Streuung an einer harten Kugel

Seminar zur Theorie der Kerne, Teilchen und kondensierten Materie

16.12.2015

Daniel Klostermann

404549

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Folgenden soll die Streuung an einer harten Kugel erörtert werden. Dies dient als Beispiel für die Partialwellen-Entwicklung zum Lösen von zentralsymetrischen Streuproblemen. Da vor allem der Wirkungsquerschnitt für verschiedene Energien betrachtet werden soll, wird zunächst der Wirkungsquerschnitt für die klassische Streuung an einer harten Kugel berechnet. Anschließend wird der Übergang zur quantenmechanischen Streuung an einer harten Kugel über die Streuung an einer Potentialbarriere geschafft.
Noch zu erwähnen ist, dass nur radialsymmetrische Potentiale mit $V(\vec{r}) = V(r)$, sowie endlicher Reichweite betrachtet werden. Außerdem wird angenommen, dass alle Stöße vollkommen elastisch ablaufen.

2 Klassische Streuung an einer harten Kugel

Beim einfachen, klassischen Streuproblem trifft ein Teilchen auf eine Kugel mit dem Radius R und wird elastisch gestreut. Der Winkel zwischen Einfallsrichtung und dem Lot zum Auftreffpunkt auf der Kugel wird als ϕ_0 bezeichnet. Der Streuwinkel ϑ ist dann gegeben durch $\vartheta = \pi - 2\phi_0$ und kann zwischen 0, bei Berührung ohne Ablenkung und π, bei Rückwärtsstreuung variieren.
Mit ϕ_0 ist der Stoßparameter b gegeben durch $b = R \sin \phi_0$. Für den differenziellen Wirkungsquerschnitt ist bekannt, dass

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j(\vartheta, \Phi)}{j_0}$$

gilt, wobei $j(\vartheta,\Phi)$ und $j(0)$ der gestreute, bzw. einlaufende Teilchenstrom ist. Aufgrund der Rotationssymmetrie des Problems gilt jedoch außerdem:

$$\mathrm{d}\sigma = 2\pi b \mathrm{d}b \quad \text{und} \quad \mathrm{d}\Omega = 2\pi \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta.$$

Durch Einsetzen erhält man:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{b}{\sin\vartheta} \left| \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\vartheta} \right|$$

Man sieht, dass die obigen Angaben zu Streuwinkel und Stoßparameter erweitert werden müssen. Es gilt, dass $\mathrm{d}b = R\cos\phi_0 \mathrm{d}\phi_0$ und $\mathrm{d}\vartheta = -2\mathrm{d}\phi_0$. Nach einsetzen ergibt sich der differenzielle Wirkungsquerschnitt zu

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{b}{sin(\vartheta)}\frac{db}{d\vartheta} \\ &= \frac{b}{\sin(\pi - 2\phi_0)}\frac{R\cos(\phi_0)}{2} \\ &= \frac{R\sin(\phi_0)}{2\sin(\phi_0)\cos(\phi_0)}\frac{R\cos(\phi_0)}{2} \\ &= \frac{R^2}{4}.\end{aligned}$$

Um den totalen Wirkungsquerschnitt zu erhalten integriert man über den gesamten Raumwinkel. Damit erhält man zusätzlich den Faktor 4π und als totaler Wirkungsquerschnitt für die klassische Streuung an einer harten Kugel ergibt sich:

$$\sigma = \pi R^2,$$

was der Querschnittsfläche der Kugel entspricht.

3 Streuung an einer Potentialbarriere

Um eine Überleitung zu bieten wird nun die Streuung an einer Potentialbarriere betrachtet. Das Potential ist in diesem Fall gegeben durch:

$$V(r) = V_0\Theta(R - r)$$

wobei

$$\Theta(R - r) = \begin{cases} 1, & \text{für} R > r \\ 0, & \text{für} R < r \end{cases}$$

ist.
Die Schrödingergleichung für das Problem ist gegeben durch:

$$\left[\delta_r^2 + 2m\left(E - V(r) - \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2mr^2}\right)\right]\chi_l(r) = 0,$$

wobei der radiale Anteil der Wellenfunktion $R_l = \frac{\chi_l}{r}$ betrachtet wird. Für den einfachsten Fall einer s-Welle ist die Schrödingergleichung gegeben durch:

$$\left[\delta_r^2 - 2m(V_0 - E)\right] \chi_o = 0.$$

An dieser Stelle kann direkt das Quadrat des Wellenvektors $k_i^2 = 2m(V - 0 - E)$ abgelesen werden.
Der allgemeine Ansatz für die Wellenfunktionen innerhalb und außerhalb des Potentials ist bekannt. Es gilt für $r < R$:

$$\chi(r) = C_{in}^{+} e^{k_i r} + C_{in}^{-} e^{-k_i r}$$

und für $r > R$:

$$\chi(r) = C_{out}^{+} e^{ikr} + C_{out}^{-} e^{-ikr}.$$

Außerdem ist die allgemeine Lösung für Partialwellen außerhalb des Potentials gegeben durch:

$$\psi^{+}(r,\Theta) \approx \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2k} \sum_{l}^{\infty} (2l+1) i^{l+1} P_l(\cos(\Theta)) \cdot \left(\frac{e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} - \eta_l \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{r} \right).$$

Der radiale Anteil dieser Funktion ist für $l = 0$ gegeben durch:

$$R_0 \approx \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2k} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} - \eta_l \frac{e^{ikr}}{r} \right).$$

Betrachtet wird nun die Streuphase η, für die gilt , dass $|\eta_0|^2 = 1$. Aus diesem Grund lässt sich die Streuphase als $\eta_0 = e^{2i\delta_0}$ parametrisieren. Für die Wellenfunktion außerhalb des Potentials ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}\chi_0(r) = R_0 r &\approx \frac{i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2k} \left(e^{-ikr} - e^{2i\delta_0} e^{ikr}\right) \\ &\approx \frac{i e^{i\delta_0}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} 2k} \left(e^{-i(\delta_0 + kr)} - e^{i(\delta_0 + kr)}\right) \\ &\approx \frac{e^{i\delta_0}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} k} \sin(kr + \delta_0)\end{aligned}$$

mit der Streuphase δ_0.
Da vorher die Annahme $R_l = \frac{\chi_l}{r}$ für den Radialteil der Wellenfunktion getroffen wurde, muss die Wellenfunktion innerhalb des Potentials im Ursprung definiert sein. Das ist nur der Fall, wenn $C_{in}^{+} = -C_{in}^{-}$ gilt. Damit lässt sich für den Lösungsansatz ein neuer Vorfaktor $\widetilde{C_{in}} = 2C_{in}$ definieren. Setzt man den Vorfaktor in den Lösungsansatz für die Wellenfunktion innerhalb des Potentials ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\chi(r) &\approx \frac{\widetilde{C_{in}}}{2} \left(e^{k_i r} - e^{-k_i r}\right) \\ &\approx \widetilde{C_{in}} \sinh(k_i r).\end{aligned}$$

Aus den Wellenfunktionen innerhalb und außerhalb des Potentials kann jetzt mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen die Streuphase berechnet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}\psi_{in}(R) &= \psi_{out}(R) \\ \psi'_{in}(R) &= \psi'_{out}(R)\end{aligned}$$

woraus nach einsetzten

$$\begin{aligned}\widetilde{C_{in}} \sinh(k_i R) &= \frac{e^{i\delta_0}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} k} \sin(kR + \delta_0) \\ \widetilde{C_{in}} \cosh(k_i R) &= \frac{e^{i\delta_0}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} k_i} \cos(kR + \delta_0)\end{aligned}$$

folgt.
Durch Division und Umformung der Gleichungen erhält man die Streuphase mit

$$\begin{aligned}
\frac{\sinh(k_iR)}{\cosh(k_iR)} &= \frac{k_i}{k}\frac{\sin(kR+\delta_0)}{\cos(kR+\delta_0)} \\
\leftrightarrow \tanh(k_iR) &= \frac{k_i}{k}\cdot\tan(kR+\delta_0) \\
\leftrightarrow kR+\delta_0 &= \arctan(\frac{k}{k_i}\cdot\tanh(k_iR)) \\
\leftrightarrow \delta_0 &= \arctan(\frac{k}{k_i}\cdot\tanh(k_iR)) - kR.
\end{aligned}$$

Um die Streuung an einer Potentialbarriere jetzt in eine Streuung an einer harten Kugel zu überführen, werden mehrere aufeinander aufbauende Näherungen gemacht. Für den Fall einer harten Kugel gilt $V_0 \to \infty$. Überträgt man das auf die Streuung an einer Potentialbarriere, so erhält man für den Wellenvektor $k_i = \sqrt{2m(V_0 - E)}$ ebenfalls $k_i \to \infty$. Für die Streuphase erhält man somit $\frac{k}{k_i} \to 0$ und $\tanh(k_iR) \to 1$. Das führt abschließend zur Streuphase für eine Streuung an einer harten Kugel:

$$\delta_0 = -kR.$$

4 Streuung an einer harten Kugel

Nun soll der Fall einer harten Kugel genauer betrachtet werden. Um die Phasenverschiebung nicht nur für s-Wellen berechnen zu können, muss ein neuer Ansatz gemacht werden. Eine weitere Wellenfunktion, die die Schrödingergleichung löst ist:

$$\psi(k,r) = \frac{j_l(kr)n_l(kR) - n_l(kr)j_l(kR)}{\sqrt{j_l^2(kR) + n_l^2(kR}},$$

wobei j_l die sphärische Besselfunktion und n_l die sphärische Neumannfunktion ist.
Für $r \to \infty$ gilt:

$$\psi(k,r) = \frac{\frac{1}{kr}[\sin(kr - \frac{l\pi}{2}n_l(kR) + \cos(kr - \frac{l\pi}{2}j_l(kR)]}{\sqrt{j_j^2(kR) + n_l^2(kR)}}.$$

Aufgrund der kurzen Reichweite des Potentials, muss die Lösung der Wellenfunktion dem asymptotischen Verhalten der sphärischen Besselfunktion gleichen, ist jedoch um die Streuphase verschoben. Setzt man diese Lösungen nun gleich und ordnet jeweils nach Kosinus- und Sinusfunktion, so erhält man als allgemeine Lösung für die Streuphase:

$$\tan(\delta_l) = \frac{j_l(kR)}{n_l(kR)}.$$

Die Korrektheit zeigt sich beim Betrachten der s-Welle, für die mit:

$$j_0(kR) = \frac{\sin(kR)}{kR}$$
$$n_0(kR) = -\frac{\cos(kR)}{kR}$$

gilt, dass

$$\tan(\delta_0(k)) = -\frac{\sin(kR)}{\cos(kR)}$$
$$\delta_0(k) = -kR$$

ist, womit das Ergebnis aus dem vorherigen Kapitel bestätigt ist.
Da aber nicht nur die s-Welle betrachtet werden soll, dient für größere Energien das asymptotische Verhalten der Bessel- und Neumannfunktionen. Mit:

$$j_l(kR \to \infty) \approx \frac{\sin(kR - \frac{l\pi}{2})}{kR}$$
$$n_l(kR \to \infty) \approx -\frac{\cos(kR - \frac{l\pi}{2})}{kR}$$

folgt für die Streuphase:

$$\tan(\delta_l(k)) \approx \frac{\sin(kR - \frac{l\pi}{2})}{\cos(kR - \frac{l\pi}{2})}$$
$$\delta_l(k) = -kR + \frac{l\pi}{2}.$$

5 Wirkungsquerschnitte

Anhand der errechneten Streuphase lässt sich nun der Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einer harten Kugel ermitteln. Für den totalen Wirkungsquerschnitt gilt:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l.$$

Im einfachen Fall einer s-Welle und kleinen Energien, das bedeutet $kR \ll 1$, ergibt sich ein Wirkungsquerschnitt von:

$$\sigma_o(k) = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2(kR) \approx 4\pi R^2,$$

welcher genau dem Vierfachen des Wirkungsquerschnitts im klassischen Fall entspricht. Für große Energien, also $kR \gg 1$, muss jedoch eine Abbruchbedingung für die Summe im totalen Wirkungsquerschnitt gefunden werden. Zu diesem Zweck verwendet man das Verhalten der Besselfunktion. Diese hat ihre erste Wendestelle bei $\sqrt{l(l+1)}$. Aufgrund der kurzen Reichweite des Potentials tragen nur Partialwellen zum Wirkungsquerschnitt bei, die auch einen nennenswerten Überlapp mit dem Potential haben. Dieser Überlapp ist nur gegeben, wenn $kR \ll \sqrt{l(l+1)} \approx l$ gilt. Die Summe über alle Partialwellen kann also ohne größere Fehler bei $l = kR$ abgebrochen werden. Für den Wirkungsquerschnitt gilt dann :

$$\sigma_{tot} \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{kR} (2l+1) sin^2(kR - \frac{l\pi}{2}).$$

An dieser Stelle lässt sich noch weiter kürzen. Geht man von großen Werte für l aus, so gilt näherungsweise $(2l+1) \approx (2l+2)$. Für zwei benachbarte Terme in der Partialwellensumme gilt damit :

$$\sin^2\left(kR - \frac{l\pi}{2}\right) + \sin^2\left(kR - \frac{l\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \approx \sin^2\left(kR - \frac{l\pi}{2}\right) + \cos^2\left(kR - \frac{l\pi}{2}\right) = 1.$$

Für den Wirkungsquerschnitt der Streuung an einer harten Kugel bei hohen Energien bedeutet das letztendlich :

$$\begin{aligned}\sigma_{tot} &\approx \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{kR}\frac{1}{2}(2l+1)\\ &\approx \frac{4\pi}{k^2}\frac{1}{2}(kR)^2\\ &\approx 2\pi R^2.\end{aligned}$$

Das entspricht dem doppelten des klassischen Wirkungsquerschnitts, jedoch nur der Hälfte des Wirkungsquerschnitts für kleine Energien.

6 Zusammenfassung

Um das Beispiel der Streuung an einer harten Kugel im Partialwellenformalismus besser zu verstehen wurde zunächst der klassische Fall betrachtet. Intuitiv ergab sich ein Wirkungsquerschnitt für die Streuung, der der Querschnittsfläche der Kugel entspricht. Für die Überleitung zur quantenmechanischen Streuung wurde dann der Umweg über die Streuung an einer Potentialbarriere genommen, anhand derer gezeigt wurde, wie sich die Streuphase berechnen lässt.
Interessant waren ebenfalls die Wirkungsquerschnitte für die Streuung bei kleinen und großen Energien. Diese unterschieden sich nicht nur vom klassischen Fall, sondern auch untereinander.

7 Quellen

1. Michael Klasen: Script zur Quantenmechanik, Kapitel 2
2. Alexander Atland: Advanced Quantum Mechanics
3. P.H. Richter, Universität Bremen: Skript zur Klassischen Mechanik Sommersemester 2008 (`http://www-nonlinear.physik.uni-bremen.de/download/Vorlesungen/KlassischeMechanik_SoSe2008.pdf`) vom 10.12.2015