Seminarvortrag
Hamiltonsches Chaos

Daniel Lahrmann (404 204),
E-Mail:
d_lahr01@wwu.de

2. Dezember 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Hamiltonsche Systeme

1.1 Allgemeines

Ein Hamiltonsches System befindet sich in einem 2n-dimensionalen Phasenraum. Dabei ist n die Anzahl der Freiheitsgrade. Hierbei unterscheidet man zwischen den Ortskoordinaten q_i und den Impulskoordinaten p_i. Für die Orts- und Impulskoordinaten sollen die kanonischen Bewegungsgleichungen gelten:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{2}$$

Die Funktion $H(\vec{q}, \vec{p})$ nennt man die Hamiltonfunktion. Sie beschreibt die Eigenschaften eines Hamiltonschen Systems.

Man betrachtet nun das System als ein Fluss im 2n-Dimensionalen Phasenraum. Hierbei wird jedem Momentanen Phasenraumpunkt $\xi(t) = \begin{pmatrix} \vec{q}(t) \\ \vec{p}(t) \end{pmatrix}$ ein Phasengeschwindigkeitsvektor $v(\vec{q}, \vec{p}, t) = \begin{pmatrix} \dot{\vec{q}}(t) \\ \dot{\vec{p}}(t) \end{pmatrix}$ zugeordnet. Mithilfe dieser Größen kann die zeitliche Entwicklung des Phasenraumpunktes bestimmt werden:

$$\Phi^t : \xi(0) \rightarrow \xi(t) \tag{3}$$

Dabei wird die Funktion Φ^t hamiltonscher Fluss genannt. Ein Beispiel für ein Hamiltonschen Fluss mit einem Freiheitsgrad ist in Abbildung 1 zu finden.

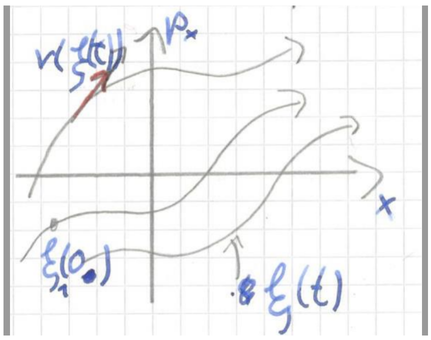

Abbildung 1: Hamiltonscher Fluss mit einem Freiheitsgrad

Nun wird die Divergenz des Geschwindigkeitsvektor $v(\vec{q}, \vec{p}, t)$betrachtet:

$$\operatorname{div}(v(\vec{q}, \vec{p}, t)) = \sum_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \tag{4}$$

Unter Verwendung der kanonischen Bewegungsgleichungen (1) und (2) folgt daraus:

$$\operatorname{div}(v(\vec{q}, \vec{p}, t)) = \sum_i \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i} = 0 \tag{5}$$

Dies ist das Liouville's Theorem.

Aus dem Liouville's Theorem kann gefolgert werden, dass $\Delta\vec{p} \cdot \Delta\vec{q}$zeitlich konstant sind. Dies hat zur folge, dass auch die Wegintegrale:

$$\int_{\gamma t} \vec{p} \mathrm{d}\vec{q} = \int_{\gamma 0} \vec{p} \mathrm{d}\vec{q} \tag{6}$$

konstant sein müssen.

Es folgt ebenfalls, dass:

$$\mathrm{d}^n p \cdot \mathrm{d}^n q = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{d}p_i \mathrm{d}q_i \tag{7}$$

konstant ist.

1.2 Poissonklammern

Nun wird die zeitliche Ableitung einer beliebigen Funktion $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ untersucht. Diese ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{q}, \vec{p}, t) &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{q}_i \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \\
&= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} \qquad (8)
\end{aligned}$$

Dabei nennt man

$$\{a, b\} = \sum_i \frac{\partial a}{\partial q_i}\frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i}\frac{\partial b}{\partial q_i} \tag{9}$$

eine Poissonklammer. Mit Hilfe der Poissonklammer $\{f, H\}$ kann man somit nach Erhaltungsgrößen f suchen.

Es zeigt sich direkt, dass

$$\begin{aligned}
\{q_i, q_j\} &= \{p_i, p_i\} = 0 \qquad (10) \\
\{q_i, p_i\} &= \delta_{ij} \qquad (11)
\end{aligned}$$

2 Kanonische Transformationen

2.1 Kanonische Transformation

Häufig ist es sinnvoll seine Koordinaten und somit auch die Hamiltonfunktion zu transformieren:

$$\begin{aligned}
\vec{q} &\to \tilde{\vec{q}} \\
\vec{p} &\to \tilde{\vec{p}} \\
H &\to \tilde{H}
\end{aligned}$$

Dabei ist aber darauf zu achten, dass die kanonischen Bewegungsgleichungen auch im neuen transformierten System gelten.

Allgemein lässt sich die Transformation beschreiben durch eine erzeugenden Funktion S. Mit dieser Funktion S muss schließlich gelten:

$$\vec{p}\dot{\vec{q}} - H = \tilde{\vec{p}}\dot{\tilde{\vec{q}}} - \tilde{H} + \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \tag{12}$$

S kann die Form haben: $S\left(\vec{q}, \tilde{\vec{p}}, t\right)$. Falls dies gilt muss für die transformierten Koordinaten folgendes gelten, damit Gleichung (12) erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} \qquad (13) \\
\tilde{\vec{q}} &= \frac{\partial S}{\partial \tilde{\vec{p}}} \qquad (14) \\
\tilde{H} &= H + \frac{\partial S}{\partial t} \qquad (15)
\end{aligned}$$

2.2 Wirkungswinkelvariablen

Sei nun H nicht explizit zeitabhängig. Hat man n Erhaltungsgrößen $A_i\left(\vec{p},\vec{q}\right)$ des hamiltonschen Systems gefunden, so können diese verwendet werden um sich n Impulskoordinaten $\tilde{p}_i$ zu ermitteln, die in ihrem transformierten System konstant sind.

Zuerst werden die Richtungsvektoren

$$v_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial \vec{p}}, -\frac{\partial A_i}{\partial \vec{q}}\right)$$

definiert. Es zeigt sich, dass diese Richtungsvektoren geschlossene Wege Γ_i über die Oberfläche eines n-dimensionalen Torus bilden. Dies ist in Abbildung 2 schematisch dargestellt.

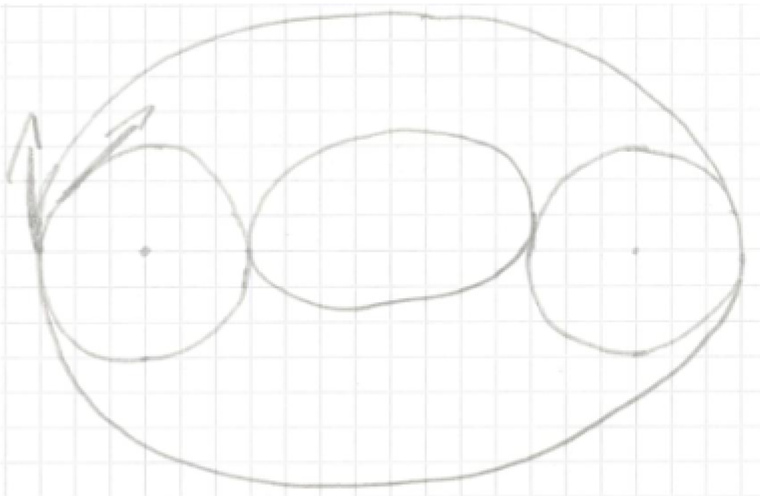

Abbildung 2: Geschlossene Wege im 2-dim Torus

Nun kann Gleichung (6) verwendet werden um die neue Impulskoordinaten J_i zu berechnen.

$$J_i = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma_i} \vec{p}\mathrm{d}\vec{q} = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma_i}\sum_{k=1}^{n} p_k \mathrm{d}\vec{q} \tag{16}$$

Vor dem Integrieren ist $p_k\left(\vec{q},\vec{A}\right)$ allgemein abhängig von dem Ort $\vec{q}$ und der Erhaltungsgrößen $\vec{A}$. Durch das Integrieren fällt die Abhängigkeit vom Ort weg und man erhält eine neue Impulskoordinate $J_i\left(\vec{A}\right)$, die nur von $\vec{A}$abhängt. Da aber $\vec{A}$ nach Voraussetzung konstant ist, ist auch J_i konstant. Man nennt J_i auch Wirkungskoordinate.

Somit transformiert man ein System $\left(\vec{q},\vec{p}\right)$ in ein System $\left(\vec{\Theta},\vec{J}\right)$ wobei die Erzeugenden Funktion $S\left(\vec{q},\vec{J}\right)$ definiert ist durch das Integral aus Gleichung (16).

Da die Wirkungskoordinate konstant ist, folgt aus den hamiltonschen Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\Theta}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i \tag{17}$$

$$\Theta_i(t) = \omega_i \cdot t + \Theta_i(0) \tag{18}$$

Aus der Definition von $\dot{\Theta}_i = \omega_i$ folgt, dass ω_i eine Frequenz ist.

3 Beispiel: Kepler-Problem

Nun werden die eingeführten Methoden verwendet, um eine Lösung des Kepler-Problems zu finden. Die Potentielle Energie des Problems ergibt sich aus:

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} = -\frac{k}{r} \tag{19}$$

Somit ergibt sich die Hamiltonfunktion in Zylinderkoordinaten:

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} = E \tag{20}$$

Es handelt sich hier um ein Zentralpotential, bei dem Drehimpulserhaltung gilt:

$$p_\phi = \text{const.} = \frac{\partial S}{\partial \phi} \tag{21}$$

Da auch Energieerhaltung gilt, kann somit für die Ermittlung der 2.Wirkungskoordinate die Gleichung nach dem Impuls p_r umgestellt werden:

$$p_r = \sqrt{2E\mu + \frac{k}{r} - \frac{p_\phi^2}{r^2}} = \frac{\partial S}{\partial r} \tag{22}$$

Nun kann anhand Gleichung (16)die Wirkungswinkelvariablen errechnet werden:

$$J_\phi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\phi \mathrm{d}\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p_\phi \mathrm{d}\phi = p_\phi \tag{23}$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{2E\mu + \frac{k}{r} - \frac{p_\phi^2}{r^2}}\mathrm{d}r = \frac{\sqrt{\mu}k}{\sqrt{-2E}} - J_\phi \tag{24}$$

Um die neue Hamiltonfunktion zu bestimmen kann die Gleichung (24) nach der Energie umgestellt werden:

$$H = E = -\frac{\mu k^2}{(J_r + J_\phi)^2} \tag{25}$$

Für die Frequenzen gilt:

$$\omega_r = \omega_\phi = \frac{\mu k^2}{(J_r + J_\phi)^3} \tag{26}$$

Somit bewegt sich das System im Wirkungswinkelraum auf geschlossene Kreisbahnen. Dies erfüllt das 3. Keplersche Gesetz. Der Radius der Kreisbahn ist J_r.

4 Integrabilität

Ein System ist integrabel, wenn dessen kanonischen Bewegungsgleichungen auf die Lösung von mehreren eindimensionalen Integralen zurückführen lässt. Dies ist auch bei der Bestimmung von Wirkungswinkelvariablen der Fall. Wann ein System integrabel ist sagt der Satz von Liouville und Arnold aus.

Eins räumlich begrenztes System mit n Freiheitsgraden ist integrabel, wenn es n Phasenfunktionen I_j gibt für die gilt:

1. Die Phasenfunktionen I_j sind zeitlich konstant.
2. Die Phasenfunktionen sind in Involution: $\{I_i, I_j\} = 0$
3. Die totalen Differentiale dI_j sind linear unabhängig.

Da H konstant sein soll, kann H als erste Phasenfunktion gewählt werden. Zudem besitzt H Symetrie-Eigenschaften, sodass es auch nur maximal n Phasenfunktionen gibt, die zusammen dies Voraussetzungen erfüllen, obwohl es $2n$ Phasenkoordinaten gibt.

Nun gibt es mehrere Beispiele für diesen Satz.

4.1 Zentralpotential

Das System besteht aus 3 Freiheitsgraden. Die erste Phasenfunktion kann durch H gewählt werden. Da Drehimpulserhaltung gilt kann zum Beispiel der Drehimpuls in z-Richtung L_z als zweite Phasenfunktion gewählt werden.

Da nun gilt:

$$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ijk} L_k \tag{27}$$

ist ein Drehimpuls in zum Beispiel x-Richtung keine Phasenfunktion, die mit L_z die zweite Bedingung erfüllt. Diese Bedingung wird aber durch den Drehimpulsquadrat L^2 erfüllt.

Da man nun 3 Phasenfunktionen gefunden hat, die die Bedingungen erfüllen, ist das System integrabel. Dies war auch zu erwarten, da dieses Problem schon in Kapitel 3gelöst wurde.

4.2 Drei-Körper-Problem

Beim Dreikörperproblem können drei Körper sich jeweils in 3 Richtungen bewegen. Dies Macht insgesamt 9 Freiheitsgrade.

Man kann zum Beispiel nun 3 Phasenfunktionen durch die lineare Schwerpunktsbewegung wählen. 3 weitere Phasenfunktionen ergeben sich aus der Relativbewegung. Diese werden analog zu Kapitel 4.1 gewählt. Die 3 letzten Phasenfunktionen, die die Bedingungen erfüllen können aber nicht mehr gefunden werden. Somit ist das System nicht integrabel.

5 Quellen

- Vortrag von Jim Bachmann und Thorsten Teuber 2013
- Chaos and Integrability in nonlinear dynamics von Michael Tabor
- Reguläres chaotisches Verhalten Hamiltonscher Systeme
- http://www.physik.tu-dresden.de/~timm/personal/teaching/mech_s14/Theoretische_Mechanik.pdf