

Dynamik von Wellenpaketen in verschiedenen Potentialen

Mirko Gabski

Seminar zur Theorie der Atome, Kerne und kondensierten Materie im
Wintersemester 2012/13

14.11.2012



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER



- In der Vorlesung bisher (fast) nur stationäre Zustände
- Wellenpakete näher am Teilchenbild als z.B. ebene Wellen
- Wie sieht die Zeitentwicklung aus?
- Wie hängt die Zeitentwicklung vom Potential ab?
- Wie hängt die Zeitentwicklung vom Aufbau des Wellenpakets ab?



- Wellenpaket ohne Potential
- Wellenpaket im Potential des harmonischen Oszillators
- Wellenpaket im unendlich tiefen Potentialtopf
 - ohne Störung
 - mit Störung



Einleitung

zeitabhängige Schrödinger-Gleichung :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right] \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

Separation: $\Psi(x, t) = \psi(x)\tau(t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} = \psi(x)e^{-i\omega t}$

zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$



Formale Lösung der Schrödinger-Gleichung für diskrete Zustände :

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \quad \text{mit} \quad c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, 0) \psi_n^*(x) dx,$$

wobei $\Psi(x, 0)$ die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ ist.

Für kontinuierliches Spektrum von Zuständen: Summe durch Integral ersetzen



1-dim. Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

Separation: $\Psi(x, t) = \psi(x)\tau(t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar} = \psi(x)e^{-i\omega t}$

1 dim. zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E\psi(x)$$



Ebene Welle als Lösungsansatz

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \text{ und } \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) = \frac{-k^2}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad \text{mit } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Zeitabhängige Lösung mit ebener Welle:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(kx - \omega t)} \quad \text{mit} \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Ohne Potential



Wellenpaket allgemein als Summe über alle ebenen Wellen mit Gewichtung durch von Wellenzahl abhängiger Amplitude:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\psi}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad \text{mit} \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

Gaußsches Wellenpaket:

$$\psi(x, 0) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2b^2}} e^{ik_0 x}$$

Normierung :

$$\implies A = (2\pi^2 b^2)^{-\frac{1}{4}}$$

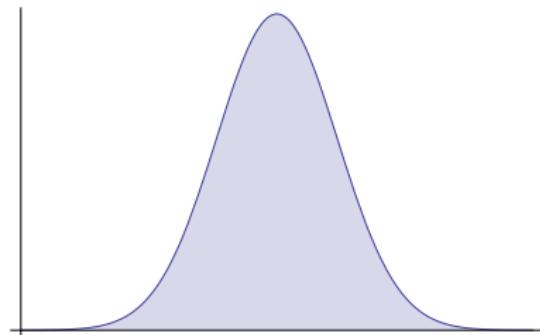


Abbildung : Einhüllende eines Gaußschen Wellenpakets



Bestimmen von $\hat{\psi}(k)$ durch Fourier-Transformation:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi(x, 0) e^{-ikx} \\ &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp \left\{ -\frac{x^2}{2b^2} - i(k - k_0)x \right\} \\ &= Ab \exp \left\{ -\frac{b^2}{2}(k - k_0)^2 \right\}\end{aligned}$$

Lösen des Integrals durch Rückführung auf Gauß-Integral
→ $\hat{\psi}(k)$ ebenfalls gaußförmig!



Berechnen von $\psi(x, t)$:

$$\begin{aligned}\psi(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{\psi}(k) \exp \left\{ i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t) \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk Ab \exp \left\{ -\frac{b^2}{2}(k - k_0)^2 \right\} \exp \left\{ i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t) \right\} \\ &= \frac{Ab\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + i\frac{\hbar}{2m}t}} \exp \left\{ \frac{k_0 b^2 + ix}{2\sqrt{\frac{1}{2}b^2 + i\frac{\hbar}{2m}t}} - \frac{1}{2}b^2 k_0^2 \right\}\end{aligned}$$

Auch hier: Lösen des Integrals durch Rückführung auf Gauß-Integral



Berechnen von $|\psi(x, t)|^2$:

$$|\psi(x, t)|^2 = \psi^*(x, t)\psi(x, t)$$

$$= \frac{A^2 b^2 \sqrt{2\pi}}{\sqrt{b^4 + \left(\frac{\hbar}{m}t\right)^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{b^4 + \left(\frac{\hbar}{m}t\right)^2}\right\}$$

mit $A^2 b = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ und $b(t) = \frac{1}{b} \sqrt{b^4 + \left(\frac{\hbar}{m}t\right)^2}$

$$\implies |\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} b(t)} \exp\left\{-\frac{(x - \frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{b(t)^2}\right\}$$

→ Propagierender Gaußpeak mit zeitabhängiger Breite und Höhe

Ohne Potential

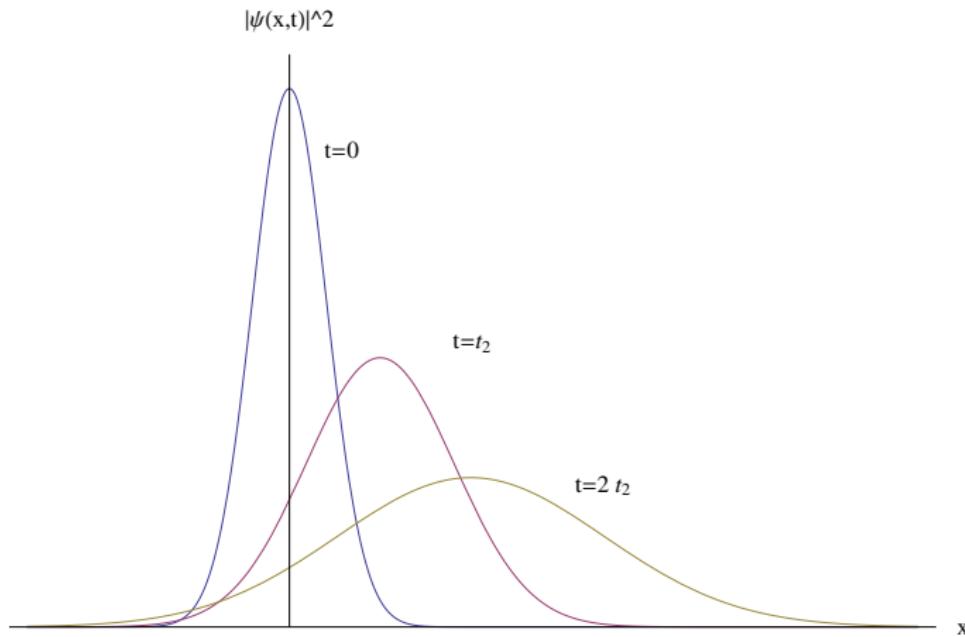


Abbildung : Freies Wellenpaket zu den Zeitpunkten $t = 0$, $t = t_2$ und $t = 2t_2$



Breite des Wellenpakets :

$$b(t) = \frac{1}{b} \sqrt{b^4 + \left(\frac{\hbar}{m} t\right)^2} \quad b(0) = b$$

Zeit bis sich Breite verdoppelt :

$$t_2 = \sqrt{3} b^2 \frac{m}{\hbar}$$

Zahlenbeispiele:

- Staubkorn : $m = 1 \text{ g}$ und $b = 1 \text{ mm} \rightarrow t_2 \approx 1,642 \cdot 10^{25} \text{ s}$, etwa $5,2 \cdot 10^{17} \text{ Jahre}$
- Elektron : $m = m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ und $b = 0,5 \text{ \AA} \rightarrow t_2 \approx 3,74 \cdot 10^{-17} \text{ s}$



- Wellenpaket ohne Potential ✓
- Wellenpaket im Potential des harmonischen Oszillators
- Wellenpaket im unendlich tiefen Potentialtopf
 - ohne Störung
 - mit Störung



Schrödinger-Gleichung für den 1-dim. HO:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right) \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

zeitunabhängige Schrödinger Gleichung für den 1-dim. HO:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2 \right) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$$

$$\text{mit } E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$\psi_n(x)$: Eigenzustände des harmonischen Oszillators

Harmonischer Oszillator



Erzeugungsoperator a^\dagger und Vernichtungsoperator a

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{und} \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

x und p mit a^\dagger und a darstellbar:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}} (a + a^\dagger) = \frac{x_0}{\sqrt{2}} (a + a^\dagger) \qquad \text{mit } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}}$$

$$p = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (a - a^\dagger) = -i\frac{p_0}{\sqrt{2}} (a - a^\dagger) \qquad \text{mit } p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$$

Eigenzustände $\psi_n(x)$ mittels Erzeugungsoperator:

$$\psi_n = \frac{a^\dagger}{\sqrt{n}} \psi_{n-1} = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \psi_0$$



Betrachten Funktion, die keine Eigenfunktion des Hamiltonoperators ist:

$$\begin{aligned}a\varphi_\alpha &= \alpha\varphi_\alpha \\ \text{wobei } a\varphi_0 &= 0\varphi_0 \\ \text{analog zu : } a\psi_0 &= 0\psi_0\end{aligned}$$

Zustand φ_α ist Eigenfunktion von Vernichtungsoperator a
 α komplexe Zahl

Zustand φ_α nach Eigenfunktionen ψ_n des Harmonischen Oszillators entwickeln

Harmonischer Oszillator



Betrachte dazu $\langle \psi_n | \varphi_\alpha \rangle$:

$$\langle \psi_n | \varphi_\alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle a^{\dagger n} \psi_0 | \varphi_\alpha \rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle \psi_0 | a^n \varphi_\alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle \psi_0 | \varphi_\alpha \rangle$$

Entwicklung von φ_α nach ψ_n als Summe von Eigenzuständen:

Erinnerung: $1 = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$

$$|\varphi_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \varphi_\alpha \rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |\psi_n\rangle$$

Normierungskonstante C aus Normierungsbedingung:

$$1 = \langle \varphi_\alpha | \varphi_\alpha \rangle = C^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = C^2 e^{|\alpha|^2} \implies C = e^{-|\alpha|^2/2}$$



Zeitentwicklung für Eigenzustände des HO mit $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$

$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x)e^{-iE_n t/\hbar} = \psi_n e^{-i(\omega tn + \omega t/2)} = \psi_n (e^{-i\omega t})^n e^{-i\omega t/2}$$

Zeitentwicklung von $\varphi_\alpha(x, t)$ aus bekannter Zeitentwicklung der stationären Zustände:

$$\varphi_\alpha(x, t) = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} \psi_n e^{-i\omega t/2} \quad \text{oder}$$

$$\varphi_\alpha(x, t) = \varphi_{\alpha(t)}(x) e^{-i\omega t/2} \quad \text{mit} \quad \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$$



Erwartungswert des Ortes:

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \langle \varphi_{\alpha(t)}(x), x \varphi_{\alpha(t)}(x) \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \langle \varphi_{\alpha(t)}(x), (a + a^\dagger) \varphi_{\alpha(t)}(x) \rangle \\ &= \frac{x_0}{\sqrt{2}} (\alpha(t) + \alpha^*(t)), \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}}, \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}} (a + a^\dagger)\end{aligned}$$

Mit $\alpha(t) = |\alpha| e^{i(\delta - \omega t)}$ ergibt sich:

$$\langle x \rangle = \sqrt{2} x_0 |\alpha| \cos(\omega t - \delta) = A \cos(\omega t - \delta)$$

Selbe Zeitabhängigkeit wie bei einer klassischen Schwingung mit Amplitude $A = \sqrt{2} x_0 |\alpha|$



Berechnung von $|\varphi_\alpha(x, t)|^2$:

Ausgehend von $a\varphi_\alpha(x) = \alpha\varphi_\alpha(x)$:

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{\hbar}{m\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{mit } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{\omega m}}$$

$$a\varphi_\alpha(x) = \alpha\varphi_\alpha(x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + x_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi_\alpha(x) = \alpha\varphi_\alpha(x)$$

$$\frac{\partial\varphi_\alpha(x)}{\partial x} = -(x/x_0^2 - \sqrt{2}\alpha/x_0)\varphi_\alpha(x)$$



$$\frac{\partial \varphi_\alpha(x)}{\partial x} = -(x/x_0^2 - \sqrt{2}\alpha/x_0)\varphi_\alpha(x)$$

Variablen Transformation $\tilde{x} = x - \sqrt{2}\alpha x_0$

$$\frac{\partial \varphi_\alpha(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} = -\tilde{x}/x_0^2 \varphi_\alpha(\tilde{x}) = -\frac{m\omega}{\hbar} \tilde{x} \varphi_\alpha(\tilde{x})$$

Analog zum Grundzustand des HO $\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} = Ce^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$

$$\frac{\partial \psi_0(x)}{\partial x} = -x/x_0^2 \psi_0(x) = -\frac{m\omega}{\hbar} x \psi_0(x)$$

Grundzustand $\psi_0(x)$ ist Gaußförmig!

Harmonischer Oszillator



$\varphi_\alpha(x)$ verschobener Grundzustand:

$$\varphi_\alpha(x) = \psi_0(\tilde{x}) = \psi_0(x - \sqrt{2}\alpha x_0)$$

Zeitabhängige Lösung:

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha(t)}(x) &= \varphi_{\alpha(t)}(x)e^{-i\omega t/2} \text{ mit } \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t} = |\alpha| e^{i\delta - \omega t} \\ &= e^{-i\omega t/2} \psi_0(x - \sqrt{2}x_0^2 \alpha e^{-i\omega t})\end{aligned}$$

$$|\varphi_{\alpha(t)}(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}x_0} \exp \left\{ \frac{x - \sqrt{2}x_0|\alpha| \cos(\omega t - \delta)}{x_0^2} \right\}$$

Ein gaußsches Wellenpaket, welches sich nicht verbreitert, da alle Summanden in Phase sind! → Kohärenter Zustand

Harmonischer Oszillator

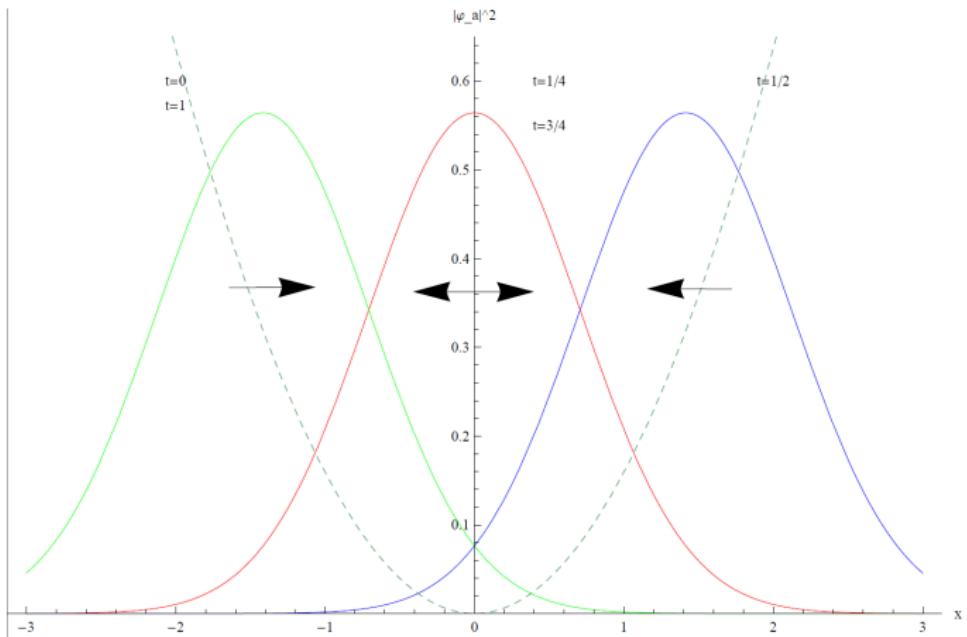


Abbildung : Kohärenter Zustand für $x_0 = 1, |\alpha| = 1, \omega = 2\pi$ und $\delta = 0$ zu den Zeitpunkten $t = 0, t = 1/4$ und $t = 1/2$



- Wellenpaket ohne Potential ✓
- Wellenpaket im Potential des harmonischen Oszillators ✓
- Wellenpaket im unendlich tiefen Potentialtopf
 - ohne Störung
 - mit Störung

Unendlicher Potentialtopf



Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < -a \\ 0, & -a < x < b \\ \infty, & x > b \end{cases}$$

Eigenzustände :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a+b}} \sin\left(\frac{n\pi(x+a)}{a+b}\right)$$

Energie-Eigenwerte:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m(a+b)^2}$$

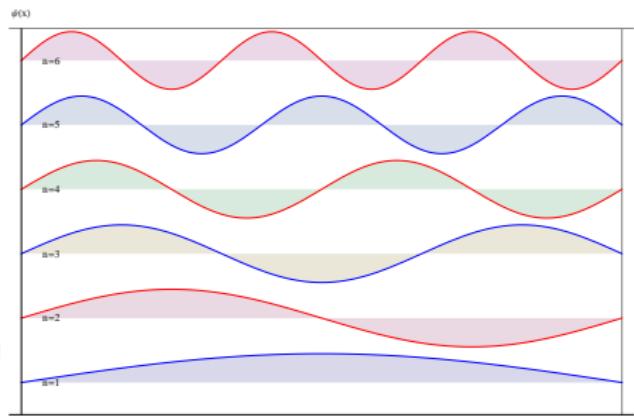


Abbildung : Eigenzustände für den unendlich tiefen Potentialtopf für $a = b = 5$ und $n = 1, \dots, 6$



Formale Lösung der Schrödinger-Gleichung:

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t / \hbar} \quad \text{mit} \quad c_n = \int_{-a}^b \Psi(x, 0) \psi_n^*(x) dx,$$

wobei $\Psi(x, 0)$ die Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$ ist.



Revival: Die Ausgangswellenfunktion $\Psi(x, 0)$ erscheint für alle $t = kT_r$ mit ganzzahligem k wieder.

- Phasen zum Zeitpunkt T_r (**revival time**) für alle n mit $c_n \neq 0$ gleich
- $\Psi(x, T_r)$ bis auf konstanten Phasenfaktor gleich $\Psi(x, 0)$
 - konstanter Phasenfaktor hat auf Wahrscheinlichkeitsdichte keinen Einfluss

Für das betrachtete Potential gilt:

$$T_r = \frac{4m(a+b)^2}{\pi\hbar} \quad \text{und} \quad \Phi_n(T_r) = \frac{\pi^2\hbar^2 n^2}{2m(a+b)^2} \frac{T_r}{\hbar} = 2\pi n^2$$

Mit der Phase $\Phi_n(t) = E_n t / \hbar$ des n -ten Zustands

Unendlicher Potentialtopf



Für bestimmte Wellenfunktionen auch kürzere Perioden als T_r möglich

- ungerade räumliche Symmetrie um $x = (b - a)/2$
- nur geradzahlige Eigenzustände d.h. $n = 2j$

$$E_i^{\text{gerade}} = \frac{\pi^2 \hbar^2 (2j)^2}{2m(a+b)^2} = 4j^2 E_1 \quad \text{und} \quad \Phi^{\text{gerade}}(T_r) = 4 \cdot 2\pi j^2$$

⇒ Revivals bei $t = kT_r/4$:

- gerade räumliche Symmetrie um $x = (b - a)/2$
- nur ungeradzahlige Eigenzustände d.h. $n = (2j + 1)$

$$E_i^{\text{ungerade}} = 4j(j+1)E_1 + E_1 \quad \text{und} \quad \Phi^{\text{ungerade}}(T_r) = 8 \cdot (j(j+1)\pi + \pi/4)$$

⇒ Revivals bei $t = kT_r/8$:

Unendlicher Potentialtopf



Für $\Psi(x, t) = \Psi^{\text{gerade}}(x, t) + \Psi^{\text{ungerade}}(x, t)$ gilt für:

Zeit	Ungerade Zustände in Phase?	GeradeZustände in Phase?	Phasenversatz gerade/ungerade
$T_r/8$	ja	nein	
$T_r/4$	ja	ja	$\frac{\pi}{2}$
$T_r/2$	ja	ja	π



Mirror Revival:

- $t = T_r/2$
- Phase von $\Psi^{\text{gerade}} : e^{i4\pi j^2} = 1$
- Phase von $\Psi^{\text{ungerade}} : e^{i(4j(j+1)\pi+\pi)} = e^{i\pi} = -1$

$$\begin{aligned}\Psi(x, T_r/2) &= \Psi^{\text{gerade}}(x, T_r/2) + \Psi^{\text{ungerade}}(x, T_r/2) \\&= \Psi^{\text{gerade}}(x, 0)e^{i4\pi j^2} + \Psi^{\text{ungerade}}(x, 0)e^{i\pi} \\&= \Psi^{\text{gerade}}(x, 0) - \Psi^{\text{ungerade}}(x, 0) \\&= -\Psi^{\text{gerade}}(-x, 0) - \Psi^{\text{ungerade}}(-x, 0) \\&= -\Psi(-x, 0) \\ \iff |\Psi(x, T_r/2)|^2 &= |\Psi(-x, 0)|^2\end{aligned}$$

Unendlicher Potentialtopf

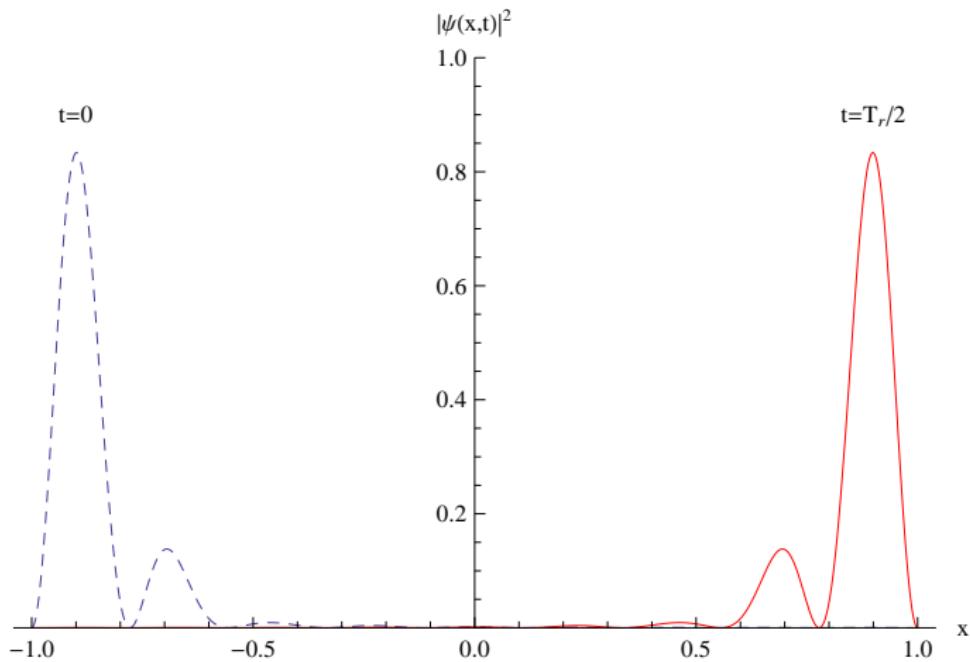


Abbildung : Beispiel für ein Mirror Revival für $a = b = 1$



Fractional Revival:

- $t = T_r/4$
- Phase von $\Psi^{\text{gerade}} : e^{i2\pi j^2} = 1$
- Phase von $\Psi^{\text{ungerade}} : e^{i(2j(j+1)\pi + \pi/2)} = e^{i\pi/2} = i$
- $\Psi^{\text{gerade}, \text{ungerade}}(x, t) = 1/2 \cdot [\Psi(x, t) \mp \Psi(-x, t)]$
- falls $\Psi(x, 0)$ reell

$$\begin{aligned}\Psi(x, T_r/4) &= \Psi^{\text{gerade}}(x, T_r/4) + \Psi^{\text{ungerade}}(x, T_r/4) \\ &= \Psi^{\text{gerade}}(x, 0)e^{i2\pi j^2} + \Psi^{\text{ungerade}}(x, 0)e^{i\pi/2} \\ &= \Psi^{\text{gerade}}(x, 0) + i\Psi^{\text{ungerade}}(x, 0) \\ \iff |\Psi(x, T_r/4)|^2 &= \Psi^{\text{gerade}}(x, 0)^2 + \Psi^{\text{ungerade}}(x, 0)^2 \\ &= \frac{1}{2}\Psi(x, 0)^2 + \frac{1}{2}\Psi(-x, 0)^2\end{aligned}$$

Unendlicher Potentialtopf

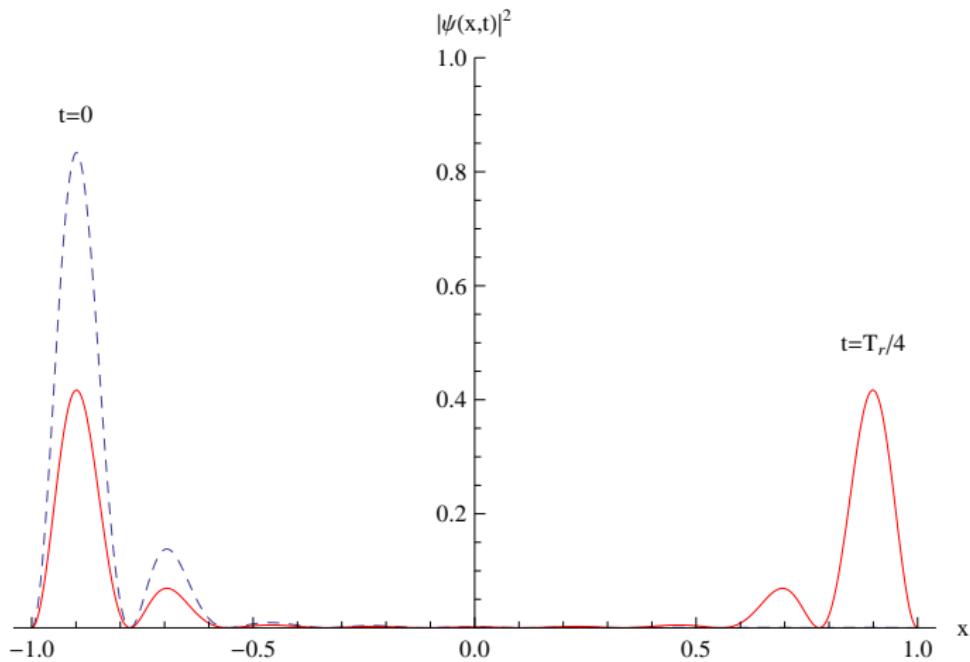


Abbildung : Beispiel für ein Fractional Revival für $a = b = 1$



- Wellenpaket ohne Potential ✓
- Wellenpaket im Potential des harmonischen Oszillators ✓
- Wellenpaket im unendlich tiefen Potentialtopf
 - ohne Störung ✓
 - mit Störung



Gestörtes Potential:

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < -a \\ 0, & -a < x < 0 \\ V_0, & 0 < x < b \\ \infty, & x > b \end{cases}$$

$$H = H_0 + V_S$$

H_0 : Ungestörtes System

V_S : Störung

Nach Rayleigh-Schrödinger-Störungsrechnung für den zeitunabhängigen Fall schreibt man den Hamiltonoperator:

Die Störung ist dann:

$$V_S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & 0 < x < b \\ 0, & x > b \end{cases}$$



Die Energiekorrektur erster Ordnung ist gegeben durch:

$$E_n^{(1)} = \langle \psi_n(x) | V_S | \psi_n(x) \rangle$$

Für die Energieniveaus gilt dann:

$$E_n \approx E_n^{(0)} + E_n^{(1)} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m(a+b)^2} + \frac{bV_0}{a+b} + \frac{V_0}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi a}{a+b}\right)$$



Einfluss auf Revival lässt sich einfach anhand der Phasen untersuchen:

zwei Phasen der Zustände n und k sind gleich, wenn $E_n t = E_k t + 2\pi\hbar j$ (j ganzzahlig) gilt

Im ungestörten Fall mit $E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m(a+b)^2}$ gilt für $t = T_r = \frac{4m(a+b)^2}{\pi\hbar}$:

$$E_n T_r = E_k T_r + 2\pi\hbar j$$

$$2\pi n^2 = 2\pi k^2 + 2\pi j \quad \text{mit} \quad j = k^2 - n^2$$

Für alle Zustände erfüllbar, d.h. alle Zustände sind zum Zeitpunkt T_r in Phase \Rightarrow exaktes Revival



Für den gestörten Fall lautet die Bedingung dann :

$$(E_n^{(0)} + E_n^{(1)})(T_r + \delta T_r) = (E_k^{(0)} + E_k^{(1)})(T_r + \delta T_r) + 2\pi\hbar j$$

Für genügend kleine Störung bleibt j gleich und Terme $E_n^{(1)} \cdot \delta T_r$ sind zu vernachlässigen, für δT_r gilt nun:

$$\begin{aligned}\delta T_r &= -\frac{(E_n^{(1)} - E_k^{(1)}) T_r}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} \\ &= -\frac{V_0 T_r^2}{4\pi^2 \hbar (n^2 - k^2)} \left[\frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi a n}{a+b}\right) - \frac{1}{k} \sin\left(\frac{2\pi a k}{a+b}\right) \right]\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\delta T_r &= -\frac{V_0 T_r^2}{4\pi^2 \hbar (n^2 - k^2)} \left[\frac{1}{n} \sin\left(\frac{2\pi a n}{a+b}\right) - \frac{1}{k} \sin\left(\frac{2\pi a k}{a+b}\right) \right] \\ &= 0 \quad \text{für} \quad a = b \text{ da } \sin(\pi n) = 0 \forall n\end{aligned}$$

⇒ Störung hat im Fall einer Potentialstufe in der Mitte des Potentialtopfes keine Auswirkung auf das exakte Revival bei $t = T_r$!

Im Fall von $a \neq b$ verschieben sich die Revival-times der einzelnen Zustände proportional zu V_0

- Eigenzuständen außer Phase d.h. Revival nicht exakt
- Vielfache von T_r , d.h. Verschiebung wird größer
- Revival zerfällt mit der Zeit



Erinnerung:

Autokorrelation einer Funktion $\Psi(x, t)$:

$$\Phi_{\Psi\Psi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, 0)^* \Psi(x, t) dx$$

$\Phi_{\Psi\Psi}(t)$ ist normiert, da $\Psi(x, t)$ bereits normiert gewählt ist

Unendlicher Potentialtopf

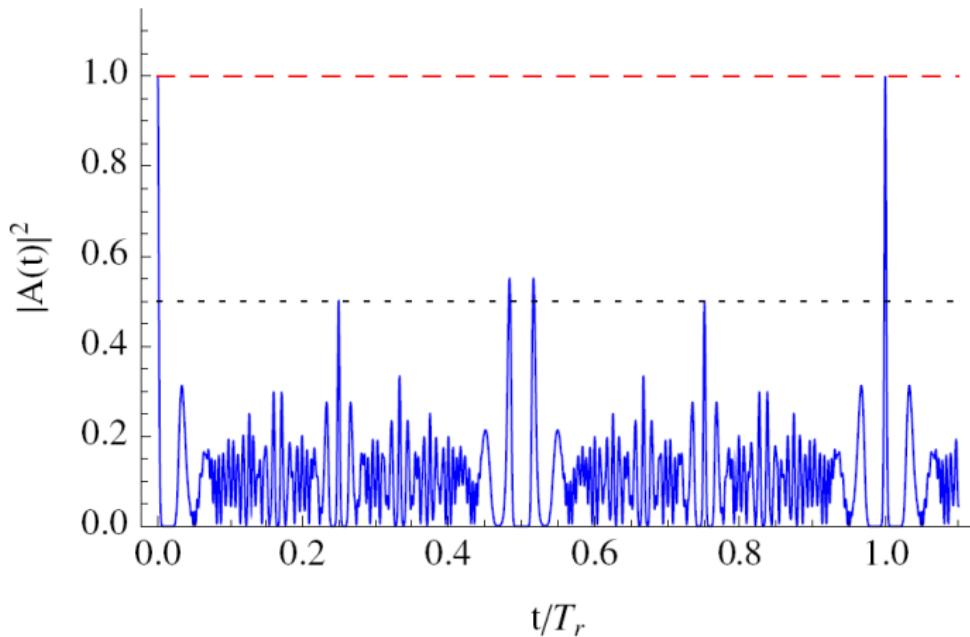


Abbildung : Autokorrelation für $a = b$

Unendlicher Potentialtopf

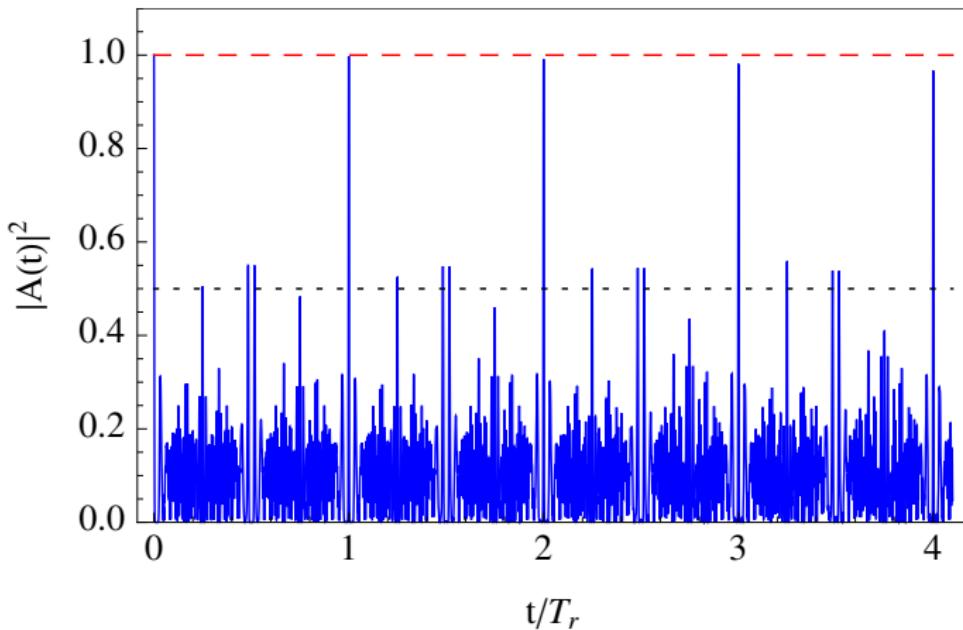


Abbildung : Autokorrelation für $a \neq b$



- Wellenpaket ohne Potential ✓
- Wellenpaket im Potential des harmonischen Oszillators ✓
- Wellenpaket im unendlich tiefen Potentialtopf
 - ohne Störung ✓
 - mit Störung ✓



- Wellenpaket ohne Potential zerfließt
- Kohärenter Zustand des harmonischen Oszillators behält seine Form und der Erwartungswert verhält sich wie im klassischen Fall
- Verhalten von Wellenpaketen im Potentialtopf hängt von dessen Symmetrie und den das Wellenpaket bildenden Eigenzuständen ab



- Wellenpaket ohne Potential zerfließt
- Kohärenter Zustand des harmonischen Oszillators behält seine Form und der Erwartungswert verhält sich wie im klassischen Fall
- Verhalten von Wellenpaketen im Potentialtopf hängt von dessen Symmetrie und den das Wellenpaket bildenden Eigenzuständen ab

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!



- W.Nolting, Nolting Grundkurs Theoretische Physik Band 5/1
Quantenmechanik Grundlagen
 - Kapitel 2.2.3 Wellenpakete
- Franz Schwabl, Quantenmechanik (QM I): Eine Einführung
 - Kapitel 3.1.4 Kohärente Zustände
- Todd K. Timberlake and Seth Camp, Decay of wave packet revivals in the asymmetric infinite square well, Am. J. Phys. 79(6), June 2011
- David L. Aronstein and C. R. Stroud, Jr. , Fractional wave-function revivals in the infinite square well, Phys. Rev. A 55, 4526 (1997)
- <http://www.optics.rochester.edu/~stroud/>