Wigner-Funktion und kohärente Zustände

Daniel Kavajin

Seminar zur Theorie der Atome, Kerne und kondensierten Materie

21.11.2012

Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

- Ein klassischer Zustand wird durch einen Punkt im Phasenraum repräsentiert.

- Harmonischer Oszillator: $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$

  $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$

  $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x$

➜ $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

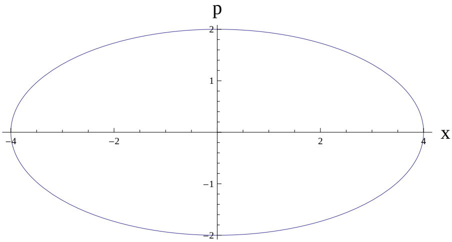
  $x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t$

  $p(t) = p(0)\cos\omega t - m\omega x(0)\sin\omega t$

  $x(0) = x(t)\cos\omega t - \frac{p(t)}{m\omega}\sin\omega t$

  $p(0) = p(t)\cos\omega t + m\omega x(t)\sin\omega t$

Einleitung



Phasenraum-Diagramm eines harmonischen Oszillators

Eugene Paul Wigner

- Quantenmechanik im Phasenraum, ist das möglich?

→ Wigner-Funktion, E.P. Wigner 1932

- Gemischter Zustand: $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

  p_i Wahrscheinlichkeit das System im Zustand $|\psi_i\rangle$ zu messen.

➜ Beschreibt die messbedingte Unwissenheit über den exakten Zustand eines Systems.

- Reiner Zustand: Zustand des Systems bekannt. Dichteoperator vereinfacht sich zu $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$
- Eigenschaften:

  $\mathrm{Spur}[\hat{\rho}] = \int \langle x|\hat{\rho}|x\rangle dx = \int \sum_i p_i \langle x|\psi_i\rangle\langle\psi_i|x\rangle dx =$

  $\sum_i p_i \int |\psi_i(x)|^2 dx = 1$

  $\mathrm{Spur}[\hat{\rho}\hat{A}] = \int \sum_i p_i \langle x|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{A}|x\rangle dx =$

  $\int \sum_i p_i \langle\psi_i|\hat{A}|x\rangle\langle x|\psi_i\rangle dx = \sum_i p_i \langle\psi_i|\hat{A}|\psi_i\rangle = \langle A\rangle \overset{\text{Rein}}{=} \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

Weyl-Transformation

- $\widetilde{A}(x,p) = \int e^{-i\frac{py}{\hbar}} \langle x + \frac{y}{2}|\hat{A}|x - \frac{y}{2}\rangle dy$

➜ Bildet Hilbertraum Operatoren auf den Phasenraum ab

- $\text{Spur}[\hat{A}\hat{B}] = \frac{1}{h}\int\int \widetilde{A}(x,p)\widetilde{B}(x,p)dxdp$
- $\text{Spur}[\hat{\rho}\hat{A}] = \langle A\rangle = \frac{1}{h}\int\int \widetilde{\rho}\widetilde{A}dxdp$
- $\hat{A} = A(\hat{x}) \;\Rightarrow\; \widetilde{A} = A(x)$
- $\hat{A} = A(\hat{p}) \;\Rightarrow\; \widetilde{A} = A(p)$

- $W(x,p) = \frac{\widetilde{\rho}}{h} = \frac{1}{h}\int e^{-i\frac{py}{\hbar}}\langle x+\frac{y}{2}|\hat{\rho}|x-\frac{y}{2}\rangle dy$
- Reiner Zustand: $W(x,p) = \frac{1}{h}\int e^{-i\frac{py}{\hbar}}\psi(x+\frac{y}{2})\psi^*(x-\frac{y}{2})dy$
  $W(x,p) = \frac{1}{h}\int e^{i\frac{xu}{\hbar}}\varphi(p+\frac{u}{2})\varphi^*(p-\frac{u}{2})du$

➜ Phasenraum Quasi-Wahrscheinlichkeitsverteilung

- $\int W(x,p)dp = \int \overbrace{\frac{1}{h}\int e^{-i\frac{py}{\hbar}}dp}^{=\delta(y)}\langle x+\frac{y}{2}|\psi\rangle\langle\psi|x-\frac{y}{2}\rangle dy = \psi(x)\psi^*(x)$
- $\int W(x,p)dx = \varphi(p)\varphi^*(p)$
- $\int W(x,p)\widetilde{A}(x,p)dxdp = \langle A\rangle$

- $W(x,p)$ **reell**

- $W(x,p)$ **normiert:**
  $\int\int W(x,p)dxdp = \mathrm{Spur}[\hat{\rho}] = 1$

- $W(x,p)$ **beschränkt:**
  $\psi_1(y) := \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{py}{h}} \psi(x + \frac{y}{2}),\ \psi_2(y) := \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(x - \frac{y}{2})$
  $W(x,p) = \frac{2}{h} \int \psi_1(y)\psi_2^*(y)dy \ \Rightarrow \ |W(x,p)| \leq \frac{2}{h}$

- $W(x,p)$ **nicht überall positiv:**
  $\mathrm{Spur}[|\psi_a\rangle\langle\psi_a|\psi_b\rangle\langle\psi_b|] = |\langle\psi_a|\psi_b\rangle|^2$
  $\int\int W_a(x,p)W_b(x,p)dxdp = \frac{1}{h}|\langle\psi_a|\psi_b\rangle|^2$
  $\psi_a \perp \psi_b \ \Rightarrow \ \int\int W_a(x,p)W_b(x,p)dxdp = 0$

Von der Wigner- zur Wellenfunktion

Für reine Zustände:

- $W(x,p) = \frac{1}{h}\int e^{-i\frac{py}{\hbar}}\psi(x+\frac{y}{2})\psi^*(x-\frac{y}{2})dy$

- $\int W(x,p)e^{i\frac{px'}{\hbar}}dp = \frac{1}{h}\int\int e^{i\frac{p}{\hbar}(x'-y)}dp\psi(x+\frac{y}{2})\psi^*(x-\frac{y}{2})dy$

- $\int W(x,p)e^{i\frac{px'}{\hbar}}dp = \psi(x+\frac{x'}{2})\psi^*(x-\frac{x'}{2})$
  $x \rightarrow \frac{x}{2}$ und $x' \rightarrow x$
- $\psi(x) = \frac{1}{\psi^*(0)}\int W(\frac{x}{2},p)e^{i\frac{px}{\hbar}}dp$

➜ Die Wignerfunktion legt die Wellenfunktion bis auf eine unbestimmte Phase fest.

Zeitliche Entwicklung der Wigner-Funktion

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{h}\int e^{-i\frac{py}{\hbar}}\left[\frac{\partial\psi(x+\frac{y}{2})}{\partial t}\psi^*(x-\frac{y}{2}) + \frac{\partial\psi^*(x-\frac{y}{2})}{\partial t}\psi(x+\frac{y}{2})\right]dy$$

Schrödinger-Gleichung: $\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\dfrac{\hbar}{2im}\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + \dfrac{1}{i\hbar}U(x)\psi(x,t)$

$$\frac{\partial W_T}{\partial t} = \frac{1}{4\pi im}\int e^{-i\frac{py}{\hbar}}\left[\frac{\partial^2\psi(x+\frac{y}{2})}{\partial x^2}\psi^*(x-\frac{y}{2}) - \psi(x+\frac{y}{2})\frac{\partial^2\psi^*(x-\frac{y}{2})}{\partial x^2}\right]dy$$

$$\frac{\partial W_U}{\partial t} = \frac{2\pi}{ih^2}\int e^{-i\frac{py}{\hbar}}[U(x+\frac{y}{2}) - U(x-\frac{y}{2})]\psi(x+\frac{y}{2})\psi^*(x-\frac{y}{2})dy$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W_T}{\partial t} + \frac{\partial W_U}{\partial t}$$

Quanten Liouville-Gleichung

- $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial U(x)}{\partial x}\frac{\partial}{\partial p}\right) W(x,p,t) =$
$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-\hbar)^s}{(2s+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} \frac{\partial^{2s+1} U(x)}{\partial x^{2s+1}} \frac{\partial^{2s+1}}{\partial p^{2s+1}} W(x,p,t)$

➜ Rechte Seite verschwindet für Potentiale, die nach der 2. Ableitung verschwinden
Ebenso im klassischen Grenzfall $\hbar \to 0$

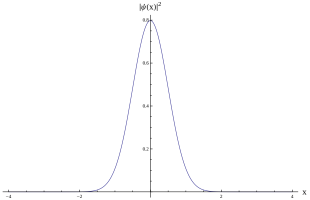
$\Rightarrow$ Quanten Liouville-Gleichung geht über in die Liouville-Gleichung der klassischen statistischen Mechanik

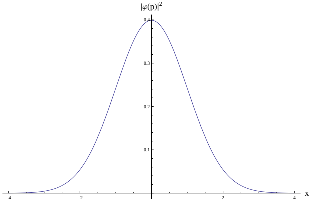
Beispiel: Freies Teilchen

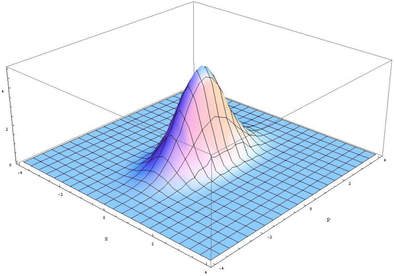
- $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int A(p) e^{ip\frac{x}{\hbar}} dp$
- Gauß-Wellenpaket: $A(p) = N e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4\alpha\hbar^2}}$

  $$\psi(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-\frac{(p-p_0)^2}{4\alpha\hbar^2} + ip\frac{x}{\hbar}} dp$$
  $$= \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{x\left(\frac{ip_0}{\hbar} - \alpha x\right)}$$
- $W(x,p) = \frac{1}{h} \int e^{-i\frac{py}{\hbar}} \psi(x + \frac{y}{2}) \psi^*(x - \frac{y}{2}) dy$

  $$= \frac{1}{\hbar\pi} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\alpha\hbar^2}} e^{-2\alpha x^2}$$
- $|\psi(x)|^2 = \int W(x,p) dp = \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi}} e^{-2\alpha x^2}$
- $|\varphi(p)|^2 = \int W(x,p) dx = \frac{1}{\hbar\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\alpha\hbar^2}}$







Links: $|\psi(x)|^2$ und $|\varphi(p)|^2$ ($\hbar = \alpha = 1$, $p_0 = 0$).

Rechts: Wignerfunktion des freien Teilchens.

Beispiel: Freies Teilchen

- Kein Potential $\Rightarrow$ Zeitentwicklung durch klassische Liouville-Gleichung beschrieben!

➜ $W(x,p,t) = W_0(x_0(x,p,t), p_0(x,p,t), 0)$
x_0, p_0 klassische Bewegungsgleichungen: $x_0 = x - \frac{p}{m}t$, $p_0 = p$

- $W(x,p,t) = \frac{1}{\hbar\pi} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\alpha\hbar^2}} e^{-2\alpha(x-\frac{p}{m}t)^2}$

Kohärente Zustände

- Energieeigenfunktionen beschreiben keine klassischen Teilchen. Gesucht sind Zustände, die klassischen Systemen möglichst nahe kommen.

➜ Kohärente Zustände, eingeführt von R.J. Glauber 1963 als quantenphysikalische Beschreibung klassischer elektromagnetischer Wellen.

- Eigenfunktionen des Vernichtungsoperators des harmonischen Oszillators. Alternativ erhält man kohärente Zustände durch eine instantane Verschiebung des Grundzustands.

Kohärente Zustände

- Grundzustand: $u_0(x) = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ $\qquad a^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$
  Verschiebung des Ursprungs um $x_0 = \sqrt{2}\alpha a$ und damit verbundene Verringerung der potentiellen Energie um $\frac{m}{2}\omega^2 x_0^2 = \alpha^2 \hbar\omega$

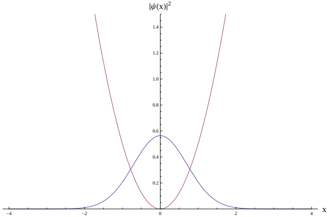
➜ Kohärenter Zustand $\psi(x) = \left(\frac{1}{\pi a^2}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}-\sqrt{2}\alpha\right)^2}$

- Energieverteilung:

  $w_m(|\psi\rangle) = \langle m|\psi\rangle =$

  $(2^m m!)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int d\xi H_m(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\xi-\sqrt{2}\alpha)^2}$ $\qquad \xi = \frac{x}{a}$

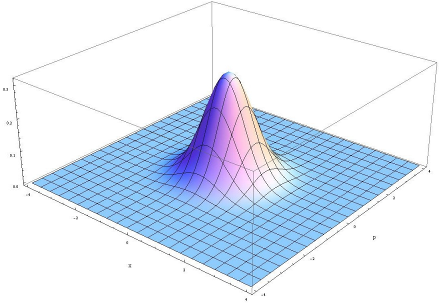
➜ $w_m(|\psi\rangle) = \frac{\alpha^m}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \Rightarrow W_m(|\psi\rangle) = |w_m(|\psi\rangle)|^2 = \frac{\alpha^{2m}}{m!} e^{-\alpha^2}$
  Energie poissonverteilt



Blau: Betragsquadrat der Wellenfunktion des Grundzustandes.

Violett: Oszillatorpotential

($\hbar = m = \omega = 1$).



Wignerfunktion des Grundzustandes.

- $W(x,p) = \frac{1}{ah\sqrt{\pi}} \int e^{-ip\frac{y}{\hbar}} e^{-\frac{1}{2a^2}(x+\frac{y}{2}-\sqrt{2}\alpha a)^2} e^{-\frac{1}{2a^2}(x-\frac{y}{2}-\sqrt{2}\alpha a)^2} dy$

  $W(x,p) = \frac{1}{ah\sqrt{\pi}} \int e^{-ip\frac{y}{\hbar}-\frac{y^2}{4a^2}} e^{-\frac{1}{a^2}(x-\sqrt{2}\alpha a)^2} dy$

  $W(x,p) = \frac{1}{ah\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{a^2}(x-\sqrt{2}\alpha a)^2} \int e^{-(\frac{y}{2a}+\frac{ipa}{\hbar})^2-\frac{p^2a^2}{\hbar^2}} dy$

  $W(x,p) = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{a^2}(x-\sqrt{2}\alpha a)^2-\frac{p^2a^2}{\hbar^2}} \int e^{-u^2} du \quad u = \frac{y}{2a} + \frac{ipa}{\hbar}, dy = 2adu$

➜ $W(x,p) = \frac{1}{\hbar\pi} e^{-\frac{1}{a^2}(x-\sqrt{2}\alpha a)^2-\frac{p^2a^2}{\hbar^2}}$

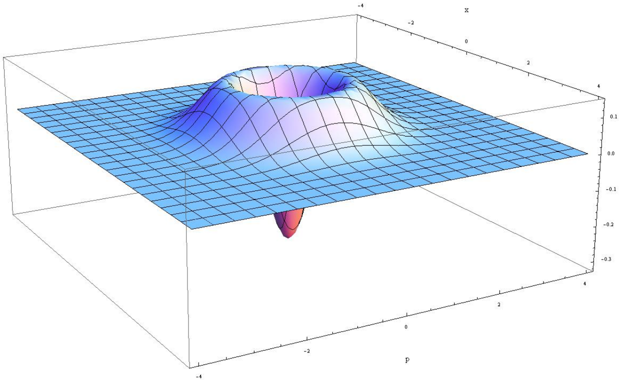
- Oszillatorpotential quadratisch in x $\Rightarrow$ Quanten Liouville-Gleichung geht über in die klassische Gleichung.

- Klassische Bewegungsgleichungen:
  $x_0 = x\cos\omega t - \frac{p}{m\omega}\sin\omega t$
  $p_0 = p\cos\omega t - m\omega x\sin\omega t$

➜ $$W(x,p,t) = \frac{2}{h}\exp\Big[-\frac{1}{m^2\omega^2}(p\cos\omega t + m\omega x\sin\omega t)^2 - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}\Big(x\cos\omega t - \frac{p}{m\omega}\sin\omega t - \alpha\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\Big)^2\Big]$$

- $\langle x \rangle = \int W(x,p)x(x,p)dxdp = 2\pi\alpha\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\cos\omega t$
- $\langle p \rangle = \int W(x,p)p(x,p)dxdp = -2\pi\alpha\sqrt{2\hbar m\omega}\sin\omega t$

- $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$



Wignerfunktion des Energieeigenzustandes $|n = 1\rangle$ ($\hbar = \omega = m = 1$).

Zusammenfassung

Die Wignerfunktion bietet eine intuitive Veranschauung von quantenmechanischen Systemen im vertrauten Phasenraum und ist durch die Liouville-Gleichung eng mit der klassischen statistischen Mechanik verknüpft.
Der Zugang durch die Wignerfunktion ist äquivalent zur Schrödingermechanik. Welche Methode vorteilhafter ist, hängt stets vom betrachteten Problem ab.
Einige Systeme, wie die zeitliche Entwicklung des harmonischen Oszillators, lassen sich mit Hilfe der Wignerfunktion leichter lösen.
Vorallem im Bereich der Quantenoptik und Quantenelektrodynamik kommt sie häufig zum Einsatz.

Literatur

- Quantum Optics in Phase Space,
  Wolfgang P. Schleich
- Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians,
  William B. Case, Am. J. Phys. 76, p. 937, 2008