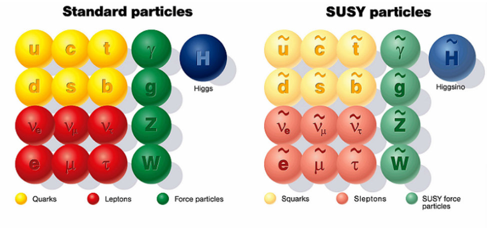
Partiell gequenchte chirale Störungstheorie für die N=1 supersymmetrische Yang-Mills-Theorie

Hendrik Stüwe

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

22. November 2013

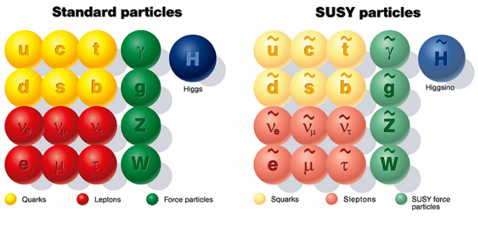
Motivation



http://www.physics.gla.ac.uk/ppt/images/susyparticles_sm.png

- Supersymmetrie ist eine vielversprechende Hypothese
- Wir wollen Gluinos beschreiben!
- Gluinos sind Fermionen mit Farbladung

Motivation



http://www.physics.gla.ac.uk/ppt/images/susyparticles_sm.png

- Quarks sind ebenfalls Fermionen mit Farbladung
- Quarks bilden Mesonen, durch chirale Störungstheorie beschreibbar
- Kann man mit gleichen Mitteln auch „adjungierte Pionen“ beschreiben?

Überblick

In der QCD

Sehen wir uns also den QCD Lagrangian an.

$$\mathcal{L}_{QCD} = \overline{q}_{f,c}\,(\mathrm{i}\not{D} - m)\,q_{f,c} - \frac{1}{4}\mathcal{G}^{a}_{\mu\nu}\mathcal{G}^{a\mu\nu} \tag{1}$$

Die fundamentalen Teilchen sind hier die Quarks q. Diese besitzen chirale Komponenten:

$$q = \begin{pmatrix} \chi_L \\ \eta_R \end{pmatrix} \tag{2}$$

Diese Komponenten können durch Projektoren P ausgewählt werden

$$q_L = P_L q = \begin{pmatrix} \chi_L \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

In der QCD

Hier nun der chiral aufgespaltene Lagrangian

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathrm{i}\overline{q}_L \not{D} q_L + \mathrm{i}\overline{q}_R \not{D} q_R - \overline{q}_L m q_R - \overline{q}_R m q_L - \frac{1}{4}\mathcal{G}^a_{\mu\nu}\mathcal{G}^{a\mu\nu} \quad (4)$$

- Der masselose Lagrangian besitzt chirale Symmetrie
- Die maximale Symmetrie in der QCD ist $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1) \times U(1)_A$
- Spontane Symmetriebrechung $\rightarrow$ effektive Theorie für Mesonen

Gluinos

Zuerst betrachten wir den Gluino-Lagrangian

$$\mathcal{L}_G = \frac{1}{2}\overline{\lambda}\left(\mathrm{i}\not{D} - m_g\right)\lambda - \frac{1}{4}\mathcal{G}^a_{\mu\nu}\mathcal{G}^{a\mu\nu} \tag{5}$$

- gleiche Struktur wie der QCD-Lagrangian
- maximale Symmetrie ist $SU(N)_L \times SU(N)_R \times U(1) \times U(1)_A$
- Zusätzliche Bedingung, da Gluinos Majorana-Fermionen sind

Gluinos

Majorana-Bedingung

Gluinos sind ihre eigenen Antiteilchen. Dies führt zu

$$\lambda = C\overline{\lambda}^T \tag{6}$$

oder, wenn man einen Projektor anwendet

$$\lambda_L = C\overline{\lambda}_R^T \Rightarrow \lambda = \begin{pmatrix} \chi \\ -\mathrm{i}\sigma^2\chi^* \end{pmatrix} \tag{7}$$

Links- und rechtshändig chirale Komponenten sind nicht unabhängig.

Gluinosymmetrie

Um die Gluinosymmetrie zu bestimmen müssen wir feststellen, ob Transformationen U mit

$$\lambda \to \lambda' = U\lambda \qquad (8)$$

die Majorana-Bedingung erfüllen.Wir überprüfen:

- $U(1)_V$
- $U(1)_A$
- $SU(N)_L \times SU(N)_R$

$U(1)_V$

Die Transformation wirkt in folgender Weise

$$\lambda \longmapsto \lambda' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\chi \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\mathrm{i}\sigma^2\chi^* \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\neq \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\chi \\ -\mathrm{i}\sigma^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi' \\ -\mathrm{i}\sigma^2\chi'^* \end{pmatrix} \tag{10}$$

$U(1)_V$

$U(1)_V$-Transformationen verletzen die Majorana-Bedingung und $U(1)_V$ ist somit keine Symmetriegruppe der Gluinos.

$U(1)_A$

Die Transformation wirkt in folgender Weise

$$\lambda \longmapsto \lambda' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma^5\alpha}\lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\chi \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\mathrm{i}\sigma^2\chi^* \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\chi \\ -\mathrm{i}\sigma^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\chi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi' \\ -\mathrm{i}\sigma^2\chi'^* \end{pmatrix} \tag{12}$$

$U(1)_A$

$U(1)_A$ ist eine Symmetriegruppe der Gluinos

$SU(N)_L \times SU(N)_R$

Diese Transformationen sind von der Form

$$U_L = \exp\left(-\mathrm{i}P_L \alpha_a T_a\right) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\mathbb{1} - \gamma^5\right)\alpha_a T_a\right) \tag{13}$$

Die kombinierten Transformationen können geschrieben werden als

$$U = \exp\left(-\mathrm{i}\alpha'_a T_a - \mathrm{i}\gamma^5 \beta'_b T_b\right) \tag{14}$$

Wir betrachten nun eine infinitesimale Transformation

$$U \approx \mathbb{1} - \mathrm{i}\,T^V - \mathrm{i}\,T^A \tag{15}$$

$SU(N)_L \times SU(N)_R$

$$\lambda' = C\overline{\lambda'}^T \tag{16a}$$

$$\left(\mathbb{1} - \mathrm{i}\,T^V - \mathrm{i}\,T^A\right)\lambda = C\left(\mathbb{1} + \mathrm{i}\,T^{V*} - \mathrm{i}\,T^{A*}\right)\overline{\lambda}^T \tag{16b}$$

$$\left(\mathbb{1} - \mathrm{i}\,T^V - \mathrm{i}\,T^A\right)\lambda = \left(\mathbb{1} + \mathrm{i}\,T^{V*} - \mathrm{i}\,T^{A*}\right)C\overline{\lambda}^T \tag{16c}$$

$$\left(\mathbb{1} - \mathrm{i}\,T^V - \mathrm{i}\,T^A\right)\lambda = \left(\mathbb{1} + \mathrm{i}\,T^{V*} - \mathrm{i}\,T^{A*}\right)\lambda \tag{16d}$$

Es folgt somit für die Generatoren

$$T^V = -T^{V*} \tag{17a}$$

$$T^A = T^{A*} \tag{17b}$$

$SU(N)_L \times SU(N)_R$

$SU(N)$-Generatoren teilen sich auf in

- $\frac{1}{2}N\,(N-1)$ imaginäre Generatoren mit einer Lie-Algebra die die Untergruppe $SO(N)$ formt
- $\frac{1}{2}N\,(N+1)-1$ reelle Generatoren

Beispiel: $SU(2)$

$$T_1 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$SU(N)^*$

Beispiel: $SU(2)^*$

$$T_1 = \frac{\gamma^5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad T_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3 = \frac{\gamma^5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Resultierende Symmetrie

Die Symmetrie der Gluinos ist somit $SU(N)^* \times U(1)_A$.

Spontane Symmetriebrechung

Man kann zeigen

$$\langle \overline{\lambda}_1 \lambda_1 \rangle + \langle \overline{\lambda}_2 \lambda_2 \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle j | \, Q_{Aa}(t) \, | 0 \rangle \neq 0 \tag{18}$$

In der QCD kann $\langle \overline{\lambda}_1 \lambda_1 \rangle + \langle \overline{\lambda}_2 \lambda_2 \rangle$ mit der Zerfallsbreite von Pionen verknüpft werden und somit gezeigt werden, dass es ungleich 0 ist.

Annahme

Wir müssen explizit annehmen, dass $\langle \overline{\lambda}_1 \lambda_1 \rangle + \langle \overline{\lambda}_2 \lambda_2 \rangle \neq 0$ gilt, da wir dies nicht beweisen können.

Unter dieser Annahme sind die axialen Symmetrien spontan gebrochen.

$$SU(2)^* \to SO(2)$$

Dies erzeugt $n_G - n_H = 3 - 1 = 2$ Goldstonebosonen.

Effektive Theorie

Wir wollen nun eine effektive Theorie formulieren. Dafür benötigen wir folgende Größen:

- Ein effektives Bosonenfeld U
- Eine effektive Masse $\mathcal{M}$
- Effektive äußere Felder f

Für die Massenbestimmung dieser Arbeit können äußere Felder vernachlässigt werden.

Effektives Bosonenfeld

Wir benötigen einen Ausdruck, der aus den Symmetriegruppen hervorgeht und invariant unter $SO(2)$ ist.

Nebenklasse

Die Nebenklasse $SU(2)^*/SO(2)$ besitzt diese Eigenschaft. Mit $G = SU(2)^*$ und $H = SO(2)$ gilt

$$G/H = \{gH | g \in G\} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} gH &= \exp\left(\mathrm{i}\alpha_1 T_1 + \mathrm{i}\alpha_2 T_2 + \mathrm{i}\alpha_3 T_3\right) H && \text{(20a)} \\ &= \exp\left(\mathrm{i}\alpha_1 T_1 + \mathrm{i}\alpha_2 T_2 + \mathrm{i}\alpha_3 T_3\right) \exp\left(\mathrm{i}\beta_2 T_2\right) H = g' H && \text{(20b)} \end{aligned}$$

Es existiert ein β_2, so dass

$$g' = \exp\left(\mathrm{i}\alpha_1' T_1 + \mathrm{i}\alpha_3' T_3\right) \tag{21}$$

Effektives Bosonenfeld

Es ist nun

$$g' : \mathbb{R}^2 \to SU(2) \tag{22}$$

Wir suchen eine Abbildung $U : M^4 \to SU(2)$ und führen deswegen ein

$$\phi_1, \phi_2 : M^4 \to \mathbb{R} \tag{23}$$

Hieraus konstruieren wir

$$\phi = \phi_1 T_1 + \phi_2 T_3 \tag{24}$$

Womit wir unsere Matrizen definieren

$$U = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\phi}{F}\right) \tag{25}$$

Effektive Masse

Für die effektive Masse übernehmen wir die Gluinomasse

$$\mathcal{M} = m_g \tag{26}$$

Wir erheben die Masse zum transformierenden Feld und definieren

$$\chi = 2B_0\mathcal{M} \tag{27}$$

Transformationsverhalten

Für die Konstruktion des Lagrangians ist das Transformationsverhalten der Größen entscheidend.

Für eine Transformation $Y \in SU(2)^*$ gilt

$$U \to U' = YUY^T \tag{28}$$

und für die Masse

$$\chi \to \chi' = Y\chi Y^T \tag{29}$$

Konstruktion des Lagrangians

Nun müssen wir alle Kombinationen der effektiven Felder finden, für die gilt:

- Sie sind maximal von Ordnung q^n $\left(U = \mathcal{O}\left(q^0\right), \partial_\mu = \mathcal{O}\left(q\right), \chi = \mathcal{O}\left(q^2\right)\right)$
- Sie sind Lorentz invariant
- Sie sind invariant unter Flavourtransformationen
- Sie sind invariant bezüglich Parität

Wir nutzen die Spur, da gilt

$$\mathrm{Tr}\left(AB^\dagger\right) \to \mathrm{Tr}\left(YAY^T\left(YBY^T\right)^\dagger\right) \tag{30a}$$

$$= \mathrm{Tr}\left(YAY^TY^*B^\dagger Y^\dagger\right) \tag{30b}$$

$$= \mathrm{Tr}\left(Y^\dagger YAB^\dagger\right) = \mathrm{Tr}\left(AB^\dagger\right) \tag{30c}$$

Effektiver Lagrangian von $\mathcal{O}\left(q^2\right)$

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{F^2}{4}\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\right) + \frac{F^2}{4}\mathrm{Tr}\left(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger\right) \qquad (31)$$

- gleiche Form wie für Mesonen
- nur anwendbar für $N \geq 2$ Flavour
- Partiell quenchen, da nur ein Flavour

Partielles Quenchen

Wir wollen den eine physikalischen Flavour der Gluinos beschreiben, indem wir unphysikalische Flavour hinzufügen.

- Die N_s Sea-Gluinos werden um N_v Valenz- und Ghost-Gluinos erweitert
- Ghost-Gluinos sind kommutierende Größen
- Die Beiträge der Valenz- und Ghost-Gluinos zur Wirkung heben sich auf
- Die $N_s + 2N_v$ Teilchen besitzen eine graduierte $SU(N_s + N_v|N_v)^*$-Symmetrie

Formalismus

Für und gilt $N_s = N_v = 1$ und damit ersetzen wir die Felder

$$U = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\phi}{F}\right) \quad \text{mit} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_{vv} & \phi_{vs} & \phi_{vg} \\ \phi_{sv} & \phi_{ss} & \phi_{sg} \\ \phi_{gv} & \phi_{gs} & \phi_{gg} \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_v & 0 & 0 \\ 0 & \chi_s & 0 \\ 0 & 0 & \chi_g \end{pmatrix} \tag{33}$$

Formalismus

Außerdem müssen wir die Spur ersetzen:

$$\mathrm{STr}\,(M) = \mathrm{Tr}\,(A) - \mathrm{Tr}\,(D)\,; \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{34}$$

Wir haben nun alle nötigen Komponenten um effektive Lagragians aufzustellen.

Lagrangians

Mit diesen Umstellungen ist der Lagrangian von $\mathcal{O}\left(q^2\right)$

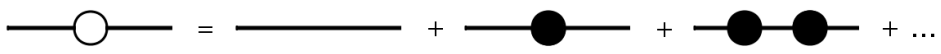
$$\mathcal{L}_2^{PQ} = \frac{F^2}{4}\mathrm{STr}\left[\partial_\mu U \partial^\mu U\right] + \frac{F^2}{4}\mathrm{STr}\left[\chi U^\dagger + U\chi^\dagger\right] \tag{35}$$

und von $\mathcal{O}\left(q^4\right)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_4^{PQ} = {} & L_1 \mathrm{STr}\left[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\right]^2 + L_2 \mathrm{STr}\left[\partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger\right] \mathrm{STr}\left[\partial^\mu U \partial^\nu U^\dagger\right] \\
& + L_3 \mathrm{STr}\left[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial^\nu U^\dagger\right] \\
& + L_4 \mathrm{STr}\left[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger\right] \mathrm{STr}\left[\chi U^\dagger + U\chi^\dagger\right] \\
& + L_5 \mathrm{STr}\left[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \left(\chi U^\dagger + U\chi^\dagger\right)\right] + L_6 \mathrm{STr}\left[\chi U^\dagger + U\chi^\dagger\right]^2 \\
& + L_7 \mathrm{STr}\left[\chi U^\dagger - U\chi^\dagger\right]^2 + L_8 \mathrm{STr}\left[U\chi^\dagger U\chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger\right]
\end{aligned} \tag{36}$$

Massenberechnung

Wir wollen Massen der Ordnung $\mathcal{O}\left(q^4\right)$ berechnen.



$$\begin{aligned} \mathrm{i}\Delta\left(p\right) &= \mathrm{i}\Delta_{LO}\left(p\right) + \mathrm{i}\Delta_{LO}\left(p\right)\left(-\mathrm{i}\Sigma\left(p^2\right)\right)\mathrm{i}\Delta_{LO}\left(p\right) + \cdots \\ &= \frac{\mathrm{i}}{p^2 - M_{ss,2}^2 - \Sigma\left(p^2\right) + \mathrm{i}0^+} \end{aligned} \tag{37}$$

Damit folgt

$$M_{ss}^2 = M_{ss,2}^2 + \Sigma\left(M_{ss}^2\right) \tag{38a}$$

$$= M_{ss,2}^2 + A + BM_{ss}^2 \tag{38b}$$

Massenberechnung

$$M_{ss}^2 = \frac{M_{ss,2}^2 + A}{1 - B} \approx M_{ss,2}^2 \left(1 + B\right) + A \tag{39}$$

Wir betrachten den Massenterm von $\mathcal{O}\left(q^2\right)$

$$\frac{F^2}{4} \mathrm{STr}\left[\chi U^\dagger + U \chi^\dagger\right] = \frac{F^2}{4} \mathrm{STr}\left[\chi\right] - \frac{1}{4} \mathrm{STr}\left[\phi^2 \chi\right] + \mathcal{O}\left(\phi^4\right) \tag{40}$$

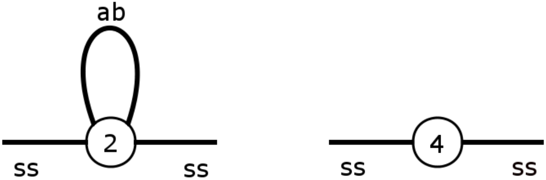
und werten den quadratischen Term aus

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \mathrm{STr}\left[\phi^2 \chi\right] = -\frac{1}{4} \Big(&\chi_v \phi_{vv}^2 + \chi_s \phi_{ss}^2 - \chi_g \phi_{gg}^2 + \left(\chi_v + \chi_s\right) \phi_{vs} \phi_{sv} \\ &+ \left(\chi_v + \chi_g\right) \phi_{vg} \phi_{gv} + \left(\chi_s + \chi_g\right) \phi_{sg} \phi_{gs}\Big) \end{aligned} \tag{41}$$

Damit folgt

$$M_{ij,2}^2 = \frac{1}{2} \left(\chi_i + \chi_j\right) = B_0 \left(m_i + m_j\right) \tag{42}$$

Beiträge von $\mathcal{O}\left(q^4\right)$



Beiträge von $\mathcal{O}\left(q^4\right)$

Auswertung dieser Diagramme ergibt

$$a_{ss}^{\text{loop}} = -\frac{\chi_s}{4F^2}\left(I\left(M_{ss}^2,\mu^2\right) + \frac{1}{3}I\left(M_{sv}^2,\mu^2\right)\right) \tag{43a}$$

$$b_{ss}^{\text{loop}} = \frac{1}{12F^2}I\left(M_{sv}^2,\mu^2\right) \tag{43b}$$

$$a_{ss}^{\text{tree}} = \frac{4}{F^2}\left[4\left(\chi_v+\chi_s-\chi_g\right)\chi_s L_6 - 2\chi_s^2 L_7 + 3\chi_s^2 L_8\right] \tag{43c}$$

$$b_{ss}^{\text{tree}} = -\frac{4}{F^2}\left[\left(\chi_v+\chi_s-\chi_g\right)L_4 + \chi_s L_5\right] \tag{43d}$$

mit $I\left(M_{sv}^2,\mu^2\right)$ vom Typ

$$I\left(M^2,\mu,n\right) = \mu^{4-n}\int\frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\frac{\mathrm{i}}{k^2-M^2+\mathrm{i}0^+} \tag{44}$$

Ergebnis

$$M_{ss,4}^2 = \chi_s \left(1 + B_{ss}\right) + A_{ss} \tag{45a}$$

$$= \chi_s + \frac{4\chi_s^2}{F^2}\left(4L_6 - 2L_7 + 3L_8 - L_4 - L_5\right) - \frac{\chi_s}{4F^2} I\left(M_{ss}^2, \mu^2\right) \tag{45b}$$

Nach dimensionaler Regularisierung:

$$M_{ss,4}^2 = \chi_s + \frac{l_1}{F^2}\chi_s^2 - \frac{\chi_s^2}{64\pi^2 F^2}\left[R + \ln\left(\frac{\chi_s}{\mu^2}\right)\right] \tag{46a}$$

$$= \chi_s + \frac{\chi_s^2}{F^2}\left[l_1^r - \frac{1}{64\pi^2}\ln\left(\frac{\chi_s}{\mu^2}\right)\right] \tag{46b}$$

Somit ist unser Endergebnis

$$M_{ss,4}^2 = \chi_s + \frac{\chi_s^2}{F^2} l_1^r \tag{47}$$

Zusammenfassung

- Die Symmetrie für Gluinos ist $SU(N)^* \times U_A(1)$
- Für $\left\langle \overline{\lambda}_1 \lambda_1 \right\rangle + \left\langle \overline{\lambda}_2 \lambda_2 \right\rangle \neq 0$ bricht die Symmetrie spontan
- Eine effektive Theorie kann formuliert werden
- Partielles Quenching ist möglich
- Für die Masse des adjungierten Pions gilt $M^2_{ss,4} = \chi_s + \frac{\chi_s^2}{F^2} l_1^r$

Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit!