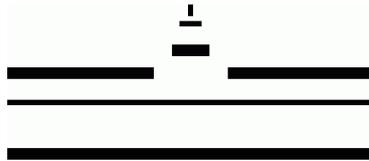


# Dimensionsanalysemethoden in der Physik

Seminar zur Theorie der Atome, Kerne und kondensierten Materie  
Wintersemester 2013/2014

Steffen Finger\*

Tobias Lettmann†



Westfälische Wilhelms-Universität Münster

---

\*Verfasste Abschnitte: 1, 2, 4

†Verfasste Abschnitte: 3

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Begriffe und Methoden</b>	<b>3</b>
2.1	Begriffe . . . . .	3
2.2	Beispiele A . . . . .	3
2.2.1	Freier Fall . . . . .	3
2.2.2	Bewegung durch Fluid . . . . .	4
2.3	Buckingham'sches $\Pi$ -Theorem . . . . .	6
2.4	Beispiele B . . . . .	7
2.4.1	Freier Fall . . . . .	8
2.4.2	Bewegung durch Fluid . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Weiterführende Beispiele</b>	<b>8</b>
3.1	Tropfen am Zugfenster . . . . .	8
3.2	Geschwindigkeit von Wasserwellen . . . . .	10
3.3	Pendel . . . . .	11
3.4	Ausbreitung von Explosionswolken . . . . .	12
3.5	Wärmeleitung . . . . .	13
3.6	Fallende Kugel mit Reibung . . . . .	13
3.6.1	Lineare Reibung . . . . .	14
3.6.2	Quadratische Reibung . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>17</b>

# 1 Motivation

Das Ziel physikalischer Arbeit ist typischerweise das Auffinden von Gesetzen, welche Beziehungen zwischen verschiedenen, physikalisch unabhängigen Größen herstellen. Diese Gesetze werden typischerweise in der Gestalt von mathematischen Gleichungen erfasst. Mit Hilfe der Gesetze können schließlich Vorhersagen über das Verhalten von verschiedensten Systemen gemacht werden.

Beispielsweise wird in der Mechanik die Bewegung eines Körpers häufig durch Differentialgleichungen beschrieben, die Lösungen dieser Gleichungen wiederum ermöglichen es die gewünschten Vorhersagen zu machen. Allerdings sind diese Lösungen im allgemeinen nur schwer oder gar nicht analytisch zu finden. Wie sich in dieser Ausführung zeigen wird, bietet es sich daher an, andere Verfahren oder Formalismen wie die Dimensionsanalyse zu entwickeln.

## 2 Begriffe und Methoden

Der Begriff der Dimensionsanalyse beinhaltet das Verfahren der (systematischen) Überführung von physikalischen Größen in eine dimensionslose Form. Die Systematik des Verfahrens wird in diesem Abschnitt in Form des Buckingham'schen II-Theorems behandelt. Zuvor allerdings werden einige Begriffe erklärt und zwei Beispiele diskutiert. Diese Beispiele werden abschließend noch einmal aufgegriffen, um eine Plausibilitätsbetrachtung des Buckingham Theorems durchzuführen.

### 2.1 Begriffe

Im Rahmen der Dimensionsanalyse ist es hilfreich, zwischen den Bezeichnungen „*physikalische Größe*“, ihrer „*Dimension*“ und der zugehörigen verwendeten „*Einheit*“ klar zu unterscheiden.

Die *physikalische Größe* bezeichne eine quantitative Angabe zur Ausprägung einer Eigenschaft oder eines Phänomens. Hingegen meint die *Dimension* einer physikalischen Größe gerade die Abhängigkeit von einem Satz an gewählten Basisgrößen. Diese Basisgrößen sind zunächst willkürlich wählbar, jedoch ist die Wahl dadurch eingeschränkt, dass sie ein vollständiges Basissystem bilden müssen. Die Vollständigkeit dieses Systems meint hierbei, dass die Dimension einer beliebigen physikalischen Größe durch ein Potenzprodukt der Dimensionen aus dem gewählten Satz dargestellt werden kann. Das üblicherweise verwendete System an Basisgrößen besteht aus der Länge ( $L$ ), der Masse ( $M$ ), der Zeit ( $T$ ), der Stromstärke ( $I$ ), der absoluten Temperatur ( $\Theta$ ), der Stoffmenge ( $N$ ) und der Lichtstärke ( $J$ ). Hiervon abzugrenzen ist die verwendete *Einheit* einer physikalischen Größe, diese wird zusätzlich zur Dimension eingeführt, um eine Vergleichbarkeit zwischen physikalischen Größen gleicher Art herzustellen.

Zur Verdeutlichung seien zwei Beispiele genannt. Die physikalische Größe Drehmoment  $\vec{M}$  hat die Dimension  $L^2MT^{-2}$ , wird aber typischerweise in der Einheit Nm angegeben. Andererseits besitzt die physikalische Größe Energie  $E$  ebenfalls die Dimension  $L^2MT^{-2}$ , wird aber in der Einheit J oder eV angegeben. Die beiden genannten physikalischen Größen sind in ihrer Bedeutung sehr verschieden, obwohl sie die gleiche Dimension besitzen. Dieser Zusammenhang wird auch in der Unterschiedlichkeit der verwendeten Einheit deutlich. Ähnliche Beispiele wären die Größen Aktivität und Frequenz, welche jeweils die Dimension  $T^{-1}$  besitzen, jedoch mit unterschiedlichen Einheiten also Bq beziehungsweise Hz gemessen werden.

### 2.2 Beispiele A

Wie oben bereits beschrieben, beruhen Methoden der Dimensionsanalyse auf der Eliminierung der Dimensionen von physikalischen Größen. Um hierfür ein besseres Verständnis zu erlangen, werden im Folgenden zwei einfache Beispiele diskutiert.

#### 2.2.1 Freier Fall

Einleitend wurde bereits auf die Zielsetzung physikalischer Arbeit eingegangen. Für einen einfachen Zugang zum Verfahren, wird in diesem Abschnitt zunächst für eine sehr einfache Form der

Bewegung ein mathematisches Gesetz gesucht. Betrachtet wird der freie Fall, also eine Fallbewegung ohne Reibungskräfte. Als zusätzliche Vereinfachung werde eine konstante Beschleunigung  $g$  und eine verschwindende Initialgeschwindigkeit für die Bewegung vorausgesetzt.

Im ersten Schritt der Analyse muss ein vollständiger Satz an physikalischen Größen gefunden werden. Wichtig ist hierbei erneut die Vollständigkeit, welche in diesem Fall meint, dass sämtliche Größen, welche die Bewegung beeinflussen, in diesem Satz enthalten sein müssen. In diesem Beispiel sind die beteiligten Größen offenbar die Fallstrecke  $x$ , die Fallzeit  $t$  und die Erdbeschleunigung  $g$ . Die Dimensionen dieser Größen sind gegeben durch  $[x] = L$ ,  $[t] = T$  und  $[g] = LT^{-2}$ .

Der zweite Schritt des Verfahrens entspricht der Annahme, dass eine funktionelle Abhängigkeit zwischen den gerade festgelegten Größen besteht. Diese Abhängigkeit kann geschrieben werden als

$$f_0(x, t, g) = 0.$$

Nun gilt es die Dimensionen in den Argumenten der Funktion  $f_0$  durch das Bilden von Potenzprodukten zu eliminieren. Betrachtet werde hierfür zunächst die Dimension Zeit. Durch Multiplikation von  $g$  mit  $t^2$  verschwindet die Dimension der Zeit und die Funktion  $f_0$  lässt sich äquivalent durch eine andere funktionelle Abhängigkeit schreiben als

$$f_1(x, gt^2) = 0.$$

Es verbleibt eine Funktion, deren sämtliche verbleibende Argumente die Dimension einer Länge besitzen. Um im nächsten Schritt diese zu eliminieren, wird der Quotient gebildet und es ergibt sich

$$f_2(gt^2/x) = 0.$$

Bei dem Übergang von  $f_0$  zu  $f_1$  beziehungsweise von  $f_1$  zu  $f_2$  hat sich lediglich die explizite funktionelle Abhängigkeit verändert.

Im letzten Schritt der Behandlung soll eine möglichst einfache Form der Abhängigkeit gefordert werden, diese führt auf

$$\boxed{\frac{gt^2}{x} \stackrel{!}{=} c = \text{const.}}$$

Im Experiment würde sich nach wenigen Messungen zeigen, dass  $c \approx 2$  ist, was auf die bekannte Form des Fallgesetzes führt mit  $x = gt^2/2$ .

Dieses Ergebnis wurde ohne Kenntnis der zugehörigen Differentialgleichung gefunden. Es sei darauf hingewiesen, dass das Experiment nicht endgültig den exakten Wert von  $c = 2$  bestätigen kann.

### 2.2.2 Bewegung durch Fluid

Das zweite Beispiel beschäftigt sich mit der Kraft, die auf einen Körper wirkt, welcher sich durch ein Fluid bewegt.

#### Betrachtung mit Viskosität

Analog zum ersten Beispiel sollen im ersten Schritt die relevanten Größen bestimmt werden. Hierzu gehören natürlich die Kraft  $F_\eta$ , die relative Geschwindigkeit  $v$  zwischen Körper und Medium, die Querschnittsfläche  $S$  des Körpers bezüglich der Bewegungsrichtung und in dieser Betrachtung die Viskosität  $\eta$ .

Nun wird eine funktionelle Abhängigkeit zwischen diesen Größen angenommen. Anders allerdings gegenüber dem vorherigen Beispiel, werde eine konkrete Gestalt dieser Abhängigkeit vorgegeben. Es gelte

$$F_\eta = Av^\alpha S^\beta \eta^\gamma, \tag{1}$$

wobei  $A$  eine dimensionslose Proportionalitätskonstante und  $\alpha, \beta, \gamma$  ebenfalls dimensionslose rationale Zahlen seien.

Bei diesem Ansatz kann nun die Gleichheit der Dimensionen der Größen auf beiden Seiten der Gleichung gefordert werden. Explizit bedeutet das offenbar

$$[F_\eta] = LT^{-2}M \stackrel{!}{=} (LT^{-1})^\alpha (L^2)^\beta (ML^{-1}T^{-1})^\gamma = L^{\alpha+2\beta-\gamma} M^\gamma T^{-\alpha-\gamma}.$$

Das daraus durch Koeffizientenvergleich entstehende lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + 2\beta - \gamma \\ 1 &= \gamma \\ -2 &= -\alpha - \gamma \end{aligned}$$

hat die Lösung  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1/2$  und  $\gamma = 1$ . Setzt man nun diese Ergebnisse in den Ansatz (1) ein, erhält man das Kraftgesetz

$$\boxed{F_\eta = Av\eta\sqrt{S}}. \quad (2)$$

Für eine Plausibilitätsüberlegung werde nun angenommen, dass  $S \propto R^2$  gilt, wobei  $R$  die lineare Ausdehnung des Körpers senkrecht zur Bewegungsrichtung bezeichne. Der obige Zusammenhang schreibt sich jetzt als

$$F_\eta = A'v\eta R.$$

Dieses Kraftgesetz ist mit dem Koeffizienten  $A' = -6\pi$  als Stokes'sche Reibung bekannt.

### Betrachtung mit Massendichte

Bei der Überlegung zu den physikalischen Abhängigkeiten wurde der Einfluss der Massendichte  $\rho$  vernachlässigt. Verwendet man an Stelle der Viskosität  $\eta$  also die Massendichte  $\rho$ , erhält man den Ansatz

$$F_\rho = Bv^\alpha S^\beta \rho^\delta. \quad (3)$$

Hierbei bezeichnen  $B$  und die Exponenten  $\alpha, \beta, \delta$  erneut dimensionslose Parameter. Aufstellen und Lösen des linearen Gleichungssystems wie in der vorherigen Betrachtung ergibt  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  und  $\delta = 1$ . Einsetzen in den Zusammenhang (3) ergibt letztendlich das Kraftgesetz

$$\boxed{F_\rho = Bv^2 S \rho}. \quad (4)$$

Auch hierbei handelt es sich um eine aus der Strömungsdynamik bekannte Beziehung.

### Abschließende Betrachtung

Wie bereits in dem Beispiel zum freien Fall angegeben, kann nach Bestimmung der funktionellen Abhängigkeit gemäß (2) beziehungsweise (4) ein Experiment dazu eingesetzt werden, die Proportionalitätsfaktoren  $A, B$  festzulegen.

Da zwei unterschiedliche Gesetze für die Beschreibung einer Kraft gefunden wurden, sei an dieser Stelle noch auf den Einsatzbereich hingewiesen. Die Definition der so genannten Reynolds-Zahl  $Re$  über

$$Re \equiv \frac{\rho v \sqrt{S}}{\eta}$$

ermöglicht eine Entscheidung darüber, welche Kraft auf den Körper wirkt. Für kleine Reynolds-Zahlen wird die wirkende Kraft  $F \approx F_\eta$  sein, hingegen wirkt für große Reynolds-Zahlen eine Kraft  $F \approx F_\rho$ .

Abschließend werde angemerkt, dass auch eine Behandlung von Viskosität  $\eta$  und Dichte  $\rho$  in einem einheitlichen Gesetz möglich ist. Mit dem gleichen Verfahren wie es oben beschrieben wurde, erhält man auf diese Art

$$\boxed{F_{\eta,\rho} = C(Re)v^2 S \rho}. \quad (5)$$

Der Faktor  $C(Re)$  bezeichnet dabei eine Funktion von der Reynolds-Zahl, diese ist ein Ausdruck davon, dass das zu lösende Gleichungssystem mit vier Unbekannten nur drei Gleichungen besitzt, der unbestimmte Parameter wird in  $C(Re)$  zusammengefasst.

## 2.3 Buckingham'sches $\Pi$ -Theorem

Nachdem in dem vorherigen Abschnitt durch intuitive Methoden gute Ergebnisse erzielt wurden, soll in diesem Abschnitt überlegt werden, ob dieses offenbar nützliche Verfahren systematisiert werden kann. Das ist nötig, weil bei einer sehr großen Zahl an beteiligten physikalischen Größen eine Methode, wie sie für den freien Fall demonstriert wurde, nur noch schwer anzuwenden ist.

Ausgehend von einer mathematischen Beziehung in der Form

$$q_0 = f(q_1, \dots, q_n) \quad (6)$$

soll nun ein geeignetes Verfahren eingeführt werden.

### Voraussetzungen

Zuvor allerdings soll auf einen Aspekt hingewiesen werden, welcher in den Beispielen ausgenutzt wurde und auch hier die Grundlage für alle Überlegungen bildet. Für die Gesetze in der Form (6) wird die *Homogenität der Dimensionen* gefordert. Diese Forderung beinhaltet drei Dinge:

- Beide Seiten einer Gleichung haben stets die gleiche Dimension.
- Treten Summen auf, so hat jeder Term in der Summe die gleiche Dimension.
- Die Argumente von Funktionen wie beispielsweise dem Logarithmus, der Exponentialfunktion oder trigonometrischen Funktionen sind dimensionslos.

Im folgenden wird besonders der erste Punkt wichtig sein. Mit diesen Voraussetzungen erreicht man schließlich eine Unabhängigkeit vom gewählten Einheitensystem, was später notwendig sein wird.

### Verfahren

Für das Verfahren werde, wie bereits oben angegeben, allgemein ein Zusammenhang in der Gestalt

$$q_0 = f(q_1, \dots, q_n)$$

angesetzt. Dabei seien die Größen  $(q_1, \dots, q_n)$  ein vollständiger Satz physikalisch unabhängiger Größen, so dass  $q_0$  vollständig durch diese beschrieben wird. Natürlich können die Größen  $(q_1, \dots, q_n)$  dimensional abhängig sein. Es wird daher zunächst eine Teilmenge dimensional unabhängiger Größen ausgewählt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werden im folgenden  $(q_1, \dots, q_k)$  als eine solche Teilmenge aufgefasst. Natürlich muss diese Teilmenge größtmöglich gewählt werden, außerdem ist sie nicht eindeutig.

Da die verbleibenden  $(q_0, q_{k+1}, \dots, q_n)$  nach Voraussetzung dimensional von den  $(q_1, \dots, q_k)$  abhängig sind, lassen sich die Dimensionen dieser Größen durch die Dimensionen von Potenzprodukten aus den Elementen der gewählten Teilmenge, also  $(q_1, \dots, q_k)$ , ausdrücken. Dieser Zusammenhang kann geschrieben werden als

$$[q_j] = [q_1^{N_{j1}} q_2^{N_{j2}} \dots q_k^{N_{jk}}], \quad j = 0, k+1, \dots, n, \quad [N_{jl}] = 1. \quad (7)$$

Für eine bessere Nachvollziehbarkeit betrachte man einen Fall aus der Mechanik. Hier kann die Dimension jeder physikalischen Größe in der Form

$$[q_i] = L^{l_i} M^{m_i} T^{\tau_i} \quad (8)$$

geschrieben werden. Aus den  $(q_1, \dots, q_n)$  werden also drei dimensional unabhängige Größen gewählt. Drückt man mit diesen die Dimension der Basisgrößen in der Form  $L = [q_1^{\lambda_1} q_2^{\lambda_2} q_3^{\lambda_3}]$  beziehungsweise analog für  $M$  und  $T$  aus und setzt das Potenzprodukt in die Gleichung (8) ein, erhält man lineare Gleichungssysteme in der Form

$$l_j = N_{j1}l_1 + N_{j2}l_2 + N_{j3}l_3, \quad j = 0, k+1, \dots, n$$

beziehungsweise analog für  $m_j$  und  $\tau_j$ .

Es ist jetzt also klar, wie die Exponenten  $N_{jl}$  bestimmt werden können. Betrachtet man nun die Gleichung (7), so lässt sich erkennen, dass durch  $\Pi_0$  und  $\Pi_l$  mit

$$\Pi_0 \equiv \frac{q_0}{q_1^{N_{01}} q_2^{N_{02}} \dots q_k^{N_{0k}}}, \quad \Pi_l \equiv \frac{q_{k+l}}{q_1^{N_{(k+l)1}} q_2^{N_{(k+l)2}} \dots q_k^{N_{(k+l)k}}}$$

und  $l = 1, \dots, n - k$  dimensionslose Größen definiert werden. Diese Größen heißen Monome, ihr Symbol ist auch der Grund für die Bezeichnung des Verfahrens als Buckingham'sches  $\Pi$ -Theorem. Setzt man im nächsten Schritt in das Monom  $\Pi_0$  für  $q_0$  die ursprüngliche Definition aus (6) ein, so erhält man einen Ausdruck

$$\Pi_0 = \frac{f(q_1, \dots, q_n)}{q_1^{N_{01}} q_2^{N_{02}} \dots q_k^{N_{0k}}}.$$

Da aber die Größen  $(q_{k+1}, \dots, q_n)$  als Potenzprodukte multipliziert mit den zugehörigen Monomen dargestellt werden können, lässt sich das auch schreiben als

$$\Pi_0 = \frac{f\left(q_1, \dots, q_k, \Pi_1 q_1^{N_{(k+1)1}} \dots q_k^{N_{(k+1)k}}, \dots, \Pi_{n-k} q_1^{N_{n1}} \dots q_k^{N_{nk}}\right)}{q_1^{N_{01}} q_2^{N_{02}} \dots q_k^{N_{0k}}}.$$

Dieser Zusammenhang lässt sich wiederum auch durch eine andere funktionelle Abhängigkeit darstellen

$$\Pi_0 \equiv \phi(q_1, \dots, q_k, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}).$$

An dieser Stelle wird die Homogenität der Dimension wichtig, die Funktion  $\phi$  ändert sich bei Änderung der Einheiten nicht. Da nur die Größen  $(q_1, \dots, q_k)$  eine Dimension besitzen, folgt

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial q_1} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial q_2} = \dots = \frac{\partial \Pi_0}{\partial q_k} = 0$$

und somit sofort

$$\boxed{\Pi_0 = \phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k})}$$

An dem Ergebnis lässt sich sofort ablesen, dass die Zahl der physikalisch unabhängigen Größen von  $n$  auf  $n - k$  reduziert werden konnte. Das wiederum impliziert eine einfachere Behandlungsmöglichkeit in Experimenten oder weiteren theoretischen Behandlungen. Allerdings lassen sich mit dem vorgestellten Verfahren natürlich nicht die expliziten funktionellen Abhängigkeiten bestimmen.

### Zusammenfassung

Für die Anwendung auf die bereits betrachteten Beispiele sollen hier nocheinmal in kurzer Darstellung die wichtigen Schritte bei der Verwendung des Buckingham Theorems skizziert werden:

- Bestimme einen vollständigen Satz von physikalisch unabhängigen Größen  $(q_1, \dots, q_n)$ , welche  $q_0$  vollständig beschreiben.
- Wähle aus diesem Satz eine größtmögliche Teilmenge bestehend aus dimensional unabhängigen Größen  $(q_1, \dots, q_k)$ .
- Bilde die dimensionslosen Monome  $(\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k})$ .
- Schreibe den Zusammenhang in der Darstellung  $\Pi_0 = \phi(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k})$ .

## 2.4 Beispiele B

Um zu überprüfen, ob das gefundene Verfahren tatsächlich die Ergebnisse liefert, wie sie bei der anfänglichen Betrachtung erhalten wurden, sollen erneut die beiden Beispiele diskutiert werden.

### 2.4.1 Freier Fall

Es gelten die gleichen Vereinfachungen wie bereits in der ersten Analyse des freien Falls. Für die Anwendung des Buckingham Theorems werde eine Abhängigkeit in der Form

$$q_0 = f(x, t, m, g)$$

gemäß (6) angenommen. Neben den Größen der Fallstrecke  $x$ , Fallzeit  $t$  und Beschleunigung  $g$  wurde die Masse  $m$  als zusätzliche Größe einbezogen. Hieran soll demonstriert werden, welches Ergebnis das Verfahren liefert, wenn man eine Größe einbezieht, welche den Zusammenhang nicht beeinflusst.

Bei der Wahl einer dimensional unabhängigen Teilmenge muss zwingend die Masse  $m$  hinzugezogen werden, da diese die einzige Größe mit der Dimension einer Masse ist. Die beiden verbleibenden Größen können beliebig ausgewählt werden, die einfachste Wahl ist sicherlich  $(x, t, m)$ .

Wegen  $n - k = 4 - 3 = 1$  bleibt ein Monom  $\Pi_1$ , welches sich zu

$$\Pi_1 = \frac{g}{x^{N_1} t^{N_2} m^{N_3}}$$

bestimmt. Lösen des Gleichungssystems für die Exponenten beziehungsweise einfaches Ablesen liefert den Zusammenhang  $\Pi_1 = gt^2/x$ . In diesem Fall werde  $q_0 = \Pi_0$  bereits als dimensionslos angenommen, sodass sich insgesamt

$$\Pi_0 = \phi(\Pi_1) = \phi\left(\frac{gt^2}{x}\right)$$

ergibt. Durch einen Vergleich stellt man fest, dass dies das gleiche Ergebnis wie schon bei der intuitiven Methode ist.

### 2.4.2 Bewegung durch Fluid

Auch die Kraft auf ein Körper bei der Bewegung durch ein Fluid soll mit den gleichen Festlegungen, wie bereits oben beschrieben, nocheinmal mit Hilfe des Buckingham Theorems diskutiert werden.

Zunächst werde ein vollständiger Satz an Größen festgelegt, dazu identifiziere man

$$q_0 = F, \quad q_1 = v, \quad q_2 = S, \quad q_3 = \rho \quad \text{und} \quad q_4 = \eta.$$

Da es sich um rein mechanische Größen handelt, muss eine Teilmenge von insgesamt drei dimensional unabhängigen Größen gewählt werden, hier seien dies  $(v, S, \rho)$ .

Die Bestimmung der Monome  $\Pi_0$  und  $\Pi_1$  gelingt über eines der genannten Verfahren und ergibt

$$\Pi_0 = \frac{F}{v^{N_{01}} S^{N_{02}} \rho^{N_{03}}} = \frac{F}{v^2 S \rho} \quad \text{und} \quad \Pi_1 = \frac{\eta}{v^{N_{11}} S^{N_{12}} \rho^{N_{13}}} = \frac{\eta}{v \sqrt{S} \rho} = \frac{1}{Re}.$$

Dieses Ergebnis lässt sich also schreiben als

$$\frac{F}{v^2 S \rho} = \phi' \left( \frac{\eta}{v \sqrt{S} \rho} \right) \Rightarrow \boxed{F = \phi(Re) v^2 S \rho}.$$

Im letzten Schritt wurde hierbei im Argument der Funktion  $\phi'$ , dem Inversen der Reynolds-Zahl, die Kehrwertbildung in die funktionelle Abhängigkeit in  $\phi$  übernommen.

Auch in diesem Fall zeigt der Vergleich mit dem vorherigen Ergebnis in (5) eine Übereinstimmung. Die Anwendung des Verfahrens hat auch hier Erfolg gezeigt.

## 3 Weiterführende Beispiele

### 3.1 Tropfen am Zugfenster

Wenn man im Zug sitzt und es draußen regnet, laufen die Wassertropfen bekanntlich schräg am Fenster entlang. Die Frage ist nun, inwiefern man aus dem Winkel, mit dem der Tropfen am Fenster

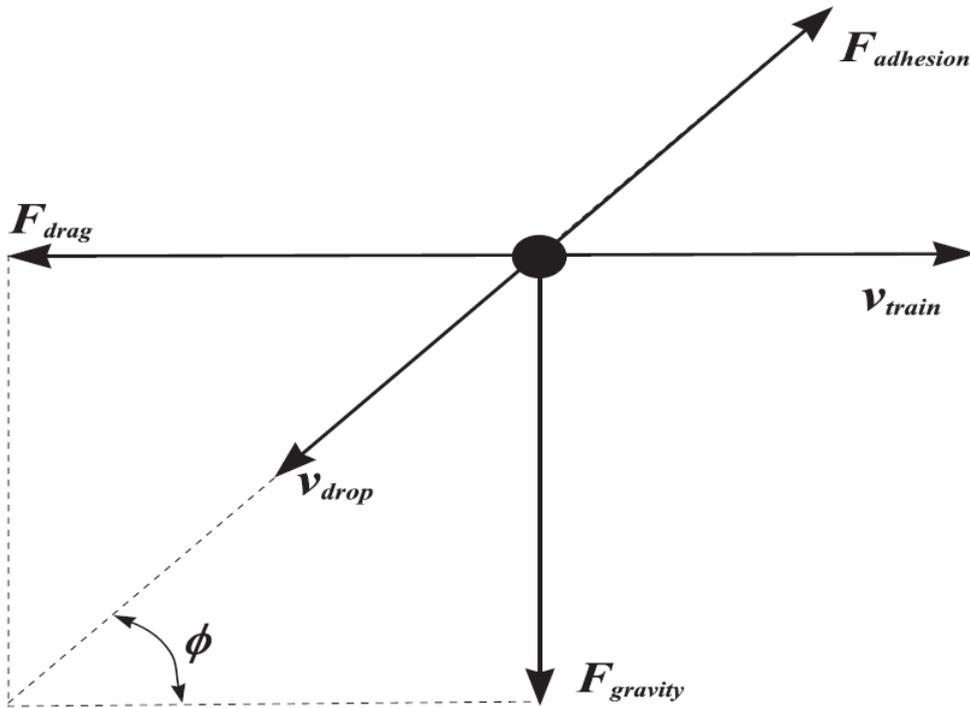


Abbildung 1: Diagramm der auf den Tropfen wirkenden Kräfte und der sie beeinflussenden Geschwindigkeiten. [5]

entlangläuft, die Geschwindigkeit des Zuges ermitteln kann.

In Abbildung 1 sind die Kräfte zu sehen, die die Bahn des Tropfens beeinflussen.

Nämlich die senkrecht nach unten wirkende Gewichtskraft  $F_g = mg$ , wobei  $m$  die Masse des Tropfens beschreibt, die Reibungskraft  $F_d$  zwischen dem Tropfen und der ihn umgebenden Luft, sowie die Reibungskraft  $F_{ad}$  zwischen Tropfen und Glasplatte. Wie in Abbildung 1 zu sehen, wirkt  $F_{ad}$  direkt der Geschwindigkeit des Tropfens entgegen. Folglich beeinflusst  $F_{ad}$  nur diese und nicht die Bahn des Tropfens bzw. ihren Winkel.

Der Winkel  $\phi$  wird somit nur beeinflusst von  $F_g$  und  $F_d$ . Abbildung 1 ist folgender Zusammenhang zu entnehmen:

$$\tan \phi = \frac{F_g}{F_d}. \quad (9)$$

Hierbei ist allerdings unklar, wie sich  $F_d$  genau bestimmt und wie sie von der Geschwindigkeit des Zuges abhängt. Dies soll nun mit Dimensionsanalyse untersucht werden.

Die Reibungskraft  $F_d$  mit  $[F_d] = MLT^{-2}$  hängt sicherlich in gewisser Weise von den folgenden physikalischen Größen ab (in Klammern die Dimensionen):

- Durchmesser des Tropfens  $D$  ( $L$ )
- Geschwindigkeit des Zuges  $v_{\text{train}}$  ( $LT^{-1}$ )
- Dichte der Luft  $\rho$  ( $ML^{-3}$ )
- Viskosität der Luft  $\eta$  ( $ML^{-1}T^{-1}$ )

Da hier fünf physikalische Größen bei drei relevanten Dimensionen auftauchen, lässt sich das Gesetz nach Buckingham durch zwei dimensionslose Parameter beschreiben. Dies sind

$$\Pi_0 = \frac{F_d}{\rho D^2 v_{\text{train}}^2}, \quad (10)$$

sowie

$$\Pi_1 = \frac{\rho D v_{\text{train}}}{\eta} = Re. \quad (11)$$

$Re$  bezeichnet hier die bei vielen hydrodynamischen Problemen wichtige Reynolds-Zahl. Somit gilt

$$\Pi_0 = f(Re) \quad (12)$$

beziehungsweise

$$F_d = \rho D^2 v_{\text{train}}^2 \cdot f(Re). \quad (13)$$

Hierbei bezeichnet  $f$  eine nicht näher bekannte Funktion, die von der Reynolds-Zahl  $Re$  abhängt. Aufgrund der dimensionslosen Schreibweise gilt Gl. (13) für sämtliche Fluide, sodass  $f$  durch Messungen mit anderen Flüssigkeiten bestimmt werden kann. Dabei zeigt sich folgendes Verhalten für die Funktion  $f(Re)$ :

$$f(Re) \propto \begin{cases} Re^{-1} & \text{für } Re < 10, \\ 1 & \text{für } Re > 100 \end{cases} \quad (14)$$

Der Bereich  $10 < Re < 100$  ist ein in seinem Verlauf nicht näher bekannter Übergangsbereich. Um die Größenordnung der hier gültigen Reynolds-Zahl zu bestimmen, setzt man nun die typischen Werte von  $\rho \approx 1,3 \text{ kg/m}^3$  für die Dichte von Luft sowie  $\eta \approx 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(sm)}$  für die Viskosität ein. Nimmt man zusätzlich einen Tropfendurchmesser von etwa fünf Millimetern an, stellt man fest, dass die Reynolds-Zahl schon für Zuggeschwindigkeiten von  $v_{\text{train}} > 2,5 \text{ m/s} = 9 \text{ km/h}$  den Wert 1000 übersteigt. Somit kann also für annähernd alle Zuggeschwindigkeiten  $f(Re)$  als konstant angenommen werden und Gl. (13) vereinfacht sich zu

$$F_d \propto \rho \cdot D^2 \cdot v_{\text{train}}^2. \quad (15)$$

Setzt man dies in die Ausgangsgleichung (9) ein und stellt nach der gesuchten Geschwindigkeit um, erhält man

$$v_{\text{train}} \propto \sqrt{\frac{mg}{D^2 \cdot \rho \cdot \tan \phi}}. \quad (16)$$

Nimmt man nun für den Tropfen die Form einer Halbkugel an, ergibt sich dessen Masse zu  $m = \frac{1}{12} \pi D^3 \cdot \rho_w$ , wobei  $\rho_w$  die Dichte des Wasser bezeichnet. Des Weiteren können Dichte und Viskosität der Luft sowie die Dichte des Wassers als annähernd konstant angenommen werden, sodass sie sich zu einer Konstante zusammenfassen lassen.

Mit diesen Annahmen vereinfacht sich Gl. (16) zu

$$v_{\text{train}} = c \cdot \sqrt{\frac{D}{\tan \phi}}. \quad (17)$$

$c$  bezeichnet dabei eine empirisch zu bestimmende Konstante. somit lässt sich die Zuggeschwindigkeit letztendlich aus einer Messung des Durchmessers des Tropfens und des Winkels seiner Bahn bestimmen.

### 3.2 Geschwindigkeit von Wasserwellen

Wird eine Wasseroberfläche durch äußere Einflüsse aus ihrer Ruhelage gebracht, pflanzt sich eine Welle fort. Die Geschwindigkeit  $u$  ( $[u] = LT^{-1}$ ), mit der sich diese Welle ausbreitet, hängt neben der Dichte  $\rho$  des Wassers ( $[\rho] = ML^{-3}$ ) und der Wellenlänge  $\lambda$  ( $[\lambda] = L$ ) vor allem von den Rückstellkräften ab, die die Wellenbewegung aufrecht erhalten. Dies sind zum Einen die Gravitation  $g$  ( $[g] = LT^{-2}$ ) und zum Anderen die Oberflächenspannung  $\sigma$  des Wassers ( $[\sigma] = MT^{-2}$ ).

Gemäß dem Vorgehen zum Buckingham-Theorem muss nun für die Dimensionsanalyse aus diesen physikalischen Größen eine Teilmenge dimensional unabhängiger Größen ausgewählt werden, z.B.  $(\rho, \lambda, g)$ . Unter Benutzung dieser Teilmenge lassen sich nun die folgenden zwei dimensionslosen Parameter bilden, von denen der Zusammenhang vollständig beschrieben wird:

$$\Pi_0 = \frac{u}{\sqrt{\lambda g}} \quad (18)$$

und

$$\Pi_1 = \frac{\sigma}{\lambda^2 \rho g}. \quad (19)$$

Somit gilt

$$\frac{u}{\sqrt{\lambda g}} = f\left(\frac{\sigma}{\lambda^2 \rho g}\right) \quad (20)$$

mit einer nicht näher spezifizierten Funktion  $f$ . Umgestellt nach der Wellengeschwindigkeit ergibt sich für diese

$$u = \sqrt{\lambda g} \cdot f\left(\frac{\sigma}{\lambda^2 \rho g}\right). \quad (21)$$

Dies ist die allgemeine Form der Abhängigkeit. Untersuchungen haben jedoch gezeigt, dass z.B. auf dem Meer bei relativ großen Wellenlängen, die jedoch klein im Vergleich zur Wassertiefe sind, die Oberflächenspannung keine Rolle mehr spielt. Hier vereinfacht sich der Zusammenhang dann zu

$$u = \sqrt{\lambda g}. \quad (22)$$

### 3.3 Pendel

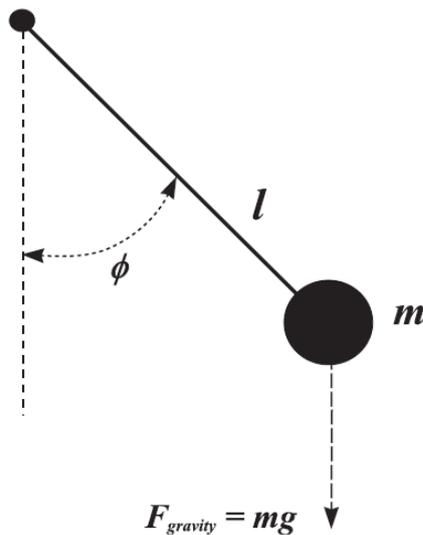


Abbildung 2: Schwingendes Pendel mit Masse  $m$  und Fadenlänge  $l$ . Die Position ist durch den Winkel  $\phi$  eindeutig bestimmt. [5]

Die Position eines Pendels, wie es in Abbildung 2 zu sehen ist, wird eindeutig durch den Auslenkungswinkel  $\phi$  beschrieben. Unter der Annahme, dass das Pendel zum Zeitpunkt  $t = 0$  geruht hat, hängt dieser Winkel ab von der Zeit  $t$ , der Fadenlänge  $l$ , der Masse  $m$ , der Gravitationsbeschleunigung  $g$  und der Anfangsauslenkung  $\phi_0$ . Reibung soll hier vernachlässigt werden.

Da die untersuchte Größe  $\phi$  dimensionslos ist und die Dimension der Masse nur in der Masse des Pendels selbst auftaucht, kann die Dimension Masse nicht durch andere Größen eliminiert werden. Somit wird die Bewegung des Pendels entgegen der ursprünglichen Annahme also doch nicht von der Masse beeinflusst.

Es verbleiben also fünf physikalische Größen mit zwei relevanten Dimensionen (Länge und Zeit). Folglich wird der gesuchte Zusammenhang von drei dimensionslosen Parametern beschrieben. Da  $\phi$  und  $\phi_0$  bereits dimensionslos sind, muss der dritte Parameter aus den drei übrigen Größen zusammengesetzt sein. Möglich ist z.B.  $t^* = t \cdot \sqrt{g/l}$ .

Somit wird die Bewegung des Pendels beschrieben durch

$$\phi = f(t^*, \phi_0). \quad (23)$$

Wobei  $f$  eine nicht näher spezifizierte Funktion ist, die auch nicht notwendigerweise periodisch sein muss. Da die Beobachtung jedoch zeigt, dass das Pendel eine periodische Bewegung durchläuft, kann man trotzdem aus Gl. (23) auf die Periodendauer schließen. Periodizität besagt ja, dass

$$f(t^* + \tau^*, \phi_0) = f(t^*, \phi_0) \quad (24)$$

für eine bestimmte dimensionslose Periodendauer  $\tau^*$ . Es gilt jedoch

$$\tau^* = \tau \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (25)$$

Zudem darf  $\tau^*$  nicht von den Pendeleigenschaften abhängen, da die dimensionslose Form in Gl. (23) für sämtliche Pendel gilt. Daraus folgt, dass für die Periodendauer eines Pendels gelten muss

$$\tau \propto \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (26)$$

### 3.4 Ausbreitung von Explosionswolken

Eines der bekanntesten Beispiele für die Anwendung von Dimensionsanalyse ist sicherlich die Berechnung der Explosionsstärke der Trinity-Atombombe, die am 16. Juli 1945 in der Wüste von New Mexico gezündet wurde, durch den britischen Physiker G. I. Taylor (1886 - 1975).

Der bei einer Atombombenexplosion entstehende Atompilz kann zu Beginn als annähernd kugelförmig angesehen werden. Dann hängt sein Radius  $R$  im Wesentlichen von der seit der Explosion vergangenen Zeit  $t$ , der dabei freigesetzten Energie  $E$  sowie der Dichte  $\rho$  der Luft in der er sich ausbreitet ab. Da hier vier physikalische Größen eine Rolle spielen und drei Dimensionen vorkommen, muss es genau einen dimensionslosen Parameter geben, der den Zusammenhang beschreibt. Die Dimension der Masse taucht nur in der Energie und der Dichte auf. Dividiert man diese durcheinander erhält man  $[E/\rho] = L^5 T^{-2}$ . Damit ergibt sich dann folgender dimensionsloser Parameter:

$$\Pi = \frac{Et^2}{\rho R^5} \quad (27)$$

Nach Buckingham gibt es dann eine Funktion  $f$  mit

$$f\left(\frac{Et^2}{\rho R^5}\right) = 0, \quad (28)$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{Et^2}{\rho R^5} = \text{const.} \quad (29)$$

Taylor, der führende Hydrodynamiker seiner Zeit, hatte sich den gesamten 2. Weltkrieg über im Auftrag der britischen Regierung mit der Ausbreitung von Detonationswellen über und unter Wasser beschäftigt. Ihm gelang diese Konstante zu bestimmen, sodass er anhand von Fotos wie sie in Abbildung 3 zu sehen sind, sehr genau die Explosionsstärke der Trinity-Atombombe bestimmen konnte. Er ermittelte einen Wert von ungefähr 22 Kilotonnen TNT. Der, damals noch geheime, offizielle Wert liegt bei 18-20 Kilotonnen TNT. Der von Taylor ermittelte Wert ist also für die doch recht rudimentäre Methode sehr genau.



Abbildung 3: Bilder des Trinity-Testes vom 16. Juli 1945, die später von der amerikanischen Regierung veröffentlicht wurden. [6]

### 3.5 Wärmeleitung

Ein Fluid mit der Temperatur  $T_f$  bewege sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit  $u$  an einer Platte der Temperatur  $T_p$  vorbei (siehe Abbildung 4).

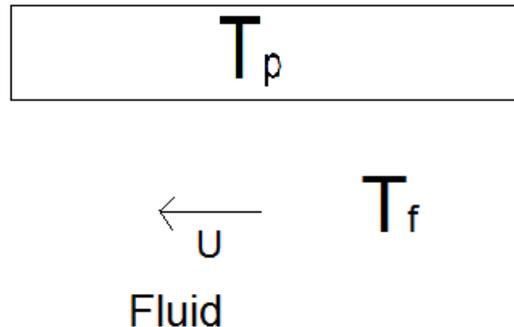


Abbildung 4: Skizze des Aufbaus des Gedankenexperiments zur Wärmeleitung, Quelle: eigenes Werk

Sei nun  $T_f < T_p$ . Dann findet ein Wärmetransfer  $q$  pro Fläche von der Platte zum Fluid statt. Dieser hat die Form

$$q = h \cdot (T_p - T_f). \quad (30)$$

Die Frage ist nun, wie der Wärmeübergangskoeffizient  $h$  ( $[h] = MT^{-3}\Theta^{-1}$ ) bestimmt ist. Er hängt ab von folgenden Größen (in Klammern die Dimensionen)

- Abstand Fluid-Platte  $x$  ( $L$ ),
- Geschwindigkeit  $u$  ( $LT^{-1}$ ),
- Dichte des Fluids  $\rho$  ( $ML^{-3}$ ),
- Viskosität des Fluids  $\eta$  ( $ML^{-1}T^{-1}$ ),
- spezifische Wärmekapazität  $c_p$  ( $L^2T^{-2}\Theta^{-1}$ ),
- Wärmeleitfähigkeit  $k$  ( $MLT^{-3}\Theta^{-1}$ ).

Es tauchen also sieben physikalische Größen mit vier Dimensionen auf. Somit wird der Zusammenhang durch drei dimensionslose Parameter beschrieben. Als dimensional unabhängige Teilmenge kann man z.B.  $(x, \rho, \eta, k)$  wählen. Das führt dann auf die drei dimensionslosen Parameter

- Reynolds-Zahl:  $Re = ux\rho/\eta$ ,
- Prandtl-Zahl:  $Pr = \eta c_p/k$ ,
- Nusselt-Zahl:  $Nu = hx/k$ .

Der Wärmeübergangskoeffizient ist dann durch

$$Nu = f(Re, Pr) \quad (31)$$

bestimmt. Wobei  $f$  eine nicht näher zu spezifizierende Funktion ist.

### 3.6 Fallende Kugel mit Reibung

Eine Kugel der Masse  $m$  falle von der Höhe  $h_0$  mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 < 0$  senkrecht nach unten durch ein Fluid, z.B. Luft. Eine Skizze dazu ist in Abbildung 5 zu sehen.

Die momentane Höhe  $y$  der Kugel hängt ab von

- vergangener Zeit  $t$ ,

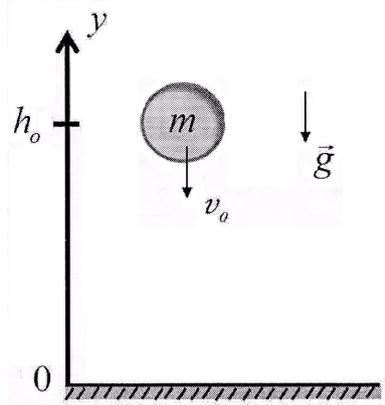


Abbildung 5: Skizze der fallenden Kugel mit Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ . [4]

- Masse der Kugel  $m$ ,
- Gravitation  $g$ ,
- Anfangshöhe  $h_0$ ,
- Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ ,
- Reibungskoeffizient  $k$ .

Der Reibungskoeffizient hat bei linearer Reibung der Form  $F_{\text{reib}} = k \cdot v$  die Dimension  $[k] = MT^{-1}$  und bei quadratischer Reibung der Form  $F_{\text{reib}} = k \cdot v^2$  die Dimension  $[k] = ML^{-1}$ . Bei sieben physikalischen Größen und drei Dimensionen wird der Zusammenhang in beiden Fällen durch jeweils vier dimensionslose Parameter beschrieben.

### 3.6.1 Lineare Reibung

Lineare Reibung (auch Stokesche Reibung) tritt insbesondere bei kleinen Körpern auf, die sich nicht allzu schnell bewegen. Die Reibungskraft hat hier die Form  $F_{\text{reib}} = k \cdot v$ . Die Bewegung der Kugel wird dabei durch folgende Differentialgleichung beschrieben

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg - k \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (32)$$

Dies lässt sich umformen zu

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{dy}{dt} = -g. \quad (33)$$

Um nun diese Differentialgleichung zu entdimensionalisieren führt man zunächst die folgenden dimensionslosen Variablen ein:

$$Y = \frac{y}{h_0} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{t \cdot |v_0|}{h_0}. \quad (34)$$

Die Kugel fällt nun von  $Y = 1$  nach  $Y = 0$ . Bei  $\tau = 1$  ist die Zeit vergangen, die die Kugel mit der anfänglichen Geschwindigkeit  $v_0$  für die Strecke  $h_0$  gebraucht hätte. Setzt man diese neuen Variablen in Gl. (33) ein erhält man nach korrekter Transformation der Differentiale letztendlich die Differentialgleichung

$$Fr \cdot \frac{d^2 Y}{d\tau^2} + C_D \cdot \frac{dY}{d\tau} = -1. \quad (35)$$

Mit den dimensionslosen Parametern Froude-Zahl

$$Fr = \frac{v_0^2}{gh_0} = \frac{mv_0^2}{mgh_0}, \quad (36)$$

die das Verhältnis aus anfänglicher kinetischer und potentieller Energie angibt, sowie dem Verhältnis aus anfänglicher Reibungskraft und der Gewichtskraft

$$C_D = \frac{k|v_0|}{mg}. \quad (37)$$

Man sieht schon hier dass die Zahl der die Bewegung beeinflussender Parameter in Gl. (35) von sieben auf vier reduziert werden konnte. Dies funktioniert jedoch nur für  $v_0 \neq 0$ , da ansonsten  $\tau$  keine Variable darstellt.

Um den Einfluss von  $Fr$  und  $C_D$  genauer zu untersuchen kann man zwei Extremfälle betrachten.

1. Für  $C_D \rightarrow 0$ , d.h. die anfängliche Reibungskraft ist klein gegenüber der Gewichtskraft, reduziert sich Gl. (35) auf

$$Fr \cdot \frac{d^2Y}{d\tau^2} = -1. \quad (38)$$

Die Trajektorie hat also die Form einer Parabel, wie sie auch ohne den Einfluss von Reibung aufgetreten wäre. Man sieht das die Dauer des gesamten Falls mit steigender Froude-Zahl zunimmt. In Abbildung 6 sind Trajektorien für verschiedene Froude-Zahlen aufgetragen.

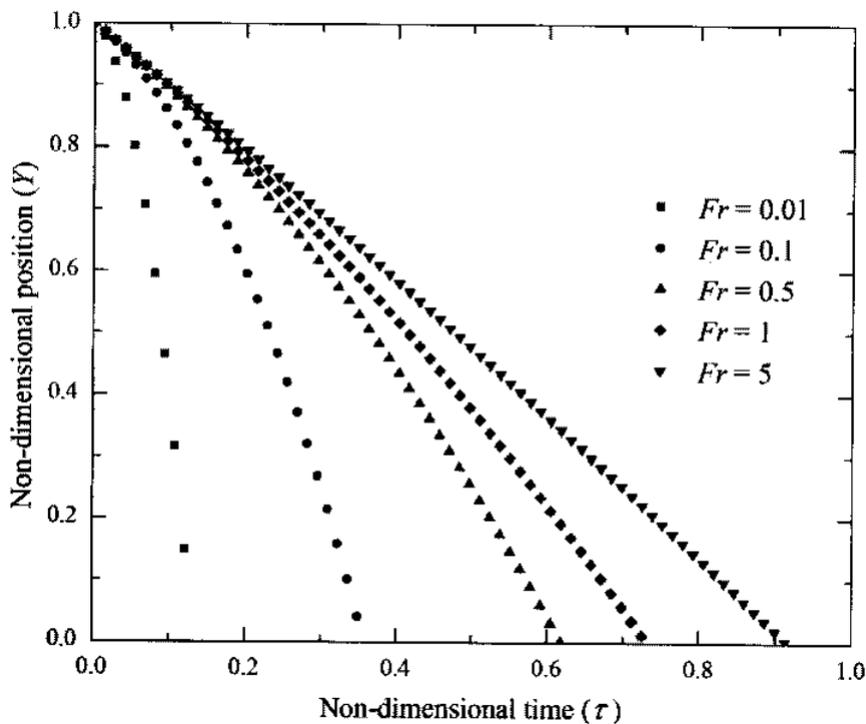


Abbildung 6: Dimensionslose Trajektorien für verschiedene Froude-Zahlen bei vernachlässigbaren Reibungskoeffizienten ( $C_D \rightarrow 0$  für lineare bzw.  $c_d \rightarrow 0$  für quadratische Reibung). [4]

2. Für  $Fr \rightarrow 0$  reduziert sich Gl. (35) auf

$$C_D \cdot \frac{dY}{d\tau} = -1. \quad (39)$$

Dieser Fall kann z.B. erreicht werden wenn man  $h_0$  sehr stark vergrößert aber gleichzeitig  $v_0$  und  $g$  konstant hält. Man erkennt, dass die Kugel in diesem Fall eine konstante Geschwindigkeit von  $V = -1/C_D$  besitzt.

Physikalisch lässt sich dies folgendermaßen erklären. Die Kugel wird ja so lange von der Gewichtskraft beschleunigt, bis die stärker werdende Reibungskraft die Gewichtskraft ausgleicht. Von da an bewegt sich der Ball mit der dann erreichten Geschwindigkeit gleichförmig

weiter.

Hier wird die Kugel nun aus einer so großen Höhe  $h_0$  abgeworfen, dass die kurze Phase der Beschleunigung verglichen mit der gesamten Fallhöhe nicht mehr ins Gewicht fällt und die Kugel quasi instantan die Endgeschwindigkeit erreicht. In Abbildung 7 sind Trajektorien für verschiedene Geschwindigkeiten  $V$  zu sehen.

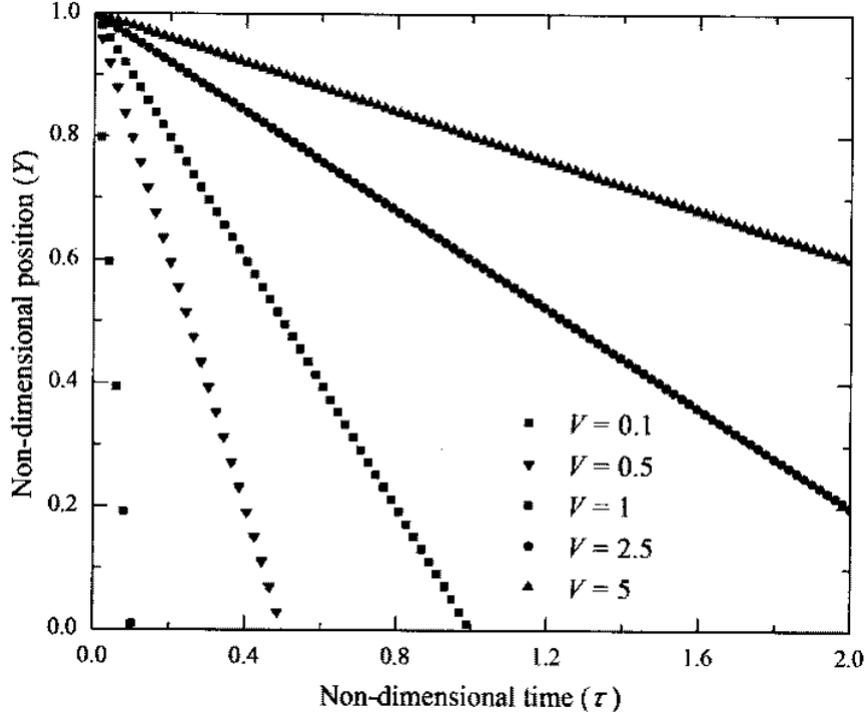


Abbildung 7: Dimensionslose Trajektorien für verschiedene Endgeschwindigkeiten  $V = -1/C_D$  (lineare Reibung) bzw.  $V = -1/\sqrt{c_d}$  (quadratische Reibung). [4]

### 3.6.2 Quadratische Reibung

Quadratische Reibung tritt vor allem bei Körpern auf, die sich sehr schnell bewegen. Denn bei schnellen Bewegungen, kommt es zusätzlich zu wahrnehmbaren Druckunterschieden zwischen Vorder- und Rückseite des Körpers (vorne größer, hinten kleiner), die den Körper zusätzlich bremsen. Bei quadratischer Reibung hat die Reibungskraft die Form  $F_{\text{reib}} = k \cdot v^2$ . Somit ergibt sich für die Differentialgleichung, die die Bewegung des Balls beschreibt,

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg + k \cdot \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 \quad (40)$$

beziehungsweise

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 = -g. \quad (41)$$

Führt man wieder die dimensionslosen Variablen aus Gl. (34) ein ergibt sich letztendlich

$$Fr \cdot \frac{d^2 Y}{d\tau^2} - c_d \cdot \left( \frac{dY}{d\tau} \right)^2 = -1, \quad (42)$$

mit der Froude-Zahl  $Fr$  aus Gl. (36) und dem dimensionslosen Reibungskoeffizienten

$$c_d = \frac{kv_0^2}{mg}, \quad (43)$$

der wieder das Verhältnis aus anfänglicher Reibungskraft und Gewichtskraft beschreibt. Die beiden Extremfälle sind prinzipiell ähnlich zu denen mit linearer Reibung.

1. Für  $c_d \rightarrow 0$  ergibt sich wieder Gl. (38). Es ergeben sich also wieder parabelförmige Trajektorien, wie sie in Abbildung 6 zu sehen sind.
2. Für  $Fr \rightarrow 0$  reduziert sich Gl. (42) auf

$$c_d \cdot \left( \frac{dY}{d\tau} \right)^2 = 1. \quad (44)$$

Die Kugel bewegt sich also mit der gleichförmigen Geschwindigkeit  $V = -1/\sqrt{c_d}$  nach unten (siehe Abbildung 7). Die Gründe für die quasi nicht vorhandene Beschleunigung sind die gleichen wie bei linearer Reibung.

## 4 Diskussion

Bei der Anwendung der Dimensionsanalysemethoden hat sich im Rahmen dieser Arbeit gezeigt, dass die Dimensionsanalyse häufig eine effiziente Alternative bei der Behandlung von sehr unterschiedlichen Phänomenen darstellt. Zwar kann sie andere Methoden zur Bestimmung von physikalischen Gesetzen nicht ersetzen, aber, wie in den Beispielen deutlich wurde, hat sie sich besonders in der Strömungsdynamik erfolgreich gezeigt.

Die Schwierigkeit bei der Anwendung dieser Methode besteht meistens darin, die richtigen physikalisch unabhängigen Größen auszuwählen, mit denen das Verfahren sinnvolle Beziehungen zwischen den Größen herstellt. Abschließend sei noch einmal auf die Einfachheit ihrer Anwendung hingewiesen, was zu einer häufigen Nutzung motivieren sollte.

## Literatur

- [1] Lira, Ignacio 2013. *Dimensional analysis made simple*. Eur. J. Phys. 34 1391.
- [2] Lira, Ignacio 2007. *Introducing scale analysis by way of a pendulum*. Eur. J. Phys. 28 289.
- [3] Tatjana Mistic, Marina Najdanovic-Lukic und Ljubisa Nesic 2010. *Dimensional analysis in physics and the Buckingham theorem*. Eur. J. Phys. 31 893.
- [4] Sznitman, Josué et al. 2013. *Teaching the Falling Ball Problem with Dimensional Analysis*. Eur. J. Phys. Ed. Vol. 4 Issue 2.
- [5] E. van Groesen und Jaap Molenaar 2007. *Continuum Modeling in the Physical Sciences*, 1. Aufl. (Society for Industrial and Applied Mathematics)
- [6] <http://nuclearweaponarchive.org/Usa/Tests/Trinity.html>, abgerufen am 28. Oktober 2013.