r: $\quad m\left(r\dot{\varphi}^2 - \ddot{r}\right) + \frac{dV}{dr} = 0$

φ: $\quad m\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\varphi}\right) = \frac{d}{dt}p_\varphi = 0$ Drehimpulserhaltung (φ zyklisch)

Verallg. Impulse: $\quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ Radialimpuls

$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$ Drehimpuls

E 2.4.3. Eindeutigkeit der Lagrange-Funktion

E 2.4.3.1. Mechanische Eichtransformation

... sind Transformationen von L die die Euler Lagrange Gl. nicht ändern

Lit: Nolting 2, Kap. 1.2.3.

$$L \longrightarrow \boxed{L' = L + \frac{d}{dt} f(q_s, t)} \qquad (*)$$

Bem: äquivalent
$S \rightarrow S' = S + \text{const.}$

$$\frac{df}{dt} = \dot{f} = \sum_r \frac{\partial f}{\partial q_r}\dot{q}_r + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (**)$$

Dann gilt

$$\frac{\partial L'}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_s} \overset{(*)}{=} \frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_s}}_{\frac{\partial f}{\partial q_s}\text{ (nach } **)}$$

$$\overset{(**)}{=} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}}_{=0 \text{ da } L \text{ ein Lagrangian}} + \underbrace{\frac{\partial \dot{f}}{\partial q_s} - \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_s}}_{=0}$$

L und L' nennt man äquivalente Lagrange Funktionen.

E 2.4.3.2. Nicht-äquivalente Transformationen

Lagrange Funktionen die dieselbe EL-Gl ergeben, aber nicht durch Eichtransformation (*) auseinander hervorgehen heissen nicht-äquivalent.

- 1d harmonischer Oszillator – Lagrangian

standard: $\quad L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{m}{2}\omega^2 x^2$

Eichtransf: $\quad L' = L + \frac{d}{dt}\frac{x^2}{2} = L + x\dot{x}$

nicht äquiv: $\quad L'' = \frac{1}{3}\dot{x}^4 + 2\dot{x}^2x^2 - x^4$ (überprüfen!)

$$L''' = 2\frac{\dot{x}}{x}\arctan\frac{\dot{x}}{x} - \ln(\dot{x}^2 x^2) \qquad \int \text{überprüfen!}$$

Keine neue phys. Einsicht, aber manchmal hilfreich beim Lösen von Gl.

E 2.5 Lagrangegleichungen 1. Art

Lit: Nolting 2, Kap. 1.3.3.
Golding 2.4

- Zwangsbedingungen (ZB) (s. E 1.3) $\longrightarrow$ Minimierung mit Nebenbedingungen
- $3N$ Freiheitsgrade
  p ZB $\longrightarrow$ $3N - p = n$ Freiheitsgrade
- holonome ZB $\qquad f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = 0 \qquad \nu = 1 \dots p \qquad (1)$

  $\longrightarrow q_s \qquad s = 1..n \qquad$ verallg. unabhäng. Koord. die ZB berücksichtigen

  $\longrightarrow \eta_s$ (δq_s) unabhängige Variationen

  $\longrightarrow \dfrac{\partial L}{\partial q_s} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} = 0 \qquad$ n EL Gl. die ZB schon berücksichtigen

- nichtholonome ZB
  - verallg. Koord. nicht unabhängig
  - keine Mgl. sie mit Bedingungen wie (1) zu reduzieren
  - Variationen $\eta_s = \delta q_s$ erfüllen nicht notwendigerweise die ZB (sie sind nicht unabhängig)

  Für Unterklasse (semiholonom)
  $$f_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots \dot{\vec{r}}_N) = 0 \qquad \nu = 1 \dots p \qquad (2)$$
  ist Variation möglich

  (2) meist als (siehe E 1.3.2) $\qquad \displaystyle\sum_{m=1}^{3N} g_{\nu m}\, dx_m + g_{\nu t}\, dt = 0 \qquad (3)$

- Einführung von Lagrange Multiplikatoren λ_ν

  wenn (2) gilt, dann gilt $\qquad \displaystyle\sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu f_\nu = 0 \qquad (4)$

  wobei λ_ν unbestimmte Größen sind

  Normalerweise $\qquad \lambda_\nu = \lambda_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$

- Annahme Hamilton'sches Prinzip gilt
  $$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0$$
  $$\Longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i = 0 \qquad (5)$$

• Kombiniere (4) & (5)

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \sum_{\nu=1}^{p} \lambda_\nu f_\nu \right) dt = 0 \qquad (6)$$

⟶ nun Variation nach δq_i und $\delta \lambda_\nu$

• mit Annahme $\lambda_\nu = \lambda_\nu(t)$ ergibt sich aus der Variation bzgl. δq_i

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \qquad (7)$$

$$\text{mit } Q_i = \sum_{\nu=1}^{p} \left\{ \lambda_\nu \left[\frac{\partial f_\nu}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f_\nu}{\partial \dot q_i} \right] - \frac{d\lambda_\nu}{dt}\frac{\partial f_\nu}{\partial \dot q_i} \right\} \qquad (8)$$

Lagrange Gl. 1. Art

• Variation nach $\delta \lambda_\nu$ ergibt wieder Gl. (2)

⟶ Gl. (7) und (2) sind $p + 3N$ Gl. für $\underbrace{p}_{\lambda_\nu} + \underbrace{3N}_{q_i}$ Unbekannte

• verallgemeinerte Kräfte Q_i – identisch zu Zwangskräften

Bem: Form (2) der ZB enthält holonomen Fall

⟶ Lagange Multiplikatoren funktioniert auch im holonomen Fall

⟶ Gibt immer die Zwangskräfte

Beispiel 1: $L = \frac{1}{2} m (\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - V(x,y,z)$

mit ZB $f(\dot x, \dot y, y) = \dot x \dot y + \kappa y = 0$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Bewegungsgl.} && m\ddot x + \lambda \ddot y + \dot\lambda \dot y + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\
&\dot\lambda \dot x \; + && m\ddot y + \lambda \ddot x - \kappa \lambda + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \\
& && m\ddot z + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \\
&\text{mit} && \dot x \dot y + \kappa y = 0
\end{aligned}\right\}$$

4 gekoppelte G DGl für x, y, z, λ

Beispiel 2: Zylinder der schiefe Ebene herunterrollt
siehe Goldstein S. 49–51
(Fall mit 2 verallg. Koord.)

E 2.6. Das Noether Theorem

(Erhaltungsgrößen und Symmetrieeigenschaften)

Lit Nolting 2, Kap 1.4
Goldstein 2.6

oft existieren Funktionen $F(q_i, \dot q_i)$ mit

$$\boxed{\frac{d}{dt} F(q_i, \dot{q}_i) = 0}$$

Diese F nennt man Integrale der Bewegung.

Es gibt einen Zusammenhang zwischen diesen Erhaltungsgrößen und fundamentalen Symmetrien:

Jede kontinuierliche Symmetrie eines physikalischen Systems führt zu einer Erhaltungsgröße.

Noether Theorem