Partialwellenentwicklung

Seminar zur Theorie der Atome, Kerne und kondensierter Materie

WWU Münster, Wintersemester 12/13

Lukas Leßmann

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung Streutheorie

Bevor die Partialwellenentwicklung angegangen wird, ist hier das Wichtigste der allgemeinen Streutheorie, die die Grundlage der Partialwellenentwicklung bildet, aufgeführt.

Die Streuung einer Welle oder eines Wellenpaketes an einem Streupotential $V(\vec{r})$ ist durch die Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\right]\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = E_{\vec{k}}\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \tag{1}$$

mit der Energierelation $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m}$ beschrieben. Das Streupotential muss dafür die Sommerfeldschen Randbedingungen erfüllen. Diese beinhalten, dass das Potential schneller als $1/r$ abfällt und somit für $r \to \infty$ verschwindet. Die Schrödingergleichung lässt sich unter Berücksichtigung der Randbedingungen asymptotisch für große r zu

$$\psi_k(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{1}{r}e^{ikr}f_k(\varphi, \vartheta) \tag{2}$$

lösen. Dabei beschreibt der erste Term eine ebene Welle und der zweite Term eine gestreute, auslaufende Kugelwelle mit der Streuamplitude $f_k(\varphi, \vartheta)$. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeitsstromdichten der ebenen Welle und der auslaufenden Kugelwelle, so erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\varphi, \vartheta)|^2 \, .$$

Auch durch Betrachtung der Streuung eines Wellenpaketes erhält man genau diese Gleichung. Ein Streuproblem lässt sich also komplett durch die Streuamplitude $f_k(\varphi, \vartheta)$ beschreiben!

2 Partialwellenentwicklung

2.1 Motivation

Die Partialwellenentwicklung soll Streuprobleme mit kugelsymmetrischem Streupotential $V(\vec{r}) = V(r)$ lösen. Obwohl mit der Bornschen Näherung schon eine Lösungsmethode für kugelsymmetrische Streuprobleme für große Energien bekannt ist, fehlt noch eine Lösung für kleine Energien. Diese soll mit der Partialwellenentwicklung gefunden werden. Auch andere Schwächen der Bornschen Näherung, wie z.B. die Verletzung des optischen Theorems, sollen in der Partialwellenentwicklung nicht mehr auftauchen. Es wird also eine bessere Lösungsmethode insbesondere für kleine Energie gesucht.

2.2 Allgemeines

Da in der Partialwellenentwicklung nur kugelsymmetrische Streupotentiale $V(\vec{r}) = V(r)$ betrachtet werden, vereinfacht sich die Winkelabhängigkeit der die Schrödingergleichung Gl. (1) lösenden Wellenfunktion $\psi(\varphi, \vartheta) = \psi(\vartheta)$. Die winkelabhängigen Eigenfunktionen dieser Wellenfunktion sind bekannt. Es sind die Legendre-Polynome $P_\ell(\cos\vartheta)$. Da die Legendre-Polynome eine orthogonale Basis bilden, kann die Wellenfunktion nach ihnen entwickelt werden:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{u_\ell(r)}{r} P_\ell(\cos\vartheta) \, .$$

Dabei wird hier der radialabhängige Koeffizient $u_\ell(r)/r$ als Radialfunktion $u_\ell(r)$ durch r geschrieben, damit der radiale Anteil der Schrödingergleichung leichter separiert werden kann. Der multiplikative Ansatz ergibt die separierte radiale Schrödingergleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}V(r)\right)u_\ell(r) = 0 \tag{3}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_\ell(0) &= 0 \qquad (4) \\ V(r \to \infty) &= 0 \, . \end{aligned}$$

Das Verschwinden der Radialfunktion für $r = 0$ ergibt sich aus dem geforderten Abfallen des Potentials, das dann für $r \to 0$ divergiert und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit und somit die Wellenfunktion im Zentrum des Streupotentials zu Null fordert.

Um Gleichung 3 zu lösen, wird in zwei Schritten vorgegangen. Zunächst wird ein freies Teilchen in der Partialwellenentwicklung betrachtet, und dann wird die Änderung der Lösung durch ein Streupotential hinzugefügt.

2.3 Freies Teilchen

Ganz allgemein gilt für ein freies Teilchen $\psi_k^0(\vec{r}) = e^{ikrx}$ mit $x := \cos\vartheta$. Da ein freies Teilchen betrachtet wird, ist das Streupotential $V(r) = 0$. Man kann natürlich trotzdem nach Partialwellen bzw. Legendre-Polynomen entwickeln:

$$\psi_k^0(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{u_\ell(r)}{r} P_\ell(x)\,.$$

Die radiale Schrödingergleichung Gl. (3) vereinfacht sich zu

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right) u_\ell(r) = 0\,.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist bekannt und durch die sphärischen Besselfunktionen $j_\ell(\rho) = (-\rho)^\ell \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^\ell \frac{1}{\rho}\sin\rho$ zu

$$u_\ell(r) = C_\ell\, r\, j_\ell(kr)$$

gegeben. Die sphärischen Neumannfunktionen $n_\ell(\rho) = (-\rho)^\ell \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^\ell \frac{1}{\rho}\cos\rho$ lösen die Gleichung zwar auch, erfüllen jedoch nicht die Randbedingungen aus Gleichung 4. Um die Koeffizienten C_ℓ zu bestimmen, wird die Radialfunktion $u_\ell(r)$ in die Partialwellenentwicklung des freien Teilchens eingesetzt:

$$\psi_k^0(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell\, j_\ell(kr)\, P_\ell(x)$$

Diese entwickelte Form wird dann mit der Schreibweise des freien Teilchens als ebene Welle gleichgesetzt, beide Seite werden mit einem Legendre-Polynom $P_\ell(x)$ multipliziert und über dx integriert:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{ikrx} P_\ell(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell\, j_\ell(kr) P_\ell(x) P_{\ell'}(x)\,dx \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell\, j_\ell(kr) \frac{2}{2\ell+1}\delta_{\ell\ell'} \\
&= C_\ell\, j_\ell(kr) \frac{2}{2\ell+1}\,.
\end{aligned}$$

Das Integral auf der linken Seite der Gleichung lässt sich nicht trivial lösen. Deshalb wird zur weiteren Umformung der Gleichung das asymptotische Verhalten für $r \to \infty$ betrachtet. Dies ist möglich, da nur die Koeffizienten bestimmt werden sollen, die selbst unabhängig von r sind. Als erstes wird die linke Seite der Gleichung (lhs) betrachtet. Die Integration wird als partielle Integration ausgeführt und dann abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^{ikrx} P_\ell(x)\,dx &= \frac{1}{ikr}\left[e^{ikrx} P_\ell(x)\right]_{-1}^{1} - \underbrace{\frac{1}{ikr} \underbrace{\int_{-1}^{1} e^{ikrx} P'_\ell(x)\,dx}_{\mathcal{O}(1/r)}}_{\mathcal{O}(1/r^2)} \\
&= \frac{1}{ikr}\left(e^{ikr} - (-1)^\ell e^{-ikr}\right) + \mathcal{O}(1/r^2) \\
&\overset{r\to\infty}{=} \frac{i^\ell}{ikr}\left(e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}\right)
\end{aligned}$$

Bei der Abschätzung wird benutzt, dass das Integral $\int_{-1}^{1} e^{ikrx} P'_\ell(x)\, dx$ von der gleichen Art ist wie das Anfangsintegral $\int_{-1}^{1} e^{ikrx} P_\ell(x)\, dx$, welches, wie in der partiellen Integration deutlich wird, von der Ordnung $1/r$ ist. Des weiteren wird die Eigenschaft der Legendre-Polynome $P_\ell(\pm 1) = (\pm 1)^\ell$ und die Exponentialschreibweise $i^{\pm\ell} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\pm\ell} = e^{\pm i\ell\frac{\pi}{2}}$ benutzt.
In der rechten Seite der Gleichung (rhs) wird nur das asymptotische Verhalten für $r \to \infty$ der Besselfunktionen eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
C_\ell\, j_\ell\, (\rho := kr)\, \frac{2}{2\ell+1} &= \frac{2}{2\ell+1} C_\ell (-\rho)^\ell \left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^\ell \frac{1}{\rho}\sin\rho \\
&\overset{r\to\infty}{=} \frac{2C_\ell(-1)^\ell}{2\ell+1}\frac{1}{\rho}\left(\frac{d}{d\rho}\right)^\ell \sin\rho \\
&= \frac{2C_\ell(-1)^\ell}{2\ell+1}\frac{(-1)^\ell}{\rho}\sin\left(\rho - \ell\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{2C_\ell}{2\ell+1}\frac{1}{2i\rho}\left(e^{i(\rho-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(\rho-\ell\frac{\pi}{2})}\right)
\end{aligned}
$$

Dabei wird bei der Ableitung jeweils der Summand der Produktregel, dessen Ordnung in $1/r$ höher ist, vernachlässigt und $\frac{d^\ell}{d\rho^\ell}\sin\rho = (-1)^\ell \sin\left(\rho - \ell\frac{\pi}{2}\right)$ benutzt.
Fügt man jetzt die beiden umgeformten Seiten der Gleichung wieder zusammen, erhält man die gesuchten Koeffizienten:

$$
\begin{aligned}
\frac{i^\ell}{ikr}\left(e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}\right) &= \frac{C_\ell}{2\ell+1}\frac{1}{ikr}\left(e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}\right) \\
\Leftrightarrow\ C_\ell &= i^\ell(2\ell+1)
\end{aligned}
$$

Damit ist die Partialwellenentwicklung des freien Teilchens komplett bestimmt. Da in der allgemeinen Streutheorie nur Aussagen über die asymptotische Wellenfunktion gemacht werden können, soll hier auch die Asymptotik betrachtet werden:

$$
\begin{aligned}
\psi_k^0(\vec{r}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell(2\ell+1) j_\ell(kr) P_\ell(x) \\
&\overset{r\to\infty}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell(2\ell+1)\frac{1}{2ikr}\left(e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}\right) P_\ell(x) \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Der erste Summand in der Klammer kann als auslaufende Kugelwelle interpretiert werden, während der zweite Summand der Klammer einer einlaufenden Kugelwelle entspricht. Die ebene Welle des freien Teilchens wurde also in der Partialwellenentwicklung eine Überlagerung von einlaufenden und auslaufenden Kugelwellen.

2.4 Teilchen im Streupotential

Nach der Lösung der Partialwellenentwicklung des freien Teilchens wird jetzt ein Teilchen im Streupotential $V(r)$ betrachtet. Dazu wird das allgemeine asymptotische Verhalten der Wellenfunktion bei einem Streuproblem aus Gl. (2) und die asymptotische Partialwellenentwicklung der ebenen Welle aus Gl. (5) benötigt. Es gilt also für $r \to \infty$

$$
\begin{aligned}
\psi_k(\vec{r}) &= \psi_k^0(\vec{r}) + f_k(\vartheta)\frac{1}{r}e^{ikr} \\
\text{und}\quad \psi_k^0(\vec{r}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell(2\ell+1)\frac{1}{2ikr}\left(e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}\right) P_\ell(x)\,.
\end{aligned}
$$

Da die gestreute Welle eine auslaufende Kugelwelle ist, wird für vor den Term der auslaufenden Kugelwelle des freien Teilchens ein Faktor $S_\ell(k) := 1 + \text{gestreuter Anteil}$ geschrieben. Die Lösung für ein Teilchen im Streupotential ist damit

$$
\psi_k(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell(2\ell+1)\frac{1}{2ikr}\left(S_\ell(k) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} - e^{-i(kr-\ell\frac{\pi}{2})}\right) P_\ell(x)\,.
$$

Wie genau $S_\ell(k)$ und die Streuamplitude $f_k(\vartheta)$ zusammenhängen, wird hier nicht ersichtlich. Um die Streuamplitude jedoch trotzdem zu bestimmen, wird zunächst der Anteil der gestreuten Welle extrahiert. Dafür wird die einlaufende Kugelwelle weggelassen und die Definition von $S_\ell(k)$ benutzt:

$$\phi_k(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) \frac{1}{2ikr} \left(S_\ell(k) - 1\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} P_\ell(x)$$

Vor einer weiteren Umformung sollen zunächst einige Überlegungen zu dem Faktor $S_\ell(k)$ angestellt werden. Da nur elastische Streuung betrachtet wird muss $|S_\ell(k)|^2 = 1$ gelten, da sonst mehr oder weniger Wellenanteil auslaufend würde als einlaufen, was im direkten Widerspruch zur elastischen Streuung steht. Durch diese neue Eigenschaft lässt sich der Faktor umschreiben zu $S_\ell(k) = e^{2i\delta_\ell(k)}$ mit den Streuphasen $\delta_\ell(k)$.

Durch diese Umformulierung lässt sich die gestreute Welle weiter umformen:

$$\begin{aligned}
\phi_k(\vec{r}) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) \frac{1}{2ikr} \left(S_\ell(k) - 1\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} P_\ell(x) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) \frac{1}{2ikr} \left(e^{2i\delta_\ell(k)} - 1\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} P_\ell(x) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) \frac{1}{kr} e^{i\delta_\ell(k)} \sin\left(\delta_\ell(k)\right) e^{i(kr-\ell\frac{\pi}{2})} P_\ell(x) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \frac{1}{kr} e^{i\delta_\ell(k)} \sin\left(\delta_\ell(k)\right) e^{ikr} P_\ell(x)
\end{aligned}$$

Die Streuamplitude ergibt sich dann nach $\phi_k(\vec{r}) = \frac{1}{r} e^{ikr} f_k(\vartheta)$ zu

$$f_k(\vartheta) = \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{i\delta_\ell(k)} \sin\left(\delta_\ell(k)\right) P_\ell(x)\,.$$

Aus der Streuamplitude kann der totale Wirkungsquerschnitt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \int |f_k(\vartheta)|^2 \, d\Omega \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} |f_k(\vartheta)|^2 \, dx \\
&= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2\left(\delta_\ell(k)\right)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle lässt sich optische Theorem

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} Im\left[f_k(\vartheta = 0)\right]$$

erkennen. Die Hauptaussage des optischen Theorems ist die Teilchenstromerhaltung. Der Wellenanteil, der in der eben Welle hinter dem Streupotential fehlt, entspricht genau der gestreuten Welle.

Nachdem sowohl die Streuamplitude als auch der totale Wirkungsquerschnitt bestimmt wurden soll kurz reflektiert werden, wie nahe die Lösung des Streuproblems schon gerückt ist. Vor der Partialwellenentwicklung fehlte nur die Streuamplitude $f_k(\vartheta)$ zur kompletten Beschreibung des Streuproblems. Jetzt ergab sich für diese Streuamplitude eine Formel mit unendlich vielen unbekannten Streuphasen $\delta_\ell(k)$. Die Partialwellenentwicklung scheint also nur dann sinnvoll zu sein, wenn die Summe über alle ℓ möglichst früh abgebrochen werden kann.

Um diese Abbruchbedingung zu finden betrachte man den klassischen Drehimpuls eines Teilchens nahe des Streupotentials $\left|\vec{L}\right| = |\vec{r} \times \vec{p}| = bp_0 = b\sqrt{2mE}$ mit p_0 als Vorwärtsimpuls und b als Entfernung vom Streupotentialzentrum (vgl. Abbildung 1). Da nur kurzreichweitige Streupotentiale betrachtet werden kann eine maximale Reichweite des Potentials R bestimmt werden. Für alle Teilchen mit $b > R$ findet praktisch keine Streuung statt. Für gestreute Teilchen gilt also $b \leq R$ und somit $\left|\vec{L}\right| \leq R\sqrt{2mE}$. Betrachtet man diese Ungleichung quantenmechanisch wird daraus mit der Energierelation $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$\begin{aligned} \sqrt{\ell(\ell+1)} &\leq R\sqrt{2mE} \\ \Leftrightarrow \ell \leq \sqrt{\ell(\ell+1)} &\leq R\sqrt{2mE} \leq \frac{1}{\hbar} R\sqrt{2mE} = kR\,. \end{aligned}$$

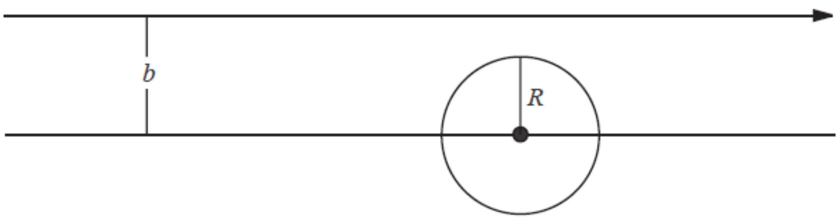

Abbildung 1: Teilchen nahe am Streupotential [1]

Die Abbruchbedingung lautet also $\ell \leq kR$, woran deutlich zu sehen ist, dass die Partialwellenentwicklung als Lösungsverfahren für kleine Energien und somit für kleine kR geeigneter ist als für große Energien.

2.5 Zusammenfassung

Nochmal Zusammengefasst hat die Partialwellenentwicklung $\psi_k(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} R_\ell(r) P_\ell(x)$ also folgende allgemeine Ergebnisse gebracht:

$$\begin{aligned} \text{Streuamplitude:}\ f_k(\vartheta) &= \frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)e^{i\delta_\ell(k)}\sin\left(\delta_\ell(k)\right)P_\ell(x) \\ \text{Wirkungsquerschnitt:}\quad \sigma &= \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sin^2\left(\delta_\ell(k)\right) \\ \text{Abbruchbedingung:}\quad \ell &\leq kR \end{aligned}$$

Dazu wurde zunächst ein freies Teilchen unter Berücksichtigung der Randbedingungen des Streupotentials in Partialwellen entwickelt. Das Ergebnis wird dann um einen, einer auslaufenden Kugelwelle entsprechendem, Term ergänzt. Aus dieser Gesamtlösung kann dann die Streuamplitude entnommen werden. Da jedoch keine Formel für die Streuamplitude nur Abhängig vom Streupotential gefunden wurde, muss bei jeder Anwendung der Partialwellenentwicklung die komplette hier vorgestellte Methodik benutzt werden. Dies soll in der Beispielrechnung verdeutlicht werden.

3 Beispielrechnung

Es soll die Streuung an einer harten Kugel berechnet werden. Das Potential einer harten Kugel ist

$$V(r) = \begin{cases} \infty & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

und erfüllt somit sowohl die Kugelsymmetrie als auch die Randbedingung, dass es für $r \to \infty$ verschwindet. Allerdings bringt das Potential der harten Kugel die weitere Randbedingung $\psi_k(r < R) = 0$ mit sich. Durch diese neue Randbedingung ändert sich die Lösung des freien Teilchens, da jetzt auch die zuvor verworfenen Neumannfunktionen die radiale Schrödingergleichung des freien Teilchens lösen. Die allgemeine radiale Lösung für $V(r) = 0$ wird also zu

$$R_\ell(r) = a_\ell j_\ell(kr) + b_\ell n_\ell(kr)\,.$$

Aus dem Verhalten der gestreuten Welle für $r \to \infty$ können die Koeffizienten a_ℓ und b_ℓ bestimmt werden. Dazu betrachtet man zunächst die Asymptotik der Lösungsfunktionen

$$\begin{aligned} j_\ell(kr) &\stackrel{r\to\infty}{=} \frac{1}{kr}\sin\left(kr - \ell\frac{\pi}{2}\right) \\ n_\ell(kr) &\stackrel{r\to\infty}{=} -\frac{1}{kr}\cos\left(kr - \ell\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

und konstruiert daraus eine Linearkombination, die proportional zu $\frac{1}{r}e^{ikr}$ ist. Dies ist gerade die Hankel Funktion erster Art:

$$h_\ell^+(kr) = j_\ell(kr) + i n_\ell(kr) = \frac{1}{ikr}e^{i\left(kr - \ell\frac{\pi}{2}\right)}$$

Als Gesamtlösung ergibt sich damit dann

$$\psi_k(\vec{r}) = \sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)i^\ell\left(\gamma_\ell h_\ell^+(kr) + j_\ell(kr)\right)P_\ell(x)$$

wobei der erste Term der gestreute Welle und der zweite Term der ebene Welle entspricht. Der Koeffizient γ_ℓ kann aus der Randbedingung $\psi_k(R) = 0$ zu $\gamma_\ell = -\frac{j_\ell(kR)}{n_\ell(kR)}$ bestimmt werden. Aus der Gesamtlösung lässt sich der Anteil der gestreuten Welle und daraus die Streuamplitude extrahieren. Für die Streuamplitude ergibt sich so

$$f(\vartheta) = \frac{i}{k}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\left(\frac{j_\ell(kR)}{h_\ell^+(kR)}\right)P_\ell(x)\,.$$

Der totale Wirkungsquerschnitt kann trivial zu

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\frac{j_\ell^2(kR)}{n_\ell^2(kR) + j_\ell^2(kR)}$$

bestimmt werden.

Um einen Vergleich zum klassischen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\text{klassisch}} = \pi R^2$ zu haben werden hier noch zwei Grenzfälle betrachtet:

1. $kR \ll 1$: Die Summe darf laut der Abbruchbedingung nach $\ell = 0$ abgebrochen werden. Die Bessel- und Neumannfunktionen für $\ell = 0$ werden wie folgt genähert

   $$\begin{aligned} j_0(kR) &\approx kR \\ n_0(kR) &\approx 1\,. \end{aligned}$$

   Damit ergibt sich dann für den totalen Wirkungsquerschnitt

   $$\sigma_{kR\ll1} \approx 4\pi R^2$$

   also das vierfache des klassischen Wirkungsquerschnittes.

2. $kR \gg 1$: Nach einer längeren Rechnung ohne frühzeitiges Abbrechen der Summe oder schönes Nähern der Bessel- und Neumannfunktionen ergibt sich der totale Wirkungsquerschnitt zu

   $$\sigma_{kR\gg1} \approx 2\pi R^2$$

   also dem doppelten des klassischen Wirkungsquerschnittes.

Literatur

[1] G. Münster ; *Quantentheorie, 2. Auflage* ; de Gruyter, 2010

[2] W. Nolting ; *Grundkurs Theoretische Physik 5/2, 7.Auflage* ; Springer, 2011

[3] M. Böhm ; *Quantenmechanik* ; Skript