \sigma_2\sigma_3 = i\sigma_1,\ \sigma_3\sigma_1 = i\sigma_2,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = i\sigma_0$$

gilt, kann man die Elemente der Basis auch als

$$\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ i\sigma_3,\ i\sigma_2,\ i\sigma_1,\ i\sigma_0$$

schreiben. Sie sind offenbar linear unabhängig über dem Körper $\mathbb{R}$.

5 Der Minkowski-Raum $\mathcal{M}$ und die Algebren

5.1 Die Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$

Wie bereits erwähnt, entspricht die zusammenhängende Untergruppe der Lorentzgruppe den Elementen der Lie-Gruppe $\mathrm{SO}(3,1)$. Für Rotationen in einer Raum-Raum-Ebene sind sie ebenfalls Elemente der $\mathrm{SO}(4)$: Wenn φ_{ij} den Drehwinkel zwischen der i-ten und der j-ten Achse beschreibt nehmen ihre Elemente z.B. die folgende Form an:

$$R_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_{23} & -\sin\varphi_{23} \\ 0 & 0 & \sin\varphi_{23} & \cos\varphi_{23} \end{pmatrix}$$

Für Rotationen in der Raum-Zeit-Ebene nehmen diese die variierte Form wie z.B.

$$R_{01} = \begin{pmatrix} \cosh\varphi_{01} & \sinh\varphi_{01} & 0 & 0 \\ \sinh\varphi_{01} & \cosh\varphi_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

an.

Um von dieser Basis $\{R_{01}, R_{02}, R_{03}, R_{12}, R_{13}, R_{23}\}$ der Lie-Gruppe $\mathrm{SO}(3,1)$ zu den Generatoren Y_{ij} der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ überzugehen, bildet man die infinitesimalen Erzeugenden am neutralen Element.

Dies bedeutet:

$$M_{ij} = \left[\frac{dR_{ij}(\varphi_{ij})}{d\varphi_{ij}}\right]_{\varphi_{ij}=0}$$

Diese haben damit z.B. die Form

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$M_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Generatoren genügen offenbar der Vertauschungsrelation der Lie-Klammer. Also bilden die sechs Generatoren M_{ij} mit $i, j = 0, .., 3, i < j$ eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$ bzw. der Lie-Algebra des Minkowski-Raumes. Gewichtet man alle Generatoren M_{ij} mit einem Faktor ϵ_{ij} und addiert diese, erhält man den Ausdruck einer allgemeinen infinitesimalen Lorentz-Transformation:

$$M = \sum_{i,j=0 i\neq j}^{3} \epsilon_{ij} M_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{01} & \epsilon_{02} & \epsilon_{03} \\ \epsilon_{01} & 0 & -\epsilon_{12} & -\epsilon_{13} \\ \epsilon_{02} & \epsilon_{12} & 0 & -\epsilon_{23} \\ \epsilon_{03} & \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

5.2 Die Clifford-Algebra $\mathcal{C}\ell_{3,1}(\mathbb{R})$

Um zu dem Minkowski-Raum $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, h)$ die Clifford-Algebra $\mathcal{C}\ell_{3,1}(\mathbb{R})$ zu assoziieren, verwendet man oft die Dirac-Matrizen, die eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bilden und die Antikommutatorrelation bezüglich der symmetrischen Bilinearform h erfüllen.
Hierbei gibt es verschiedene übliche Darstellungen. In der Physik bietet sich meist die sogenannte *chirale Darstellung* oder auch *Weyl-Darstellung* der Dirac-Matrizen γ_j mit $j = 0, .., 3$ an, da die hierüber definierten $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$-Matrizen Teile der Projektionsoperatoren auf den rechts- bzw. linkshändigen Spinor werden. Hierbei werden die Dirac-Matrizen aus den oben eingeführten Pauli-Matrizen aufgebaut.

Die Dirac-Matrizen γ_j haben folgende Form (man beachte die Vorzeichen wg. der pseudoeuklidschen Metrik):

$$\gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \text{ für } j = 1, 2, 3$$

und

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

Sie erfüllen die folgende Antikommutatorrelation:

$$\{\gamma_j, \gamma_k\} = 2g_{jk}\mathbb{1}$$

mit g_{jk} dem metrischen Tensor des Minkowski-Raums.

6 Eine allgemeine Beziehung zwischen der Clifford- und der Lie-Algebra

Da Bosonen und Fermionen in ihren Eigenschaften sehr stark voneinander abweichen, wurde ihre Beziehung erst sehr viel später entdeckt. Die Bosonen gehorchen der Kommutatorrelationen der Clifford-Algebra wobei die Fermionen der Antikommutatorrelation der Lie-Algebra folgen. Diese Algebren weichen offenbar in ihrer mathematischen Struktur stark voneinander ab. Zusammengeführt werden sie durch die Gruppe $\mathcal{Spin}(3,1)$, die sowohl eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe als auch ein Teil der Clifford-Algebra $\mathcal{Cl}^0_{3,1}(\mathbb{R})$ ist.

6.1 Die Gruppe $\mathcal{Spin}(3,1)$

Zum einen ist die Gruppe $\mathcal{Spin}(3,1)$ die einfach zusammenhängende, zweifache Überlagerung der Gruppe $SO(3,1)$ und zum anderen ist sie die bezüglich $|q(v,v)| = 1$ normierte Teilmenge des geraden Teils $\mathcal{Cl}^0_{3,1}(\mathbb{R})$ der Clifford-Algebra $\mathcal{Cl}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{Spin}(3,1) := \{v_1 \cdot \dots \cdot v_{2k} | v_i \in V, |q(v,v)| = 1, k \in \mathbb{N}\}$$

Eine treue Darstellung ist eine Einbettung der Algebra in eine Matrixgruppe, oder generell in die Endomorphismengruppe eines Vektorraums. In dem Fall der Gruppe $\mathcal{Spin}(3,1)$ führt dies zu der Lie-Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$.

6.2 Die Lie-Gruppe $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$

Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ ist die Menge alle komplexen 2×2-Matrizen mit Determinante gleich 1.

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) := \left\{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid \det A = 1\right\}$$

Wähle

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{C})$$

und $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Jede ihrer Darstellungen ist nach Hermann Weyl $(1884-1995)$ vollständig reduzibel.

6.3 Eine Darstellung der $\mathbf{SL}(2,\mathbb{C})$

Der Darstellungsraum der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ sind die Vektoren $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ mit komplexen Einträgen, die sich mit den Gruppenelementen der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ zu
$\psi' = \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\psi^1 + b\psi^2 \\ b\psi^1 + \frac{1+cb}{a}\psi^2 \end{pmatrix}$ transformieren. Man nennt sie Spinoren des 2-dim.-Raums.

Auch die komplex konjugierten Spinoren $\psi^{k*} := \psi^{\dot{k}}$ für $k = 1, 2$ sind im Darstellungsraum der $SL(2,\mathbb{C})$ enthalten. Man bezeichnet sie als „gepunktete" Spinoren.

6.4 Eine Lie-Algebra auf einem Unterraum einer Clifford-Algebra

Da die Gruppe $\mathcal{Spin}(3,1)$ eine zweifache Überlagerung der Lie-Gruppe $SO(3,1)$ und isomorph zur Lie-Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ ist, haben sie dieselbe Lie-Algebra. Man kann also auf einem Unterraum der Clifford-Algebra des Vektorraums V mit Dimension n eine Lie-Klammer definieren.

Sei hierzu eine Basis $\{\alpha_j\}_{j=1,\dots,n} \in V$ vorgegeben. Fordere weiter, dass diese die Antikommutatorrelation

$$\{\alpha_j, \alpha_k\} = 2g_{jk}\mathbb{1}$$

erfüllen.

Definiere nun $M^{jk} = \frac{i}{2}\alpha_j\alpha_k$. Da die α_i antikommutieren, sind die M^{jk} antisymmetrisch in ihren Indizes. Die Elemente $\left\{M^{jk}\right\}_{jk}$ mit $j,k = 0,..3, j < k$ bilden eine Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{so}(3,1)$, da man mittels einer längeren Rechnung und der obigen Antikommutatorrelation

$$[M^{ij}, M^{rs}] = -i(g^{ir}M^{js} - g^{is}M^{jr} - g^{jr}M^{is} + g^{js}M^{ir})$$

erhält.

Wenn man die Generatoren der Poincarégruppe P^l hinzunimmt, erhält man zum einen die triviale Vertauschungsrelation

$$[P^j, P^k] = 0 \text{ (Translationen in verschiedenen Richtungen kommutieren)}$$

und den Bezug zwischen den Generatoren der Lorentz- und der Poincarégruppe zu

$$[P^j, M^{mn}] = i(g^{jm}P^n - g^{jn}P^m) \text{ (Nur Drehungen senkrecht zur Translationsbewegung kommutieren).}$$

Zusammengefasst hat man also die 3 wichtigen Beziehungen:

$$[M^{ij}, M^{rs}] = -i(g^{ir}M^{js} - g^{is}M^{jr} - g^{jr}M^{is} + g^{js}M^{ir})$$
$$[P^j, P^k] = 0$$
$$[P^j, M^{mn}] = i(g^{jm}P^n - g^{jn}P^m)$$

6.5 Physikalische Interpretation der M^{jk}

Wie bereits erwähnt sind die M^{jk} die Generatoren der Lie-Algebra der Gruppenmannigfaltigkeit, die das Minkowski-Skalarprodukt invariant lassen.

Man erhält die Drehimpulsoperatoren J^k zu

$$J^k = -\frac{1}{2}\epsilon^k_{mn}M^{mn} \text{ für } k,n,m = 1,..,3$$

und die Boost-Generatoren K^n zu

$$K^n = M^{n0} = -M^{0n} \text{ für } n = 1,..,3.$$

Unter Verwendung der ersten der zuvor hergeleiten Formeln erhält man

$$\left[J^k, J^l\right] = i\epsilon^{klm}J^m \text{ (infinitesimale Drehungen kommutieren)}$$

$$\left[J^k, K^n\right] = i\epsilon^{knm}K^m$$

$$[K^m, K^n] = -i\epsilon^{mnk}J^k \text{ (Boosts in verschiedene Richtungen entsprechen einer Drehung)}$$

Allerdings stellt nur die erste Gleichung eine Liealgebra dar. Bei den anderen beiden spricht man von ihrer superssymmetrischen Erweiterung. Durch Definition neuer Operatoren, kann man zu zwei seperaten Liealgebren übergehen. Dies führt zu der rechten und linken Fundamentaldarstellung.

7 Die linke und die rechte Fundamentaldarstellung

Die Struktur der Lorentzalgebra läßt sich weiter vereinfachen, wenn man aus den hermiteschen Generatoren J und K sechs neue nicht-hermitesche Operatoren T^j_+ und T^j_- konstruiert:

$$T^j_\pm = \frac{1}{2}(J^j \pm iK^j) \text{ für } j = 1, \cdots, 3$$

Wie sich leicht nachrechnen läßt, gelten für diese die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\left[T^j_+, T^k_+\right] = i\epsilon^{jkl} T^l_+$$

$$\left[T^j_-, T^k_-\right] = i\epsilon^{jkl} T^l_-$$

$$\left[T^j_+, T^k_-\right] = 0$$

Bei den oberen beiden Gleichungen handelt es sich jeweils um eine Multiplikation der $\mathfrak{su}(2)$-Liealgebra. Da sie, wie man aus der dritten Gleichung ersehen kann, auf getrennten Unterräumen wirken, könnte man nun vermuten, dass es sich insgesamt um die Produktgruppe $SU(2) \times SU(2)$ handelt. Aufgrund der komplexen Linearkombination haben wir es hier allerdings mit der $SL(2, \mathbb{C})$ zu tun. Sie sind allerdings lokal isomorph, d.H. ihre Liealgebren stimmen überein. Da $J = T_+ + T_-$ und $K = i(T_- + T_+)$ die Erzeugenden der Lorentzgruppe sind, folgt mit

$$\Lambda = exp\left\{-i(\varphi \cdot J + \nu \cdot K)\right\},$$

dass

$$\Lambda = exp\left\{-i(\varphi - i\nu) \cdot T_+\right\} exp\left\{-i(\varphi + i\nu) \cdot T_-\right\}$$

gilt. Die Aufspaltung in zwei Darstellungen, entspricht der sogenannten linken und rechten Fundamentaldarstellung.

7.1 Die linke Fundamentaldarstellung $(\frac{1}{2}, 0)$

Diese Darstellung besitzt den Spin $\frac{1}{2}$ und stellt einen linkshändigen Spinor $\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ dar. Er transformiert nach einer Spinordarstellung mit $T_+ = \frac{1}{2}\sigma$ und $T_- = 0$, also

$$\Psi_L(x) \mapsto \Psi'_L(x') = A_L \Psi_L(x)$$

wobei

$$A_L := \Lambda^{(\frac{1}{2},0)} = exp\left\{-\frac{i}{2}(\varphi - i\nu) \cdot \sigma\right\} \in SL(2, \mathbb{C})$$

Der Darstellungsraum der $SL(2, \mathbb{C})$ ist, wie bereits allgemein erwähnt, der Raum der komplexen Zweierspalten (Weyl-Spinoren 1.Art oder linkshändige Weyl-Spinoren) $\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$. Der invariante antisymmetrische Tensor

$$\epsilon = (\epsilon_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma^2$$

definiert eine sympektische Struktur.

Damit erhält man

$$(\Psi_L, \Phi_L) := \psi_1\phi_2 - \psi_2\phi_1$$

als Skalarprodukt. Dadurch, dass die Komponenten der Clifford-Algebra gehorchen, antikommutieren sie und man erhält:

$$(\Psi_L, \Psi_L) = 2\psi_1\psi_2 \neq 0$$

7.2 Die rechte Fundamentaldarstellung $(0, \frac{1}{2})$

Diese Darstellung besitzt den Spin $\frac{1}{2}$ und stellt einen rechtshändigen Spinor $\Psi_R = \begin{pmatrix} \psi^{\dot{1}} \\ \psi^{\dot{2}} \end{pmatrix}$ dar. Er transformiert nach einer Spinordarstellung mit $T_+ = 0$ und $T_- = \frac{1}{2}\sigma$, also

$$\Psi_R(x) \mapsto \Psi'_R(x') = A_R \Psi_R(x)$$

wobei

$$A_R := \Lambda^{(0,\frac{1}{2})} = exp\left\{ -\frac{i}{2}(\varphi + i\nu) \cdot \sigma \right\} \in SL(2, \mathbb{C})$$

Der konjugierte Darstellungsraum der $SL(2, \mathbb{C})$ ist auch hier der Raum der komplexen Zweierspalten, wobei Es sich hier um die Weyl-Spinoren 2.Art oder rechtshändige Weyl-Spinoren der Form $\Psi_R = \begin{pmatrix} \psi^{\dot{1}} \\ \psi^{\dot{2}} \end{pmatrix}$ handelt. Der invariante antisymmetrische Tensor, der eine Metrik des konjugierten Raumes definiert ist:

$$\bar{\epsilon} = (\bar{\epsilon}_{\alpha\beta}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma^2$$

Demzufolge hat man auch hier eine symplektische Struktur und erhält die gleichen Folgerungen für das Skalarprodukt:

$$(\Psi_R, \Phi_R) := -\psi^{\dot{1}}\phi^{\dot{2}} - \psi^{\dot{2}}\phi^{\dot{1}}$$

$$(\Psi_R, \Psi_R) = 2\psi^{\dot{2}}\psi^{\dot{1}} \neq 0$$

Die komplexe Linearkombination von den Drehimpulsoperatoren J^k und den Boost-Generatoren K^k hatte den Effekt, dass die neuen Operatoren T_+ und T_- nicht mehr hermitesch sind. Dies hat zur Folge, dass die Darstellungen $A_{L/R}$ nicht unitär sind.

Da die komplexe Konjugation bei nicht-unitären Matrizen nicht durch Ähnlichkeitstransformationen erreichbar ist, sind beide Fundamentaldarstellungen inäquivalent.

7.3 Verknüpfung von Darstellungen

Die Weyl-Darstellung hat den Nachteil, dass die Raumspiegelung im allgemeinen keine Darstellung in der $SL(2, \mathbb{C})$ findet da man unter Raumspiegelung den Darstellungsraum verläßt. Dieses Problem löst der Überganz zur 4-dim. Dirac Notation. Also der Übergang zu der allgemeinen Darstellung $D^{\text{Dirac}} = D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ auf dem 4-dim. Raum der Dirac- oder Viererspinoren

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_{\dot{1}} \\ \psi_{\dot{2}} \end{pmatrix}.$$

Der Paritätsoperator P hat dort die Form:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

und $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}$ geht über in $P\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_R \\ \Psi_L \end{pmatrix}$. Das bedeutet der Raum der Vierer- oder Diracspinoren ist der Darstellungsraum von $SL(2, \mathbb{C})$ bzgl. des 2-dim. Spinors $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}$.

8 Casimir-Operatoren

Eine nichtlineare Verknüpfung von Generatoren, die mit allen Generatoren der Gruppe vertauscht, nennt man Casimir-Operator. Die Poincarégruppe besitzt 2 Casimiroperatoren: Zum einen den Operator des Viererimpulsquadrats

$$P^2 := P_\mu P^\mu = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu$$

und der mittels des Pauli-Lubanski-Vektor

$$W^\mu := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\kappa\lambda\nu} P_\kappa M_{\lambda\nu}$$

definierte relativistische Spinoperator:

$$W^2 := W_\mu W^\mu$$

P^2 kommutiert trivialerweise mit den P_λ's und mit den $M^{\mu\nu}$ wegen:

$$[P_\lambda P^\lambda, M^{\mu\nu}] = P_\lambda [P^\lambda, M^{\mu\nu}] + [P^\lambda, M^{\mu\nu}] P_\mu$$

$$= i P_\lambda (g^{\lambda\nu} P^\mu - g^{\lambda\mu} P^\nu) + i (g^{\lambda\nu} P^\mu - g^{\lambda\mu} P^\nu) P_\lambda$$

$$= i([P^\nu, P^\nu] + [P^\mu, P^\nu]) = 0$$

Also ist P^2 ein Casimir Operator der Poincarégruppe. Auch der relativistische Spinoperator vertauscht mit den Generatoren der Lorentzgruppe:

$$[W^2, M^{\mu\nu}] = W_\lambda [W^\lambda, P^\mu] + [W_\lambda, M^{\mu\nu}] W^\lambda$$

$$= i W_\lambda (g^{\lambda\mu} W^\nu - g^{\lambda\nu} W^\mu) + i (g^\mu_\lambda W^\nu - g^\nu_\lambda W^\mu) W^\lambda$$

$$= i(W^\lambda W^\nu - W^\nu W^\mu + W^\nu W^\mu - W^\mu W^\nu) = 0$$

Das Produkt

$$P^\mu W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\kappa\lambda\nu} P^\mu P^\nu M_{\kappa\lambda} = 0$$

verschwindet, da es antisymmetrisch in den Indizes des ϵ-Tensors aber symmetrisch in den Indizes der Impulsoperatoren ist Man kann außerdem zeigen, dass

$$[W^\mu, P^\nu] = 0 \forall \mu, \nu$$

Um zu verifizieren, dass der relativistische Spinoperator ein weiterer Casimir-Operator ist, muss dieser zusätzlich mit dem Operator des Viererimpulsquadrats P^2 kommutieren. Dies bedeutet, dass der Raum der möglichen Zustände in zwei völlig unabhängige Zustandsräume zerfällt. Allerdings läßt sich nun mit Leichtigkeit folgern, dass

$$[W^2, P^\mu] = W_\nu [W^\nu, P^\mu] + [W_\nu, P^\mu] W^\nu = 0$$

Wenn man von Linearkombinationen absieht, sind P^2 und W^2 alle Casimir-Operatoren der Poincarégruppe. Der Operator des Viererimpulsquadrats hat die möglichen Eigenwerte $p^2 = m^2 c^2$. Die Eigenwerte von W^2 sind durch $w^2 = -m^2 c^2 s(s+1)$ gegeben. Daher läßt sich die Darstellung der Poincarégruppe durch Angabe der Masse m und des Spins s vollständig charakterisieren! Physikalisch wird die Anzahl Zustände dadurch eingeschränkt, dass nur $p^2 > 0$ und $p^2 = 0$ sinnvoll sind, da es bisher keine Anzeichen dafür gibt, dass Tachyonen exisieren.

9 Die irreduziblen Darstellungen des Poincarégruppe

9.1 Die massive Darstellung mit $p^2 = m^2 > 0$ mit $c = 1$

Man hat folgende Eigenwertgleichungen:

$$P^2 \left| m, s, \vec{p}, s_3 \right\rangle = m^2 \left| m, s, \vec{p}, s_3 \right\rangle$$

und

$$W^2 \left| m, s, \vec{p}, s_3 \right\rangle = -m^2 s(s+1) \left| m, s, \vec{p}, s_3 \right\rangle .$$

Da W^2 und P^2 miteinander kommutieren, kann man die irreduziblen Darstellungen der W^2 zu festem p berechnen. Um einen allgemeinen Zustand auf $\vec{p} = 0$ zu transformieren, geht man in das Ruhesystem über (dies ist möglich, da $p^2 > 0$). Der Lorentzboost, der $(m, 0, 0, 0)$ auf $(p^0, \vec{p})$ abbildet hat die folgende Form:
$(L_p) \in L_+^\uparrow$, da $p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} > 0$.

$$(L_p) = \begin{pmatrix} \frac{p^0}{m} & -\frac{p_l}{m} \\ \frac{p^k}{m} & \delta_l^k - \frac{p^k p_l}{m(m+p^0)} \end{pmatrix}$$

Da dies eine invertierbare Matrix ist, bildet dementsprechend $(L_p)^{-1}$ die Umkehrabbildung. Man möchte nun die Wirkung einer beliebigen Lorentztransformation Λ auf einen beliebigen Zustand $\left| m, s; \vec{p}, s_3 \right\rangle$ betrachten: Hierzu sei $T(\Lambda)$ die Darstellung der Lorentztransformation.

$$\begin{aligned} T(\Lambda) \left| m, s; \vec{p}, s_3 \right\rangle &= T(\Lambda) T(L_p) \left| m, s; \vec{0}, s_3 \right\rangle \\ &= T(L_{\Lambda p}) T(L_{\Lambda p}^{-1}) T(\Lambda L_p) \left| m, s; \vec{0}, s_3 \right\rangle \\ &= T(L_{\Lambda p}) T(L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p) \left| m, s; \vec{0}, s_3 \right\rangle \end{aligned}$$

Der Anteil

$$R(\Lambda p, p) = L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p$$

wirkt auf das Ruhesystem $\left| m, s; \vec{0}, s_3 \right\rangle$
gemäß

$$(m, \vec{0}) \to (p^\mu)_{p^2 = m^2} \to ((\Lambda p)^\mu)_{(\Lambda p)^2 = m^2} \to (m, \vec{p})$$

d.h. $R_0^0 = 1$, was wiederum bedeutet, dass R eine reine Raumdrehung beschreibt.

$$R(\Lambda p, p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R'(\Lambda p, p) \end{pmatrix}$$

heißt Wigner-Drehung - mit $R'(\Lambda p, p) \in SO(3)$. Damit läßt sich $R(\Lambda p, p)$ als Summe von Drehmatrizen $D_{s_3', s_3}^{(s)}(R(\Lambda p, p))$ zu

$$T(R(\Lambda p, p)) \left| m, s; \vec{0}, s_3 \right\rangle = \sum_{s_3' = -s}^{s} D_{s_3', s_3}^{(s)}(R(\Lambda p, p)) \left| m, s; \vec{0}, s_3 \right\rangle$$

schreiben wobei die D's bereits irreduzible Matrixdarstellungen sind. $T(R(\Lambda p, p))$ist also vollständig reduzibel. Nach Einsetzen in obige Gleichung für $T(\Lambda)$ erhält man:

$$T(\Lambda) \left| m, s; \vec{p}, s_3 \right\rangle = \sum_{s_3' = -s}^{s} D_{s_3', s_3}^{(s)}(R(\Lambda p, p)) \left| m, s; \vec{\Lambda p}, s_3 \right\rangle$$

Von der vollständig reduziblen Darstellung der Lorentzgruppe gelangt man nun durch multiplizieren einer allgemeinen Translation zur Darstellung der Poincarégruppe. Mit den Komponenten des Viererimpulses P^μ hat man bei einer Verschiebung um den Vierervektor a

$$T(\mathbb{1}, a)\,|m; \vec{p}\rangle = e^{-ia_\mu P^\mu}\,|m; \vec{p}\rangle$$

$$= e^{-ia_\mu p^\mu}\,|m; \vec{p}\rangle = e^{-i(a_0 p^0 - \vec{a}\vec{p})}\,|m; \vec{p}\rangle$$

Damit hat man für die Darstellung der Poincarégruppe:

$$T(\Pi)\,|m, s; \vec{p}, s_3\rangle = T((\Lambda, a))\,|m, s; \vec{p}, s_3\rangle = e^{-i(a_0 p^0 - \vec{a}\vec{p})} \sum_{s_3'=-s}^{s} D^{(s)}_{s_3', s_3}(R(\Lambda p, p)) \left| m, s; \vec{\Lambda p}, s_3 \right\rangle$$

Elementarteilchen sind vollständig reduzible Darstellungen der Poincarégruppe.

9.2 Die masselose Darstellung mit $p^2 = 0$ und $W^2 = 0$

Für den Fall $m = 0$ (masselos) und $W^2 = 0$ (für die Quantisierung des Spins) ist die Sache nicht so einfach, da man wegen der Lichtgeschwindigkeit des Teilchens nicht in das Ruhesystem übergehen kann. Für je zwei lichtartige Vektoren lässt sich ein Bezugssystem finden für das

$$a_\mu a^\mu = 0, \;\; a_\mu b^\mu = 0, \;\; b_\mu b^\mu = 0$$

mit dem Minkowski-Skalarprodukt gilt. Damit ergibt sich sofort, dass $b_\mu = \kappa a_\mu$ mit κ einer Proportionalitätskonstanten, gilt. Wie wir bereits gesehen haben, ist dies für W^μ und P^μ gerade erfüllt, so dass

$$W^\mu = hP^\mu$$

gelten muss. Aus der Nullkomponente erhält man

$$h = \frac{P \cdot S}{|P|}$$

für die Helizität des Teilchens. Anschaulich beschreibt sie die Projektion des quantisierten Teilchenspins auf die Bewegungsrichtung und kann demnach die Werte

$$h = -s, -(s+1), ..., s+1, s$$

annehmen. Zunächst stehen also s und $-s$ für zwei verschiedene Darstellungen. Für Teilchen, die unter Raumspiegelung invariant sind, betrachtet man beide Darstellungen als eine. Eine Ausnahme dieses Verhaltens bildet das Neutrino, das bei Raumspiegelung zum Antiteilchen übergeht.

Der Helizitätsoperator existiert auch für den Fall massiver Teilchen, ist aber nur im masselosen Fall ein Casimir-Operator.

10 Literatur

1. Skript „Lorentz- und Poincarégruppe“, M. Stingl
   http://pauli.uni-muenster.de/Seminare/teilchen/teilchen_ws99/LoPoGr/LoPoGr.html

2. Supersymmetrie, H. Kalka/G.Soff, Teubner, 1997

3. Spinors in Physics, J. Hladik, Springer, 1999

4. http://morw.mathematik.uni-stuttgart.de/