

Übungsblatt 11: (11 P.)

Abgabe: 06.07.10

Aufgabe 1:

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Oszillatorenpotential

$$V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2q^2.$$

Zu Zeit $t = 0$ werde es durch das Gaußsche Wellenpaket

$$\psi(q, 0) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(q - \bar{q})^2\right]$$

beschrieben.

- a) (**schriftlich**) [1 P.] Entwickeln Sie $\psi(q, 0)$ nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(q)$ des linearen harmonischen Oszillators:

$$\psi(q, 0) = \sum_n \alpha_n \varphi_n(q).$$

Hinweis: Benutzen Sie zur Berechnung der Koeffizienten α_n die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-x_0)^2} H_n(x) = \sqrt{\pi}(2x_0)^n.$$

- b) (**schriftlich**) [2 P.] Berechnen Sie die volle Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion $\psi(q, t)$.

Hinweis: Verwenden Sie die folgende Darstellung der erzeugenden Funktion der Hermite-Polynome

$$\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \quad (1)$$

sowie die Eulersche Formel $e^{-ni\omega t} = \cos n\omega t - i \sin n\omega t$ und das Additionstheorem $\cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t$.

- c) (**mündlich**) [1 P.] Bestimmen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(q, t)|^2$ und demonstrieren Sie daran, dass das Wellenpaket im Gegensatz zu dem des freien Teilchens nicht zerfließt.
- d) (**mündlich**) [1 P.] Geben Sie den Erwartungswert $\langle q \rangle_t$ und die mittlere quadratische Schwanlung Δq_t an.
- e) (**mündlich**) [1 P.] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit deren einer Energiemessung am Teilchen zur Zeit $t > 0$ den Eigenwert

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

liefert.

Aufgabe 2: (Auswahlregeln und Übergangswahrscheinlichkeit)

- a) (**schriftlich**) [1 P.] Ermitteln Sie unter Berücksichtigung der Feinstruktur, des Lamb-Shifts und der Dipol-Auswahlregeln die Struktur der Lyman- α -Linie ($n = 2 \rightarrow n = 1$) im Wasserstoffatom. Ignorieren Sie die Hyperfeinstruktur.
- b) (**schriftlich**) [2 P.] Berücksichtigen Sie nun die Hyperfeinstruktur der nach a) erlaubten Übergänge. Welche Übergänge werden beobachtet? Zeichnen Sie ein Diagramm.
- c) (**mündlich**) [2 P.] Der Zustand $2s_{1/2}$ ist metastabil. Er könnte doch spontan in den Zustand $2p_{1/2}$ zerfallen. Warum beobachtet man das nicht? Ist eine Auswahlregel verletzt?